DOSSIER-ALEATOIRE

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Michel Clinard, Jacqueline Collet, Roger Crépin, Georges Le Nezet, Serge Parpay, Raymond Torrent

Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

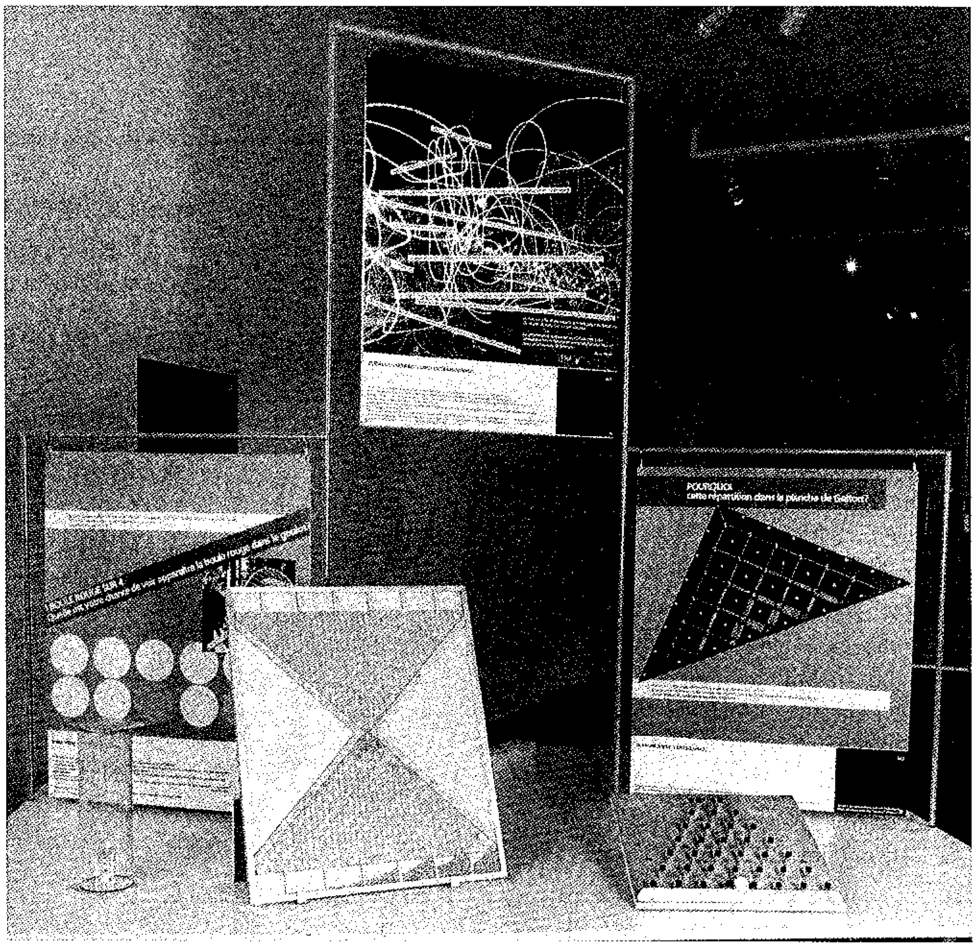
Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

Photogravure et impression
Fabrègue-Imprimeur, Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, Nantes, Rennes, Rouen, Brest et Caen avec le concours du Ministère de la Coopération

Diffusion
Adécum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique)



"Tiré du règne du pur hasard,
il entre dans celui de la nécessité,
des certitudes les plus implacables"

Jacques Monod, Le hasard et la nécessité.

SPECIAL PLOT - ALÉATOIRE

sommaire

Enseignants d'Afrique du Nord, ce numéro est le dernier que vous recevrez par cette voie, si vous voulez encore recevoir le PLOT, abonnez-vous aux conditions normales.

ALEA JACTA EST !!!

Il est remarquable qu'une science dont l'origine est l'étude de jeux de hasard soit devenue le plus important objet de la connaissance humaine.
Pierre Simon - Marquis de Laplace - 1749/1827

Hasard et réalité

Depuis toujours les hommes ont été fascinés par le hasard,
hasard des événements comme hasard des jeux.
Et puis, l'homme, dans sa volonté et son besoin de mettre tout en ordre,
a cherché à faire obéir le hasard aux lois des mathématiques.
Et il y est arrivé !!!

Les événements aléatoires, dans leur solitude, sont totalement imprévisibles,
mais, un grand nombre de coups aléatoires peuvent se mettre en règle :
la distribution crée la loi .

Trois approches sont possibles :
- la réalité d'abord. Répéter, répéter l'expérience et avoir une approche statistique du phénomène par les fréquences et les pourcentages,
- le modèle théorique probabiliste ensuite. Tout est parfaitement mis en chiffres, les dés, les pièces, les roulettes sont parfaitement équilibrées, le lanceur aussi, ... " tout baigne" ,
- et puis, il y a l'approche "intermédiaire" où l'on simule la réalité.

Cette approche, grâce aux calculatrices, aux ordinateurs, ou tout simplement à des **matériels** aussi simples que des dés, des roulettes, etc... permet une approche pédagogique moins coûteuse et moins brutale
Devant l'évolution des résultats des expériences simulées, la convergence des fréquences des événements, les élèves, **de conjecture en conjecture**, de validation en validation, mettent en place le modèle probabiliste sous-jacent grâce aux situations proposées par l'enseignant.

Le PLOT voulant être avant tout un outil pour la classe,
c'est cette approche qui est privilégiée dans ce dossier sur l'aléatoire.
On notera que les programmes officiels ne favorisent guère, jusqu'à présent,
la mise en place de démarches ... aléatoires en classe.
L'enseignement des probabilités reste, de ce point de vue, encore beaucoup trop formel et les études didactiques actuellement menées montrent clairement que les résultats ne sont pas probants .

Alors, allons-y ! Le sort en est jeté !!!

Bonne lecture et n'oubliez pas que ce numéro ...
... est le dernier de votre abonnement 1986.

En dehors des auteurs cités, ce numéro a été conçu par
Gérard Chauvat, Michel Clinard, Michel Darche et Jacques Lubczanski .
L'équipe PLOT remercie tous ceux qui lui ont apporté leur aide,
que ce soit pour des points au hasard dans un carré , des dessins ou des idées .

N'oubliez pas le complément indispensable à ce dossier qui se trouve dans le **MATERIEL- PLOT**
Vous pouvez vous le procurer en utilisant le nouveau bon de commande de la page 1.

VOUS AVEZ DIT HASARD ?

Les plus importantes questions de la vie
ne sont, la plupart du temps,
que des affaires de probabilités.
Marquis de Laplace.

Qu'est-ce que le hasard ?

En dehors de son origine "beur", le mot "az-zahr" désignait les jeux de dés de l'Islam du XIIème siècle. On notera aussi sa résonnance maléfique dans les langues ibèriques : "azar" signifie en effet, malchance, mauvais-œil en espagnol et en portugais.

Comment jouez-vous mentalement avec le hasard ? Même avec tout ce que vous avez appris ?? Voyez vous-même : **Ceci est test avant de commencer !**

- une pièce tombe dix fois de suite sur pile. Que choisissez-vous la fois suivante, pile ou face ?
- les "chiffres-nombres" suivants sont-ils tapés au hasard ?1415926535897932384626338329
- une machine électronique peut-elle générer des nombres au hasard ? Et l'homme ?
- accepteriez-vous de jouer **1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6** au LOTO ?

Les réponses à ces questions montrent combien le hasard est difficilement maîtrisable, même quand on "sait". Pour les questions 1 et 4, la série a pourtant autant de chance d'apparaître qu'une autre et rien ne peut préjuger du résultat qui suit. Pour ce qui est du LOTO, vous avez de plus la certitude en jouant ce numéro, de gagner un gros lot... si vous gagnez !!!

Pour les questions 2 et 3, selon Kolmogorov, mathématicien soviétique qui a établi la théorie des probabilités utilisée de nos jours, la série est aléatoire si la règle qui permet de la construire est aussi longue que la série elle-même. Ce n'est pas , vous l'avez peut-être remarqué, le cas de la série donnée en 2 qui est celle des premières décimales de π.

Bien que les jeux soient à la base du calcul des probabilités, vous ne trouverez ici que peu d'articles sur ce sujet. Deux raisons simples à cela :
- l'importance du sujet, **jeux, hasard et stratégies**, en fera un numéro spécial à venir (88 , 89)
- et, surtout, trop d'exemples et d'exercices, basés sur un modèle probabiliste théorique se trouvent dans les manuels.

Du même coup, vous ne verrez que très peu de **"Céhenpet"** dans les pages qui suivent. Mais vous verrez de fréquentes utilisations de la touche **Random** et, surtout, de nombreuses simulations grâce à un matériel varié dont nous vous proposons ici les modes d'emploi et que vous pourrez vous procurer avec le **PLOT-Matériel Aléatoire** .

Les dossiers et matériels du PLOT

1987, nouvelle année, nouveaux tarifs

Vous avez sûrement remarqué que la formule d'achat de ces matériels-PLOT a changé.
Trois raisons à cela :
- la demande a épuisé nos stocks. Il nous faut faire de nouveaux tirages à de nouveaux coûts.
- les tarifs postaux sont importants pour le matériel, chaque pochette pesant 300 grammes.
- la TVA, enfin, augmente le tout et nous oblige à différencier **les abonnés** des autres.

Malgré tout, pour les grosses commandes, grâce à la **réduction de 20%**, les tarifs sont inférieurs à ceux proposés jusqu'à présent. Alors calculez et trouvez la meilleure solution .

LES ALEAS DE L'INTUITION

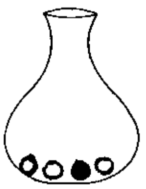
Les probabilités sont l'une des branches mathématiques les plus utilisées par le "grand public" avec la perception des formes. Elle fournit des modèles qui permettent à chacun de se représenter la réalité, de la décrire et de faire des prédictions sur des événements à venir.

Encore faut-il que ces modèles qui sont le plus souvent implicites soient validés par l'expérience et le raisonnement. Les situations aléatoires sont celles qui mettent le plus facilement l'intuition en défaut. Même un raisonnement bien construit peut être trompeur. Tous ceux qui enseignent ou ont reçu un cours sur le sujet en ont fait l'expérience.

Des analyses didactiques commencent à être faites à l'élémentaire et nous donnent les premiers repères dans le fonctionnement cognitif (et intuitif) des élèves. En voici quelques éléments qui mettent en avant des situations où l'intuition peut être mise en conflit avec la réalité.

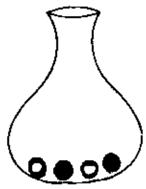
D'ABORD, TESTEZ-VOUS !

Avec des situations à information totale.



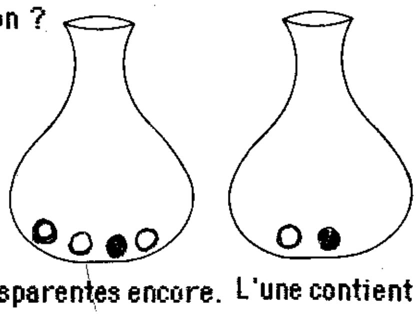
Une bouteille transparente contient quatre billes, trois blanches et une noire. Vous tirez deux billes au hasard. Avez-vous plus de chance de tirer deux billes de même couleur ou deux billes de couleurs différentes?

Jouez le jeu, répondez sans réfléchir!



Une deuxième bouteille transparente contient deux billes blanches et deux rouges . Vous tirez, au hasard, deux billes de l'une des deux bouteilles. Quelle bouteille choisir pour avoir le plus de chance d'avoir deux billes de couleurs différentes?

Que dit votre intuition ?



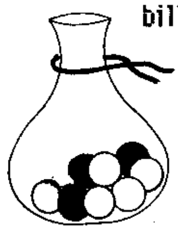
Deux bouteilles transparentes encore. L'une contient trois billes blanches et une noire mais l'autre ne contient que deux billes, une blanche et une noire. Avez-vous plus de chance de tirer une bille noire en deux essais dans la bouteille à quatre billes ou en un essai dans la bouteille à deux billes ?

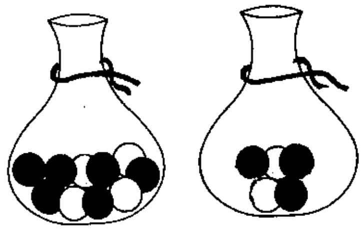
Que se passe-t-il si l'on met mille fois plus de billes de chaque couleur dans les bouteilles?

Avec des situations à information incomplète.

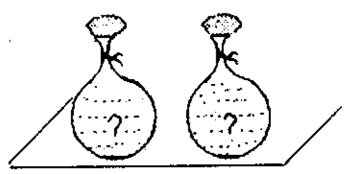
Un sac contient cinq billes blanches et trois noires. Tirez au hasard une bille. Avez-vous plus de chance d'avoir une bille blanche ou une noire ?

Facile ? Continuons ,





Deux sacs contiennent l'un quatre billes blanches et six noires, l'autre deux blanches et trois noires. Choisissez l'un des sacs et tirez une bille au hasard. Quel sac choisir pour avoir le plus de chance de tirer une bille rouge ? pour avoir une bille blanche ?



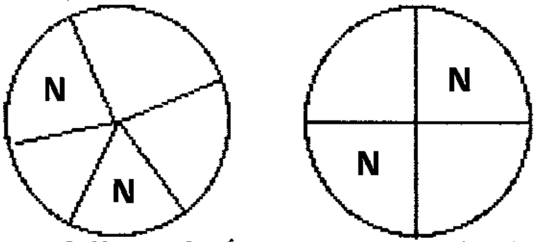
Mêmes questions mais cette fois ci avec deux sacs contenant, l'un trois blanches et neuf noires, l'autre deux blanches et six noires .

Bon me direz-vous, l'affaire est dans le sac! Pas étonnant que l'on ne s'en sorte pas.

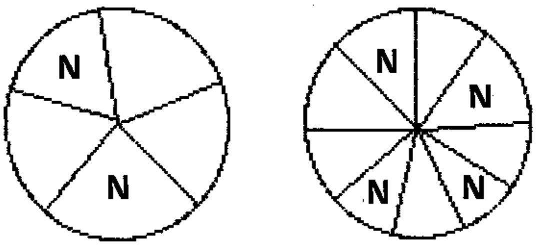
Passons alors à un autre matériel de simulation:

les roulettes !

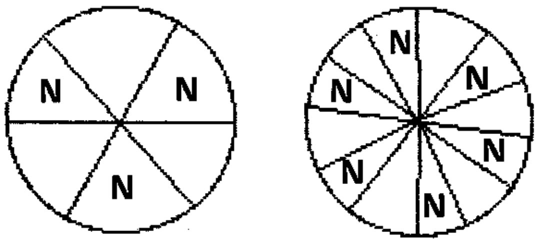
Rien ne va plus, faites vos jeux !



Deux roulettes colorées comme sur la figure. Choisissez la roulette que vous voulez et faites-la tourner. Quelle roulette choisiriez-vous pour que, après l'avoir fait tourner, elle s'arrête sur la couleur noire .



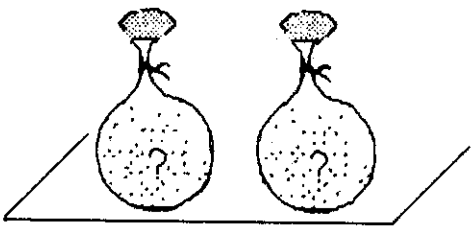
Même question avec ces deux roulettes.

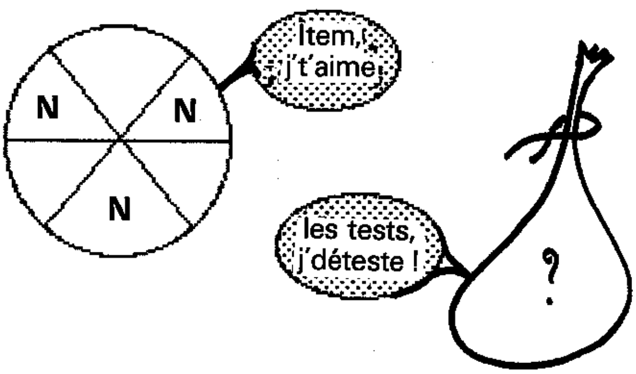


De ces deux roulettes,laquelle choisiriez-vous pour qu'elle s'arrête sur la couleur blanche ?

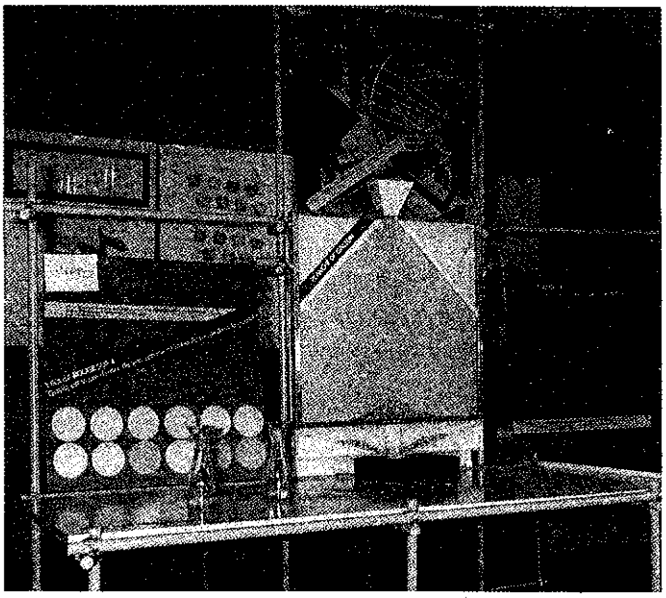
Situations à information cachée

Deux sacs contiennent chacun cinq billes d'au plus deux couleurs, blanche et noire. Faire un certain nombre d'essais avant de répondre à la question.
Pouvez-vous déterminer le contenu de ces sacs ?





ET MAINTENANT, TESTEZ-LES !



Ces questions sont extraites de compte-rendus d'expériences réalisées avec le "grand public" avec les expositions "Horizons Mathématiques" (question 1), avec des élèves de 8-10 ans (question 4) et des élèves de 15 ans (questions 2 et 3). Pouvez-vous imaginer les arguments utilisés par les élèves pour justifier leurs réponses bonnes ou fausses ?

A votre avis, le matériel utilisé, bouteilles, sacs, roulettes, a-t-il une influence sur la qualité des réponses des élèves ?

Ah! mais au fait, encore une question : pour chacune de ces situations, si vous répondiez au hasard plutôt qu'à "l'intuition", auriez-vous plus de chance de répondre correctement ?

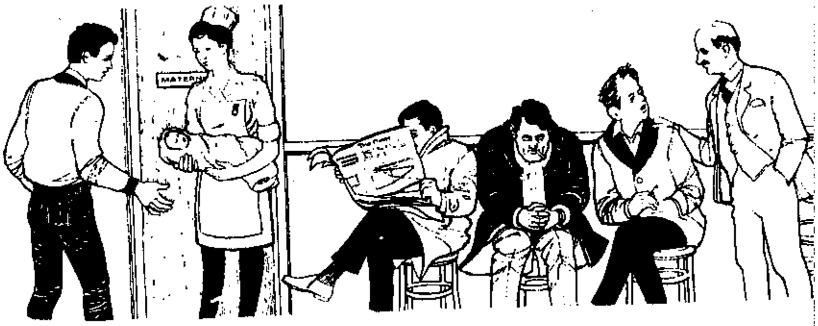
Ne répondez pas au hasard !

Petite bibliographie :

Pour en savoir plus, reportez-vous à votre collection de PLOT ! le n°3 de 1976 pour un article de Joël Briand sur "découverte des lois du hasard à l'école élémentaire" ou aux articles de Sylvette Maury et Marie-Paule Lecoutre dans "Recherches en didactique des mathématiques."
- l'un sur l'analyse des arguments utilisés par des élèves de seconde (Vol 5, n°2,p. 187-214, 1984) sujet sur lequel l'auteur vient de présenter une thèse de didactique à Grenoble,
- l'autre sur les effets d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes (Vol 6.n°2-3,p. 193-213, 1985).Dans cet article, l'auteur reprend l'étude des bouteilles avec cette fois trois jetons, un rouge et deux blancs. A-t-on plus, moins ou autant de chances de tirer:
- un jeton rouge ou un jeton blanc?
- deux jetons blancs ou un rouge-un blanc ?
Et, bien sûr, les réponses sont étonnantes!!!

L'ENFANT ET LE HASARD

Voici une lecture résumée de la publication n°11 de l'Irem de Bordeaux relative à l'enseignement des probabilités à l'école élémentaire qui peut être étendu au cycle d'observation des collèges.



Développement de l'idée de hasard chez l'enfant.

Avant 7-8 ans, l'enfant ne distingue pas le possible et le nécessaire. Rien pour lui n'est prévisible à coup sûr, c'est-à-dire déductible selon un lien de nécessité. Rien , non plus, n'est imprévisible à coup sûr, c'est-à-dire fortuit. Il n'y a donc **ni hasard ni probabilité** faute d'un système de référence pour les opérations déductives.

De 7 à 11 ans, avec l'apparition des opérations logico-arithmétiques débute le développement de l'idée de hasard. En effet, la construction des opérations permet à l'enfant de concevoir le hasard comme l'antithèse du déductible. Il peut ainsi différencier **le** simple **possible du nécessaire**.

A partir de 12 ans, la pensée formelle naissante conduit l'enfant à opérer la synthèse entre le hasard et les opérations. Celles-ci permettent de structurer divers évènements fortuits et dispersés en un système de probabilités. La pensée formelle conduit également à **la découverte des proportions** qui permettent de concevoir la légitimité des modèles probabilistes (loi des grands nombres par exemple).

Une activité pour la classe.

Ce qui précède permet d'envisager des situations de classe qui donneront aux enfants du cours moyen ou du cycle d'observation (8-12 ans) l'occasion de construire et d'utiliser des modèles probabilistes, explicités ou non.

Voici un exemple, et si vous pensez qu'il y a de fortes chances pour qu'il s'agisse de boules à tirer dans une urne, vous avez perdu ! Il s'agit de pions dans un sac !!

Dispositif :

Les enfants, disposés en groupe, reçoivent des sacs contenant des pions blancs et des pions noirs. Il est interdit d'ouvrir les sacs. On peut imaginer les répartitions suivantes pour sept groupes :

- modèle " un noir sur cinq" : 1 et 4, 2 et 8, 3 et 12
- modèle "**deux noir sur cinq**": 2 et 3, 4 et 6
- modèle " un noir sur deux": 3 et 3, 5 et 5

Tâches des élèves :

Dans chaque groupe, les enfants tirent un pion au hasard sans regarder dans le sac, notent sa couleur, remettent le pion dans le sac. Ils recommencent l'expérience autant de fois qu'ils le jugent nécessaire pour deviner la proportion de pions de chaque couleur.

Pour cela, ils doivent réaliser la même répartition dans un nouveau sac qui doit contenir, par exemple, trente pions. Ou encore, ils doivent identifier les autres groupes qui ont le "même type" de sac.

Les résultats peuvent être consignés dans un tableau. Une calculette permet de se détacher des calculs perturbateurs et de ne s'intéresser qu'à l'organisation des informations :

Tirages n°	1	2	3	28 .....
tirage d'un pion noir	1	0	1	1 .....
total des noirs	1	1	2	20 .....
rapport (fraction)	1/1	1/2	2/3	20/28.....
rapport(décimal	1	0,5	0,66	0,71 .....

Objectifs : Il s'agit ici de construire pas à pas une série statistique, d'émettre des hypothèses sur le modèle probabiliste sous-jacent et d'utiliser ces hypothèses pour construire un autre sac sur le même modèle ou de reconnaître, par une communication entre groupes, ceux dont le sac correspond au même modèle .

Intérêt de l'activité :

L'impossibilité de vérifier les hypothèses, en ouvrant le sac, conduit les enfants à une situation conflictuelle : d'étape en étape, les enfants formulent **un pari** quant au prochain tirage, sans pouvoir justifier explicitement leur raisonnement. Ils en déduisent un mode de **prévision** explicite et déterministe que l'expérience risque fort de ne pas vérifier. Ils sont conduits à rejeter le pari et le modèle **implicite** qui l'a fourni. Ils sont obligés de recourir à de nouvelles expériences qui renforcent leur conviction intime que le pari était correct.

La rupture de ce cercle vicieux apparait, pour Guy Brousseau, comme la clef de la génèse d'un modèle probabiliste : on passe d'un **pari**, et de la nécessité de vérifier le résultat, à une **prédiction**, le niveau de conviction est suffisant pour pouvoir se passer des vérifications.

D'une manière plus secondaire, il peut être intéressant d'observer et de corriger les conceptions mathématiques (rapport, calcul décimal, ...), la formulation des constatations (vocabulaire,...), l'organisation des informations (prise de notes, confection du tableau,...), les mécanismes d'échange et de mise en commun des résultats.

Un autre point d'intérêt est le repérage, par les élèves, de l'évolution des stratégies de prévision comme l'a rapporté J. Bégué dans "Probabilités et statistiques à l'école élémentaire" compte-rendu de recherche INRP n° 73-02-9-0, Ecole Normale de Foix.

Incidence du matériel .

Pour les collègues qui n'acceptent pas le rôle des pions et préfèrent avoir...les boules, il faut noter une incidence possible dans l'activité : les sacs de pions permettent de déterminer au toucher le nombre total de pions et la réalisation d'un sac semblable peut être atteinte par une relation de proportionnalité assez facile à percevoir. Par contre, l'urne contenant les boules peut empêcher le comptage et limite les effets parasites du nombre total de boules pour la comparaison avec les autres groupes. Mais le modèle probabiliste est-il alors perçu dans toute sa généralité ?

Enseigner les probabilités, pourquoi ?

Voici ce qui peut être envisageable entre 8 et 12 ans d'après Guy Brousseau :

Pratique d'expériences où le hasard joue un rôle.

Proposer aux enfants des situations dans lesquelles un modèle déterministe ne convient pas; les mettre en mesure d'effectuer des paris convenables, voire des prédictions révélatrices d'un modèle probabiliste implicite.

Introduction d'un vocabulaire utile et précis.

Permettre aux enfants de formuler les constatations effectuées, d'identifier et de désigner les **évènements** et leur mesure.

Deux langages différents peuvent être nécessaires : mesures à priori, ce sont les modèles probabilistes, mesures à posteriori, ce sont les modèles statistiques.

Construction d'un modèle explicite.

Favoriser la découverte de relations entre des faits jugés pertinents, utiliser des opérations mathématiques pour obtenir des prévisions (rapport, combinatoire,...), sans vouloir forcément justifier tout cela par une théorie mais en se contentant de vérifier expérimentalement les prévisions.

Introduction à l'étude systématique de la théorie.

Ce type d'activités permet aux enfants de se munir d'un certain nombre d'expériences, de notions et de théories leur permettant de décrire et résoudre systématiquement certaines catégories de problèmes (notion d'événement, de mesure,...)

C'EST POUR UN... SONDAGE !

question n°1 :

Avez-vous lu l'article précédent ?

oui ☐ **non** ☐

question n°2 :

L'avez-vous trouvé intéressant ?

oui ☐ **non** ☐

Voici les résultats de notre sondage effectué auprès de 100 personnes désœuvrées mais honnêtes.

45 ont déclaré avoir lu tout l'article, 30 l'avoir trouvé intéressant et ...18 l'avoir lu en entier et l'avoir trouvé intéressant ! Qu'est-ce à dire ?

Considérons l'une de ces 100 personnes, choisie bien sûr au hasard. Elle nous déclare avoir lu tout l'article. **Quelle est la probabilité qu'elle l'ait alors trouvé intéressant ?**

Raisonnons : d'après l'enquête réalisée, on peut dresser le tableau suivant :

	article lu	article non lu	total
intéressant	**18**	12	**30**
non intéressant	27	43	70
Total	**45**	55	**100**

On peut alors attribuer à chaque évènement une probabilité égale à sa fréquence d'apparition dans l'enquête. Par exemple :

Proba(d'avoir lu l'article) = 45/100=0,45

Proba(de l'avoir trouvé intéressant)=30/100=0,30

Proba(l'avoir lu et trouvé intéressant)=18/100=0,18

La fréquence de l'évènement " l'avoir touvé intéressant **après** l'avoir lu" s'obtient en dénombrant les personnes ayant trouvé l'article intéressant par rapport au nombre de personnes ayant lu l'article. On en déduit que : Proba(de l'avoir trouvé intéressant après l'avoir lu)= 18/45=0,40

Remarquez que ce résultat s'obtient en calculant le quotient de la dernière à la première probabilités précédentes, ce qui correspond bien à la définition d'une probabilité **conditionnelle.**

Reconsidérons l'une de ces cent personnes. Elle nous déclare avoir trouvé l'article intéressant! Soit ! Mais quelle est la probabilité pour que cette personne **n'ait pas lu l'article** ?

Raisonnons : il s'agit de calculer, en se reportant au tableau de résultats la probabilité que l'article n'ait pas été lu **sachant qu**'il a été trouvé intéressant ! On trouve 12/30 soit 0,40 ! ? !

Euh,... réfléchissons encore un petit peu : si cette personne déclare avoir trouvé l'article intéressant, elle n'a pas pu ne pas le lire !...?...! Donc, la probabilité qu'elle n'ait pas lu l'article, **sachant qu**'elle l'a trouvé intéressant est forcément égale à ... **0** ! bizarre, bizarre,...,il y a *probablement* une erreur quelque part ! Mais au fait, trouvez-vous cela ... intéressant , **les probabilités conditionnelles ?**

LES JEUX DE L'AMOUR ET DU HASARD

L'aléatoire joue un grand rôle dans la vie amoureuse de chacun. Vous en êtes surement convaincu. Voici quelques exmples qui illustrent quelques-uns des ces événements mathématico-romantico-aléatoires.

Le rendez-vous manqué

A 17 heures Juliette sort de son travail. Roméo a rendez-vous avec elle. Mais il n'est pas sûr d'arriver à l'heure (non,non, c'est à cause des embouteillages quasi-imprévisibles). Il pense qu'il peut arriver à tout moment (ndlr: de manière équiprobable) entre 16h55 et 17h10. Hélas, Juliette ne pourra pas l'attendre plus de cinq minutes.

Quelles chances ont-ils de se rencontrer? Roméo a-t-il des chances d'arriver au moins une minute avant elle ?

La seconde chance.

Juliette lui donne une seconde chance : s'ils se ratent à la sortie, elle l'attendra quinze minutes à la gare où elle arrive, comme lui, entre 17h20 et 18h de façon aléatoire.

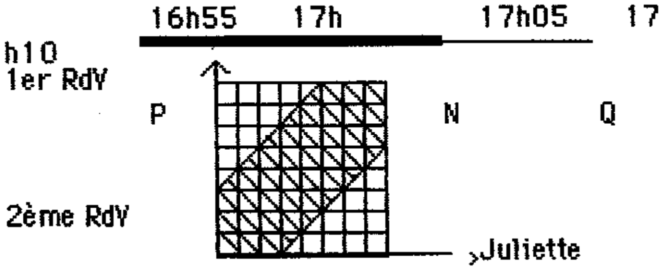
Il est convenu que, si Roméo arrive avant, il l'attende aussi 15 minutes.

Quelles chances ont-ils de se rencontrer à la gare s'ils se sont ratés à la sortie du travail ?

Quelles chances ont-ils de se voir ce soir!

Réponses.

Ce sont les probabilités géométriques qui permettent de répondre (voir page40). En effet, faisons un schéma :



Ces schémas montrent qu'ils ont 2 chances sur 3 de se rencontrer à la sortie du travail, Roméo ayant 4 chances sur 15 de l'attendre au moins une minute. S'ils se ratent, ils auront encore plus d'une chance sur deux (39/64) de se retrouver à la gare !
Et c'est ce qui arriva ....

Contrôle des naissances : la méthode naturelle

C'est la plus ancienne méthode, elle est connue depuis longtemps pour donner 70% de "réussite". Cela signifie qu'une personne qui, comme Juliette, utilise régulièrement cette méthode, a trente chances sur cent d'avoir un enfant dans l'année !

Pendant combien de temps Juliette peut-elle espérer rester sans attendre un premier enfant ? Un second enfant?....

Une solution : la simulation !

Une méthode expérimentale consisterait à enquêter auprès d'un ensemble représentatif de couples qui utilisent cette méthode depuis plusieurs années.

C'est ainsi que l'efficacité de la méthode a été connue. Mais ici, une simulation suivant la méthode de Monte-Carlo est plus rapide et plus efficace.

Il s'agit de simuler les résultats d'un couple et de répéter l'expérience sur plusieurs couples.

Pour cela, il suffit de rechercher une simulation donnant le temps d'attente avant le premier enfant.

30% de chances de passer l'année sans enfant, soit $P(0)=0,3$, et 70% d'avoir un enfant, soit $P(1)=0,7$ se simulent par un tirage, au hasard, d'un nombre entier entre 0 et 9:
pas d'enfant si l'on tire 0, 1 ou 2, un enfant dans l'année(plus neuf mois), si l'on tire entre 3 et 9.

Essayez et ... passez à la page suivante ...

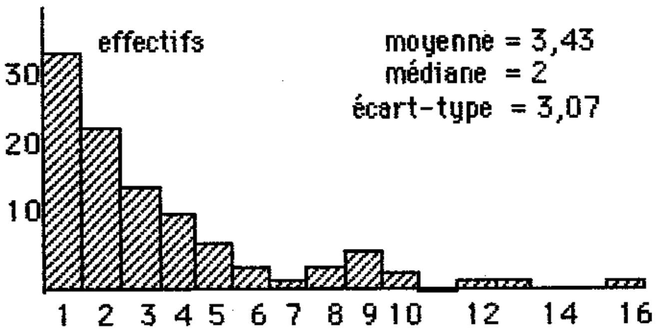
Simulation et théorie

Prenez une suite de nombres aléatoires et arrêtez-vous dès qu'un des trois nombres 0, 1 ou 2 apparaît. Vous obtenez un tableau de ce type :

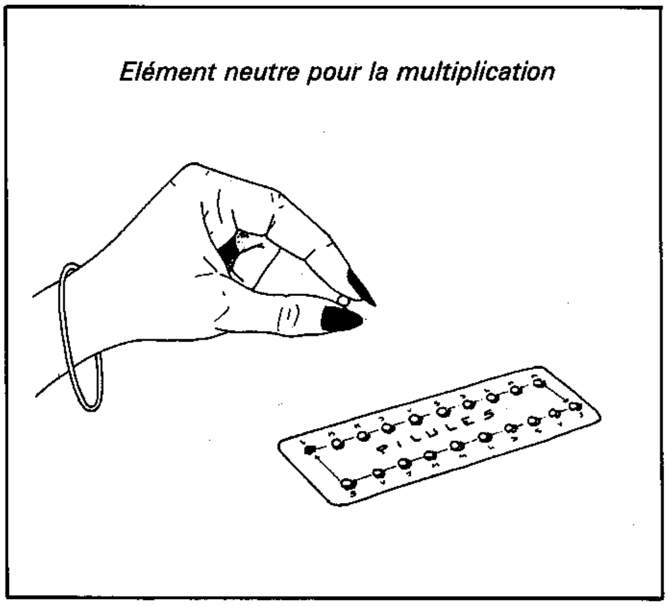
nombres aléatoires 318152225583751621718590791 1

résultat	01	01	01	1	1	0000001	01	1	01	0001	001	1
- 1 enfant	2	2	2	1	1	7	2	1	2	4	3	1
- 2 enfants		4		3		8		3		6		4

Chaque colonne indique le nombre d'années d'attente pour un couple. Douze expériences ont été faites. Il faut un nombre plus élevé d'expériences pour pouvoir obtenir une réponse assez proche de la réalité. Voici les résultats d'une centaine d'expériences présentés sous forme d'histogramme :



nombre d'années passées avant d'attendre un enfant



Gill - "Math marrantes" - Ed. Cedic 1974

Une telle expérimentation, pardon, simulation, peut être faite par les élèves, en groupe. Puis les résultats, collectés en grand groupe, peuvent donner lieu à des analyses, prédictions et prolongements des expériences pour voir comment se modifie cette moyenne.

Mais revenons à un calcul plus théorique.

Sur une série infinie de "coups" cela correspond à la somme $\sum_{n\geq 1} n(7/10)^{n-1} x(3/10)$

soit encore : $(3/10)\sum_{n\geq 1} n(7/10)^{n-1}$

qui, pour n tendant vers l'infini, correspond à

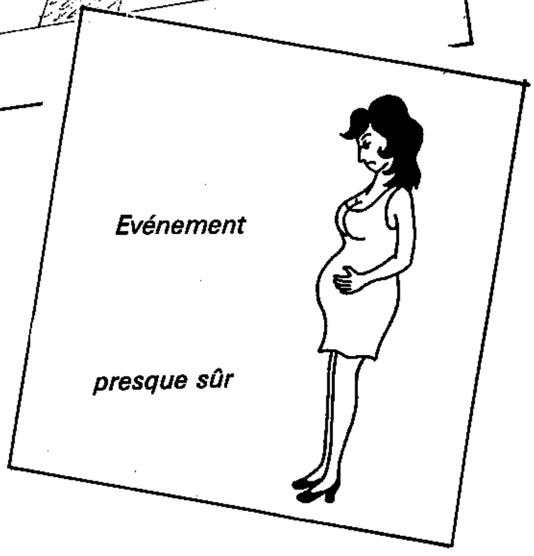
$$(3/10)\ \frac{d}{dx}\ (\sum_{n\geq 0} x^n) \quad \text{pour } x = 7/10$$

qui est égal à $(3/10)\ \frac{d}{dx}[1/(1-x)]$

soit $0{,}3/(1-x)^2$

d'où le résultat : $0{,}3/(1-0{,}7)^2$

qui après calcul est égal à 10/3 et donne la réponse théorique au problème.



UN HEUREUX EVENEMENT... ...PRESQUE SUR ?

La pratique des tests de dépistage de certaines maladies ou de certains "heureux événements" peut nécessiter des informations plus précises.

- Juliette! ma chérie, il faut en avoir le coeur net! Papa or not papa? that is ...
- A mon avis, deux chances sur cinq, amore mio ...
- Deux sur cinq ! Tu parles, c'est pas sérieux; Ça repose sur quoi? L'intuition féminine sans doute?
- Roméo chéri, ne te mets pas en colère pour si peu.. J'ai fait le test, nous serons bientôt fixés.
- C'est quoi ce test? .. c'est sûr au moins ?
- Ecoute, Potard le pharmacien, m'a tout expliqué Le test qu'il m'a vendu a une sensibilité de 95% et une spécificité de 92%..
- Ah bon d'accord! avec ça on est bien avancé !
- Attends! je t'explique : de deux choses l'une, tu es enceinte ou tu n'es pas enceinte ..
- Pardon ? **Tu** es enceinte ou **tu** n'es pas enceinte!
- D'accord! **Je** suis enceinte ou **je** ne le suis pas et de deux choses l'une : ou le test est positif ou il ne l'est pas.Mais, et c'est là que ça se complique, il peut être positif sans que je sois enceinte et négatif alors que je le suis .
- Ah ça, ils sont forts les toubibs maintenant! Même pas capable de faire un test efficace! Bravo!!
-Ne t'énerve pas!! Ecoute : la sensibilité du test te dit quelles chances a le test d'être positif si tu, je suis enceinte et la spécificité celles qu'il soit négatif si je ne le suis pas. Tu as compris cette fois?

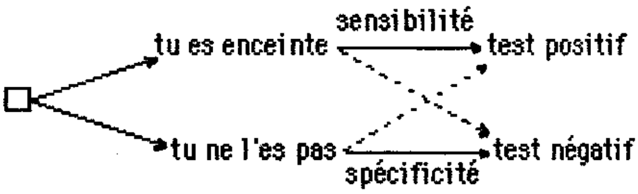
- Euh.. oui ... et c'est quoi ces chances déjà ?
- Monsieur Potard m'a dit que c'était 95% et 92%.
- Ah bon! Eh bien il n'y a plus qu'à calculer ! Tu as dit, à ton avis deux chances sur cinq?
- Oui, enfin, je crois ...
- Bon, ben ça fait : 0,4 par 0,95, le tout divisé par 0,4 multiplié par 0,95 plus 0,6 par 0,08.... soit à peu près ... 0,888 que tu sois enceinte, si le test est positif!

S'il est négatif, ça fait ... 0,4 par 0,005, le tout divisé par 0,4 multiplié par 0,005 plus 0,6 multiplié par 0,92 soit ...... 0,035 ... que tu sois encore enceinte!!
- Roméo, mon chéri, tu pourrais m'expliquer !!!

Fidèles lecteurs, pouvez-vous remplacer Roméo?..

Quelques éléments d'explication

- Je vais te faire un petit dessin, regarde :



- tu es sûr que ton schéma est dans le bon sens ? On aurait pu mettre les tests avant ?
- Mais oui, ma grosse ! (déjà!!) Tu es ou tu n'es pas enceinte avant de faire le test. Et la sensibilité te donne justement les chances que le test soit positif sachant que tu es enceinte, notons cela $P(T^+|E)$ tandis que la spécificité se note $P(T^-|\bar{E})$.
- Qui sont égaux à 0,95 et 0,92.
- Oui. Et tu peux maintenant calculer, à posteriori, tes chances d'être effectivement enceinte connaissant aussi le résultat du test.
- Ah oui, je peux ??...
- Oui, par exemple, si le test est positif , on a

$$P(E \mid T^+) = \frac{P(E \text{ et } T^+)}{P(T^+)} = \frac{P(E) \times P(T^+ \mid E)}{P(E).P(T^+ \mid E) + P(\bar{E}).P(T^+ \mid \bar{E})}$$

- Attends, ça va un peu vite ...
- non, on divise les chances d'être enceinte et d'arriver à T^+ par celles de tous les chemins possibles qui mènent à T+, l'événement constaté. Ce qui donne 0,888 et, pour le test négatif 0,035.
- Mais dis, finalement, tout ça repose sur moi ! Deux chances sur cinq, c'est très subjectif, tu sais!
- Oui, c'est ce qu'on reproche justement aux "méthodes bayesiennes "..©

FILLES ou GARÇONS ?

Jouez dix parties par exemple..

PLUS DE FILLES QUE DE GARCONS ?

Premier enfant, un garçon !
Deuxième enfant, un garçon !!
Troisième enfant, un garçon !!!
Que pouvez-vous dire du quatrième ?
Un garçon ou une fille ?

Reprenons le problème à zéro

Vous (ou l'un de vos descendants) voulez avoir quatre enfants.

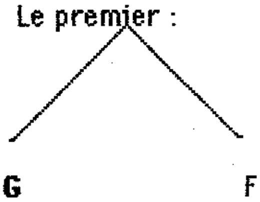
Combien de garçons? Combien de filles?

Avez-vous plus de chances d'avoir
- que des garçons (ou que des filles) ?
- deux garçons et deux filles ?
- trois garçons et une fille (ou l'inverse) ?

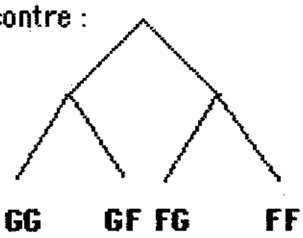
Suivant les pays et les époques il naît un petit peu plus de filles que de garçons . Mais imaginons qu'il y ait autant de garçons que de filles qui naissent chaque année .

A chaque naissance, une chance sur deux d'avoir un garçon ou une fille , pardon , une chance sur deux d'avoir un garçon, une chance sur deux d'avoir une fille (c'est ça la logique !).

Et deux enfants ? Le premier :



Pensez à la planche de Galton, une chance sur deux de passer à droite, une sur deux de passer à gauche.
Regardez l'arbre ci-contre :
Combien de chances d'avoir
deux garçons?
deux filles ?
un garçon et une fille ?



Revenons à nos quatre enfants.
Avec un arbre analogue, quels sont tous les cas possibles ? Quels sont tous les chemins possibles?

Combien de chances d'avoir quatre garçons ?

A-t-on plus de chances d'avoir deux garçons et deux filles ou trois garçons et une fille ? ou trois filles et un garçon? (Bien sûr, on ne tient pas compte de l'ordre des naissances).

Qu'en est-il pour une famille de trois enfants? Et de cinq, six, huit, douze, quinze enfants ???

LA LOI DES SERIES !!!

L'actualité raffole des événements en séries. Accidents en séries. Catastrophes en séries .....

Un événement plus rare et plus heureux est celui des naissances d'enfants du même sexe.

L'étude précédente vous permet déjà de savoir combien de chances vous avez d'avoir, ou de voir une famille de 7, 10, 13, ... enfants du même sexe.

Faites une simulation: lancez une pièce de monnaie vingt fois de suite. Si elle tombe sur face notez Fille, sinon, notez Garçon.

Regardez les vingt lancers consécutifs :
Combien y a-t-il de séries de filles? de garçons?
Sur ces vingt lancers combien y a-t-il de chances d'obtenir une série de 3, 4 enfants du même sexe?

Un tour à faire le jour anniversaire

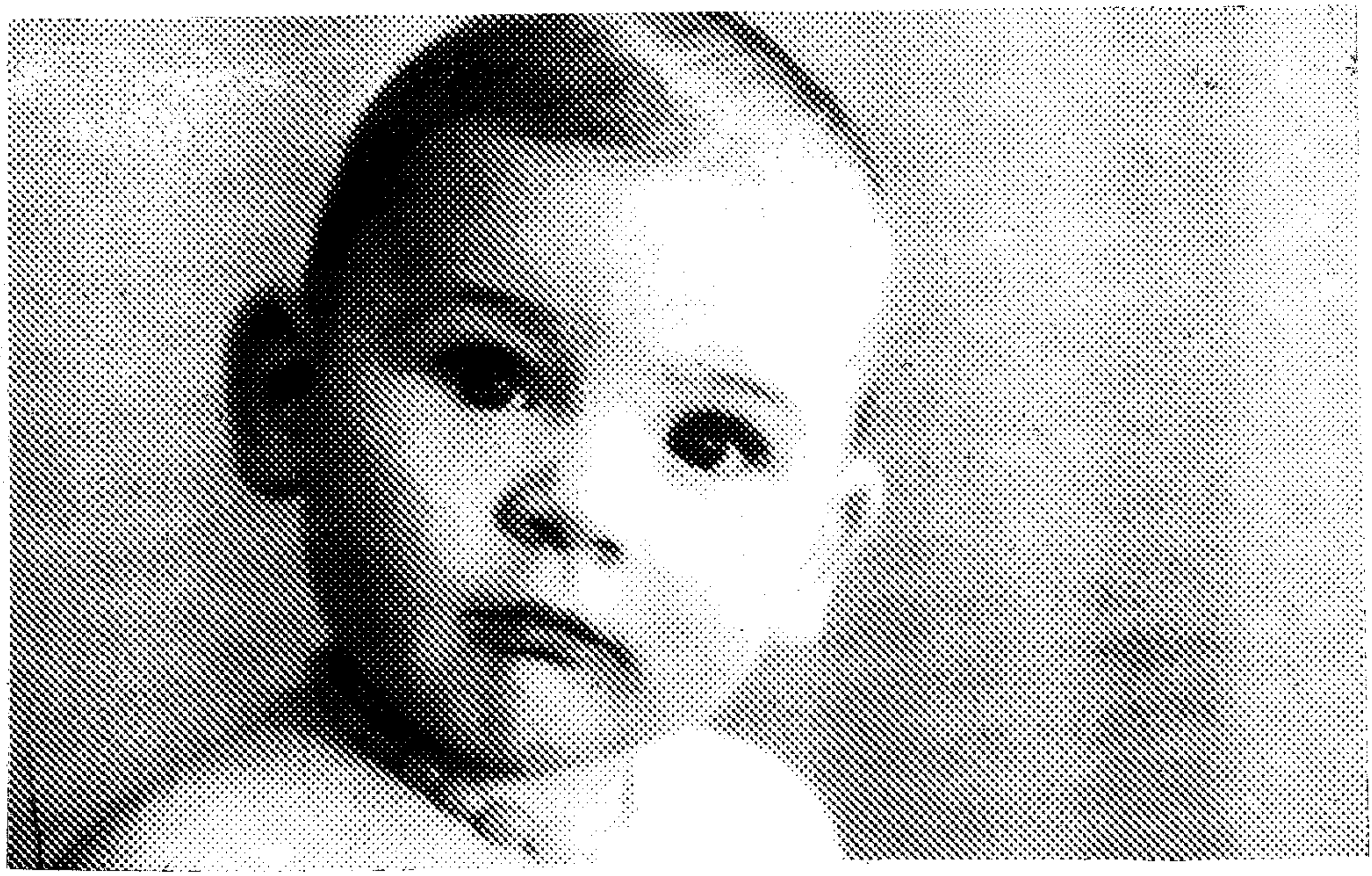
Il est né ! C'est un garçon ou une fille ? Peut importe ! Pour célébrer cet heureux événement vous organisez une fête qui réunit une trentaine d' amis.

Vous pouvez parier sans grands risques que dans l'assemblée il y a au moins une personne qui est née le même jour que votre enfant !

Prenons le problème dans l'autre sens.
Combien faut-il de personnes pour qu'il y ait au moins une chance sur deux qu'une d'entre elles soit née le même jour que votre enfant ? A votre avis ?

M. et Mme Emory Harrison dans le Tennessee, aux USA, avec leurs 13 fils. Il y a une chance sur 8192 pour que les 13 enfants soient tous des garçons.

LA OU IL Y A DES GENES...



Tel père, tel fils !!!

Le hasard fait-il bien les choses ou y sommes-nous pour quelque chose ?

Avez-vous la langue qui roule ?

Et vos enfants?

Cette capacité de pouvoir rouler sa langue est signe de la présence chez l'individu d'un gène dominant ou hybride. S'il ne peut pas, le gène est récessif. Il se transmet d'un individu à l'autre suivant la table ci-dessous qui donne la probabilité pour que, lors d'un croisement, une personne ait un enfant qui soit porteur ou non du gène :

	dominant	hybride	récessif
dominant	0,5	0,5	0
hybride	0,25	0,5	0,25
récessif	0	0,5	0,5

Dans la ligne i et la colonne j vous trouvez la probabilité pour qu'un individu de la classe i ait un enfant de la classe j. Cette probabilité dépend aussi du second partenaire que l'on ne connait pas ou plutôt dont on ignore la classe !

Ce sont les probabilités de transition appelées ainsi parce qu'elles donnent la probabilité de passage de la classe i à la classe j.

Appelons M cette matrice (de passage !).

A quoi correspond la matrice $M^2 = M \times M$?

Elle va vous donner, si vous acceptez de vous mettre dans la peau du premier individu, les chances pour que votre (ou vos) petit enfant soit de la classe 1, 2 ou 3.

Cela donne :

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0,375 & 0,5 & 0,125 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,125 & 0,5 & 0,375 \end{vmatrix}$$

Ceci étant calculé, que va-t-il se passer pour vos descendants, de génération en génération ? Quelle aura été votre influence sur la 17ème génération à venir? Rouleront-ils encore la langue ?

La chaîne de Markov !

Calculez M3, M4, ... , arrivé à M17, par exemple, vous trouverez :

$$\begin{bmatrix} 0,250001 & 0,5 & 0,249999 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,249999 & 0,5 & 0,250001 \end{bmatrix}$$

Et oui ! vous n'y serez plus pour grand chose ! Quelle que soient les origines des parents, à la longue, la répartition de tous les descendants sera du même type : un quart de dominants, un quart de récessifs et une moitié d'hybrides.

Non seulement on peut prévoir ce qu'il adviendra dans plusieurs générations mais, en plus, cela est indépendant des conditions initiales !

Un processus itératif qui présente de telles propriétés, à savoir qu'il ne dépend que des probabilités de transition, est appelé processus stochastique ou chaîne de Markov.

Les jeux de l'hérédité et du hasard

Les gènes sont portés par les chromosomes.
A chaque caractère correspond une paire de gènes, ces gènes sont portés par des chromosomes différents, l'un venant du père, l'autre de la mère.

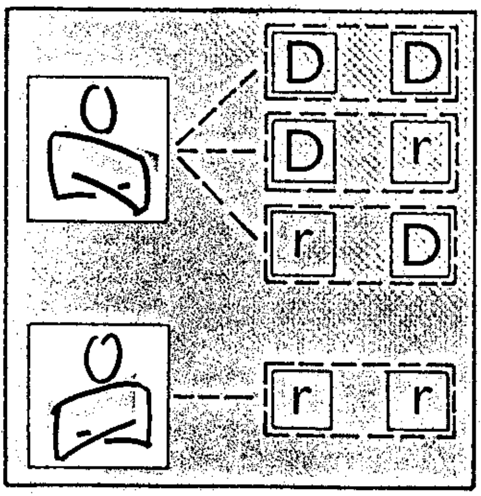
Ce sont les chromosomes homologues.

Vous pouvez identifier facilement certains de ces caractères comme la couleur des yeux, des cheveux, la taille, gaucher-droitier,...

En fait, la plupart de ces caractères sont déterminés par plusieurs paires de gènes.

Chaque cellule d'un organisme contient la totalité du **programme** de l'individu. Cependant, pour le fonctionnement de la cellule, seule la partie correspondant à sa spécialisation est exécutée.

Rôle des gènes dominants (D) et récessifs (r) dans la transmission d'un caractère :



Ce modèle markovien peut aussi être utilisé à rebrousse-poil.

C'est le problème actuel de la carte d'identité génétique. Connaissant une telle carte pour un individu, il est possible de remonter de génération en génération et retrouver ainsi des "filières" de population. C'est ce qui a été fait pour la première fois il y a quelques années en Argentine.

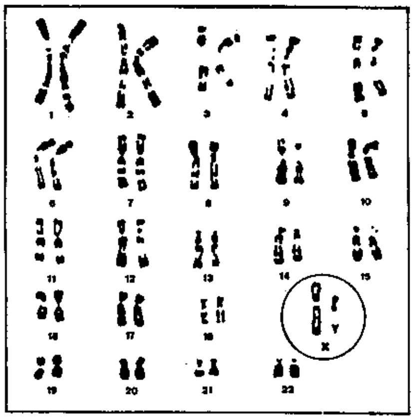
Connaissant la carte d'identité d'enfants dont les parents avaient disparu , connaissant celle de personnes qui recherchaient leurs enfants et petits enfants, on a pu, par ce type de recoupement, réunir enfants et grands-parents.

Cela n'est pas contradictoire avec la configuration d'équilibre que nous avons vue pour un gène.

En effet chaque caractère comme couleur des yeux, des cheveux, type de cheveux, gaucher-droitier, forme de l'oreille est aussi gouverné par des gènes et la multiplicité de ces caractères rend l'identification quasi certaine.

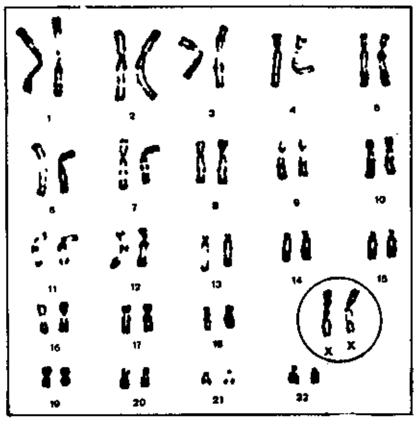
©

Les 23 chromosomes de l'homme



CARYOTYPE MASCULIN NORMAL.

et de la femme



CARYOTYPE FEMININ NORMAL.

Notez la 23ème paire, portant le caractère lié au sexe : **X – X** chez la femme, **X – Y** chez l'homme

CRIMES,
HASARDS
ET CHATIMENTS

VOICI, EN GUISE DE DIVERTISSEMENT,
UNE SERIE D'HISTOIRES NOIRES
QUI NE SONT PAS LA PAR HASARD !

A VOUS D'EN DEMELER
LES FILS MATHEMATIQUES

LES FICHES HOMICIDES D'ALFRED KOTCHIC

Aujourd'hui :

Le bon, la brute et le truand

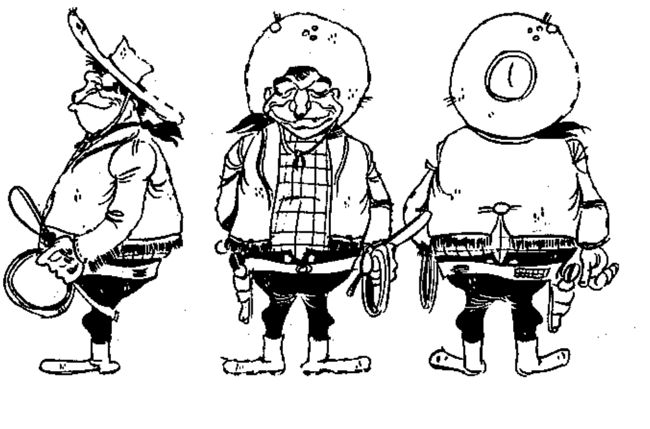
Duel au révolver dans les rues de PLOT-City.
Le bon, la brute et le truand s'affrontent dans un duel à mort où il n'y aura qu'un survivant...

Le bon atteint sa cible une fois sur trois, la brute deux fois sur trois et, bien sûr, le truand tue à tout coup ! Ils tirent... au sort... l'ordre de tir sachant qu'ils doivent tirer chacun leur tour.

Avant de jouer, qui a la meilleure chance de s'en sortir ? Le bon, la brute ou le truand ?

Et une fois l'ordre de tir fixé (par le hasard) ? Attention ! Il faut prendre en compte la meilleure stratégie de chacun.

Répondez d'abord intuitivement à ces questions puis faites appel à ....vos connaissances.



Comment tuer l'amant de sa femme ?

Résumé des années précédentes:

Juliette, mon épouse, a neuf ans de moins que moi et cinq amants !

Elle nous réunit tous pour nous annoncer la venue d'un septième homme !!

Nous refusons ce nouveau partage : égoïsme voire jalousie masqués par des raisons physico - psycho - ésotérico- mathématiques (voir encadré). De plus le nombre sept risque d'amener Juliette à s'ouvrir à de nouvelles explorations mys-tiques et peut-être à perdre le contact avec son propre corps physique.
Nous ne tolérons pas que Juliette puisse nous échapper. Nous cherchons une solution.

Six est un nombre parfait. Non ceci ne signifie pas que toutes ses facettes sont équiprobables mais, plus mathématiquement, qu'il est égal à la somme de ses diviseurs, sauf lui-même bien entendu. De plus, pour notre histoire, il s'accorde parfaitement avec le second nombre parfait, 28, qui correspond au cycle de la LUNE-FEMME! Euclide a montré que tout nombre parfait est de la forme $2^n.(2^{n+1}-1)$ si $2^{n+1}-1$ est premier. Ceci a peu de rapport avec notre histoire sauf si l'on dit que Juliette est unique (soit n=1).

Poids des atavismes et rôle du hasard.

Mes origines de moujik m'amènent à proposer à la docte assemblée l'usage de la roulette russe qui semble bien adaptée à la situation pour éliminer l'un d'entre nous. Rappelons qu'un revolver est nécessaire: le modèle Schmitt-Lefaucheux convient parfaitement car la rotation du barillet à six orifices est indépendante du nombre de balles introduites. Ce qui est fondamental si on veut être sérieux et régulier et laisser la même chance à chacun . Mais au fait , la même chance ??

La roulette russe:

Nous proposons d'introduire une seule balle dans le barillet. Chacun, à son tour, relance le barillet et appuie sur la gachette. S'il perd, la partie est finie pour lui , gagnée pour les autres. Quel est celui qui a le plus de "chance de perdre" ? le plus de chance de s'en sortir?

La roulette aux enchères:

Devant le scepticisme des autres, je propose une variante . Le premier joueur met une balle, lance le barillet et appuie sur la gachette. S'il s'en sort, il passe l'arme au second joueur qui met une seconde balle dans le barillet, relance et tire. S'il s'en sort à nouveau, il passe au troisième qui met une troisième balle, relance et tire . Et ainsi de suite ...

L'assemblée accepte ma proposition avec enthousiasme, d'autant plus que je me propose comme sixième homme, celui qui n'en réchappera pas si l'arme lui arrive. Pour les convaincre de me laisser la sixième place je fais remarquer que, malgré l'entente latente, je reste quand même le mari légitime, le premier et l'officiel!

Epilogue et nécessité de lire le PLOT

Le troisième joueur est l'heureux perdant. Au constat du cadavre étendu l'arme à la main et à l'écoute de nos témoignages, l'enquête médico-policière conclut normalement au suicide causé par une déprime passagère et un abus d'alcool. Est-ce bien légime ?

Catherine accueille son septième amant, et nous restons six !

Tout cela est-il mathématiquement bien moral ?

Nous vous proposons de chercher votre propre solution avant de lire la colonne suivante.

Solutions

Dans le premier jeu comme dans le second, le premier joueur a une chance sur six de perdre. Mais, ensuite, les joueurs n'ont plus les mêmes chances. Ainsi, le second joueur a cinq chances sur six d'obtenir l'arme et, dans le premier jeu une sur six de faire feu alors qu'elle est de deux sur six dans le second
Mettons cela en tableau :

Jeu 1	nombres	de	chances
joueur	d'avoir l'arme	de faire feu	de perdre
1	1	1/6	1/6
2	5/6	1/6	5/36
3	5/6-5/36	1/6	25/216
4	$25/36-25/6^3$	1/6	$125/6^4$
5	$125/6^3-125/6^4$	1/6	$625/6^5$
6	$625/6^4-625/6^5$	1/6	$3125/6^6$
7	$3125/6^5-3125/6^6$	1/6	....

Jeu 2	nombres	de	chances
joueur	d'avoir l'arme	de faire feu	de perdre
1	1	1/6	1/6
2	5/6	2/6	5/18
3	5/6-5/18	3/6	5/18
4	5/9-5/18	4/6	5/27
5	5/18-5/27	5/6	25/254
6	5/54-25/254	**6/6**	5/254

Je ne risquais pas grand chose en me proposant comme dernier joueur! Et je le savais!! Sans doute aurais-je dû en informer les autres ? Mais, à la réflexion, ils n'avaient qu'à lire le PLOT !!! Voilà une raison de plus pour ne pas oublier de penser à **vous abonner!!!!**

COUPABLE OU NON COUPABLE ??

<< Dieu ! >> soupire à part soi la plaintive Chimène,
<< qu'il est joli garçon l'assassin de Papa ! >>
(Georges Fourest, in "La négresse Blonde")

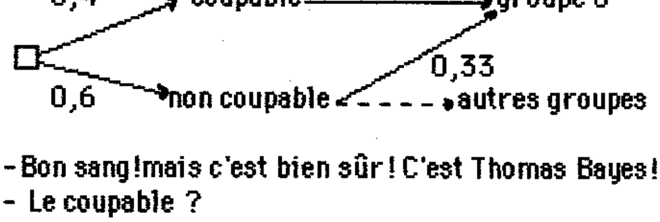
Rodrigue Dalton est arrêté; il est suspecté de meurtre. Le juge d'instruction, compte-tenu des informations qu'il possède et de son impression personnelle sur le suspect après la première audition, estime qu'il y a quarante chances sur cent pour que Rodrigue soit coupable.

L'enquête avance ...

- Salut Doc ! alors, vos conclusions ...
- Pas de doute, M'sieur Le Juge, le sang de l'assassin est du type **O** ; la victime en se défendant a dû le griffer et nous avons retrouvé , sous ses ongles, un peu de sang que nous avons pu analyser.
- Mais voilà qui est très intéressant! D'après la fiche signalétique, le suspect a justement du sang de type **O**... Voyons, cette information doit augmenter ses chances d'être coupable ... Mais de combien ?
- Attendez, répond le jeune docteur, frais et "moulu" des Universités (sic!). J'ai vu ça en première année de médecine. Pour une fois que ça peut servir. Vous cherchez, en fait, combien de chances il a d'être coupable sachant qu'il est du groupe **O**...
- Mais il faudrait connaître la proportion d'individus du groupe **O** dans la population.
- Je la connais !
- Pourquoi ne le disiez -vous pas ?
- Parce ce que vous ne me l'avez pas demandé !!
- Mais si, justement, je vous le demande ...
- **33 %.**
- Bon, voyons, pour avoir ce que l'on cherche, il suffit de diviser la probabilité d'être coupable et du groupe **O** par 33 % et le tour est joué !
- Ben, dites donc, Juge, vous n'avez pas l'air mais..
- Comment ça, j'ai pas l'air. Je vous signale que ma femme est abonnée au PLOT et, qu'au lieu de regarder les polars à la TV le soir, je le lis.
- Le PLOT ??
- Oui, parfaitement, le PLOT ! Mais n'interrompez pas tout le temps mon raisonnement! Probabilité d'être coupable et du groupe **O**, c'est le produit de la probabilité d'être du groupe **O** sachant qu'il est coupable ...
- C'est donc 100% puisque le coupable a forcément un sang de type **O**, ...d'après mes analyses...
- ...produit par la probabilité d'être coupable; je l'ai estimé à 40%

- Et bien, Doc, si mes calculs sont exacts cela fait : 100% multiplié par 0,4 et divisé par 0,33 Cela fait , euh, 1,20 !!
- ?? Ah non ! M'sieur Le Juge ! Sauf votre respect, je peux vous dire que le résultat doit toujours être compris entre 0 et 1 !! Je revois encore mon prof vociférant "Mettez-vous bien ça dans la tête !!", à la limite de l'apoplexie...
- Mais c'est bien vrai, ça ! Qu'est-ce-qui cloche??
- ... ??
- Ce qui ne va pas, c'est la proportion de ceux qui sont du type **O** . On devrait la chercher parmi ceux qui sont déjà suspects et où se trouve sûrement le coupable. Regardez alors le schéma suivant :

(le juge trace sur la sciure)



-Bon sang!mais c'est bien sûr! C'est Thomas Bayes!
- Le coupable ?
- Et non pas le coupable, le théorème !! Maintenant il n'y a plus qu'à calculer de nouveau :
0,4 par 1 plus 0,6 par 0,33 cela fait 0,6, il y a soixante chances sur cent pour que le suspect soit de type **O**. D'où 0,4 divisé par 0,6 que Rodrigue Dalton soit coupable. Deux chances sur trois au lieu de deux sur cinq à priori. Ça aide, le PLOT!!!
- Oui ... mais enfin ... quelque chose me gêne encore

- Quoi? Vous ? Le scientifique ...
- Justement. Dans votre schéma, votre 0,33, c'est le même que dans toute la population, coupables et non coupables ensemble...
- ... ???
- Et vous, vous traduisez : le suspect a 33% de chance d'être du groupe O sachant qu'il n'est pas coupable! Alors ? Coupable ou non coupable ?
- ??? ...
- Bon, ce que j'en dis moi .. C'est votre problème . Posez la question à votre femme puisqu'elle est abonnée à ce journal, PLOT vous avez dit ?

Allez, b'soir, Juge, à la prochaine ...

Va ,je ne te hais point.!

(Corneille, Le Cid)

Pour ceux qui aiment les formules

Appelons O l'évènement "être du groupe O",

C l'évènement "le suspect est coupable",

C|O "coupable sachant qu'il est du type O".

Dans le premier cas, le juge calcule ceci :

$$P(C|O) = \frac{P(C \text{ et } O)}{P(O)} = \frac{P(O|C) \times P(C)}{P(O)}$$

Dans le second , il calcule :

$$P(O) = P[(C \text{ et } O) \text{ ou } (\overline{C} \text{ et } O)]$$
$$= P(C)\times P(O|C) + P(\overline{C})\times P(O|\overline{C})$$

Autres scénarios possibles

■ Une digue vient d'être construite au bord d'un cours d'eau. Elle est capable de résister à des crues tant que le débit du cours d'eau reste inférieur à 10^9 m^3/s. Si le débit dépasse cette limite, les ingénieurs pensent qu'elle n'a qu'une chance sur deux de résister.

Une société agricole souhaiterait aménager des terres à l'abri de cette digue. Il faudrait être sûr, pour cela, qu'au cours des quarante années à venir, il y ait au plus une chance sur cent de rupture.

Or, par l'étude des débits observés depuis que les statistiques sont faites, on sait que le seuil de rupture a seize chances sur cent d'être dépassé au cours d'une période de quarante ans.

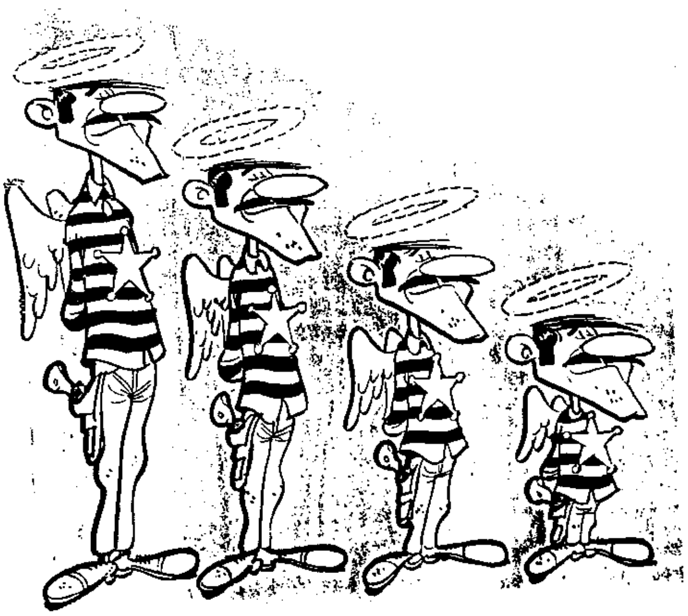
Que peut faire la société agricole ?

■ Un grand magasin s'équipe d'un système complexe d'alerte contre l'incendie. L'installateur assure qu'en cas d'incendie, l'alerte sera donnée avec 99% de certitude .

Mais il y a 7 chances sur mille pour qu'il y ait une fausse alerte.

La compagnie d'assurance, elle, pense qu'il y a une chance sur mille pour qu'un incendie ait lieu.

Si le système se déclenche, quelle chance y a-t-il pour que ce soit une fausse alerte?



Un intermède de TONTON LULU

LE TRAVAIL AU NOIR

Vous êtes salarié et, à ce titre, imposé sur le revenu: votre salaire vous place dans la tranche d'imposition au taux de 25%.

On vous propose, pour arrondir vos fin de mois un travail supplémentaire, cinq heures par semaines pendant six mois, payé 100 F de l'heure.

Pas uniquement sur votre bonne mine, on vous propose de ne pas déclarer ces revenus mais de vous donner 125 F de l'heure.

Que choisissez-vous comme solution ?

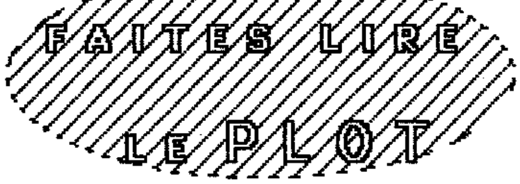
Vous avez dix chances sur cent de vous faire prendre. Dans ce cas vous payez une amende égale à la moitié de vos gains non déclarés plus un rappel d'impôts sur ces gains.

Choisissez-vous toujours la même solution ?

Vous refusez! On vous demande alors combien vous voulez, toujours payé au "noir" .

Quel prix choisiriez-vous suivant l'évolution des "chances" de vous faire prendre ?

Et si l'amende est cette fois égale aux gains illicites augmentée du rappel d'impôts , toujours égal à 25% ?



0655	8453	4467	3384	5320	0709	2523	9224	6271	2607
5255	5161	4889	7429	4647	4331	0010	8144	8638	0307
6314	8951	2335	0174	6993	6157	0063	6006	1736	3775
3157	9764	4862	5848	6919	3135	2837	9910	7791	8941
9052	9565	4635	0653	2254	5704	8865	2627	7959	3682
4105	4105	3187	4312	1596	9403	6859	7802	3180	4499
1437	2851	6727	5580	0368	4746	0604	7956	2304	8417
4064	4171	7013	4631	8288	4785	6560	8851	9928	2439
1037	5765	1562	9869	0756	5761	6346	5392	2986	2018
5718	8791	0754	2222	2013	0830	0927	0466	7526	6610
5127	2302	1392	4413	9651	8922	1023	6265	7877	4733
9401	2423	6301	2611	0650	0400	5998	1863	9182	9032
4064	5228	4153	2544	4125	9854	6380	6650	8567	5045
5458	1402	9849	9886	5579	4171	9844	0159	2260	1314
2461	3497	9785	5678	4471	2873	3724	8900	7852	5843
4320	4558	2545	4436	9265	6675	7989	5592	3759	3431
3466	8269	9926	7429	7516	1126	6345	4576	5059	7746
9313	7489	2464	2575	9284	1787	2391	4245	5618	0146
5179	8081	3361	0109	7730	6256	1303	6503	4081	4754
3010	5081	3300	9979	1970	6279	6307	7935	4977	0501
9519	9828	8740	6666	6692	5590	2455	3963	6463	1609
4242	3961	6247	4911	7264	0247	0583	7679	7942	2482
3585	9123	5014	6328	9659	1863	0532	6313	3199	7619
5950	3384	0276	4503	3333	8967	3382	3016	0639	2007
8462	3145	6582	8605	7300	6298	6673	6406	5951	7427
0456	0944	3058	2545	3756	2436	2408	4477	5707	5449
0672	1281	8697	5409	0653	5519	9720	0111	4745	7979
5163	9690	0413	3043	1014	0228	5460	2835	3294	3674
4995	9115	5273	1293	7894	9050	1378	2220	3756	9795
6751	6447	4991	6458	9307	3371	3243	2958	4738	3996

PPPPFPPFFFFPFPFFFPFFPPPPPFPPFFFPPFFPPFFFPPPFFPFPPFFFFPFPF
FFFFFPPFPPPPFFPPFFPFFPPPFFFPPFFPFFFPPFFP PFFPFFPPPFPFFPFPP
FFPPFFPPFFPPPFFFFPPPPFPFFPFFFPPFPFPFPFFPFPPFFFPPPFFFPFPPF
PPPPFFPFFPPFPFPFFFFPPPPFFPFPFPFFFFPPFFPFFPPPPFFFPFPFFFPFP
PFFFFFPPPPPFFPFPFFFFFFPFPFPFFFFPPPPFFFP PPPPFPPFFFFPFPFFF
FFFFPFPFPPPPPFFFFFPFPPFFFPFPFPFFFPFFFFFPFFFFFPPFPPPPFFPPF
PPPFFFFFFFPPFPFPFFFFFFPPFPFFFPFFPFPFFFFPFFPPFFPPFFPPPFFFF
PFFPFFPPPFPFFPFPPPFPFFFPPFPPFFFPPFPFPFFFPPPPFFPFFPPFPFPFF
PPPPFPPFFFFPFPFFFPFFPPPPPFPPFFFPPFFPPFFFPFFFFFPPPPPFFPFPF
FFPPFFPPFFPPPFFFFPPPPFPFFPFFFPPFPFPFPFFP FFFFPFPFPPPPPFFFF
PPPPFFPFFPPFPFPFFFFPPPPFFPFPFPFFFFPPFFPFPPPFFFFFFFPPFPFPF
FFFFPFPFPPPPPFFFFFPFPPFFFPFPFPFFFPFFFFFP PPPFFPFPPFFFFPFPF
PPPFFFFFFFPPFPFPFFFFFFPPFPFFFPFFPFPFFFFP FPPFFFPPPFFFPFPPF
PPPFFPFPPFFFFPFPFFPPPFFPFPPPFFPFPPFFPPPP PPPPFPPFFFFPFPFFF
PFFPFFPPPFPFFPFPPPFPFFFPPFPPFFFPPFPFPFFF FFFFFPPFPPPPFFPPF
FPPFFFPPPFFFFPFPPFPPPPFFFPFPFFFPPPFFPFFPF FFPPFFPPFFPPPFFFF
FPPPPFFFFPFPFFFPFPPPFPFFPFFFFPFFFPPPFPFFF PPPPFFPFFPPFPFPFF
PPPPFPPFFFFPFPFFFPFFPPPPPFPPFFFPPFFPPFFF FFFFPFPFPPPPPFFFF
FFFFFPPFPPPPFFPFFPFFPPPFFFPPFFPFFFPPFFP PPPFFFFFFFPPFPFPF
FFPPFFPPFFPPPFFFFPPPPFPFFPFFFPPFPFPFPFFP PPPFFFFFFFPPFPFPF
PPPPFFPFFPPFPFPFFFFPPPPFFPFPFPFFFFPPFFPF PPPFFPFPPFFFFPFPF
PFFFFFPPPPPFFPFPFFFFFFPFPFPFFFFPPPPFFFP PFFPFFPPPFPFFPFPP
FFFFPFPFPPPPPFFFFFPFPPFFFPFPFPFFFPFFFFFP FPPFFFPPPFFFPFPPF
PPPFFFFFFFPPFPFPFFFFFFPPFPFFFPFFPFPFFFFP FPPPPFFFPFPFFFPFP
FPPFFFPPPFFFFPFPPFPPPPFFFPFPFFFPPPFFPFFPFPFPP

S'agit-il des jets d'une pièce non truquée ?

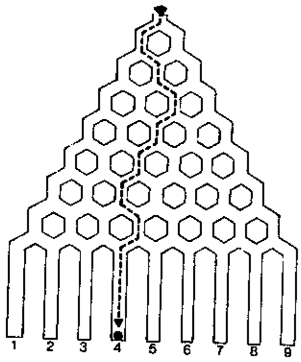
Cette page ne peut contenir aucune faute typographique , ... en dehors de cette ligne .

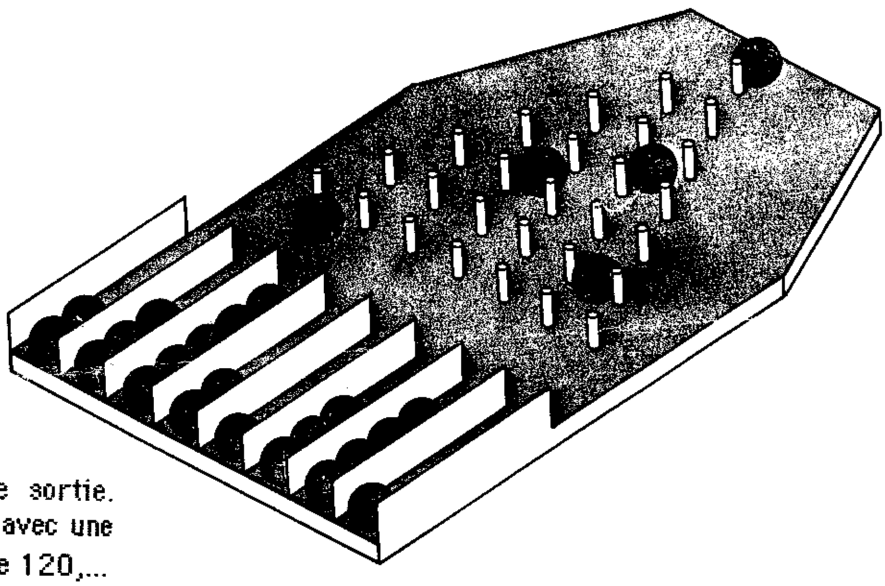
COURBES EN CLOCHE

Il existe plusieurs façons de réaliser un système aléatoire . La Planche de Galton est l'un de ces modèles qui peut être simulé, lui-même, facilement avec une calculatrice ou un micro-ordinateur. Ce matériel permet, comme nous allons le voir, de faire manipuler calculs, pourcentages, proportionnalité ...bien avant de parler de probabilité. Et, pour conclure , vous verrez comment un automate peut générer des courbes de Gauss !!

GALTON ' S CONNECTION :

Un système à deux états





Choisis une sortie au bas du labyrinthe.
Trouve un chemin qui aboutit à cette sortie. Remarque que tu peux te déplacer comme avec une tortue: AVance,GAuche 120, AVance, DRoite 120,... Trouve un autre chemin débouchant sur la même sortie. Fais la même chose avec les autres sorties.

Une expérience aléatoire

Pour faire cette expérience, il est préférable d'être deux. Il s'agit de simuler la descente d'une bille dans le labyrinthe appelé Planche de Galton.

Il faut choisir, au hasard, la direction à prendre à chaque carrefour:

Avec ta calculette, tire, au hasard, un nombre entier entre 0 et 9. S'il est pair, tourne la tortue à Gauche (à droite pour toi si tu regardes la feuille), s'il est impair, tourne-la à Droite et descends d'un pas. Refais l'opération six foix, où arrives-tu ?

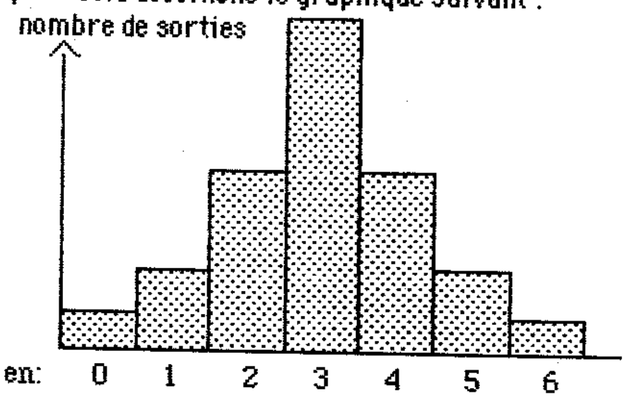
Recommence l'expérience autant de fois qu'il faut pour répondre aux questions qui suivent.

Pour t'aider, reporte tes résultats dans un tableau comme celui-ci :

Sorties	chemins suivis	nombres	total
0			
1			
2			
3	DGGGD,...		
4			
5			
6			

Après tes expériences, peux-tu dire :
- Quelle est la sortie qui est la plus fréquentée ?
  Peux-tu en donner la raison ?
- Quelle est celle qui est la moins fréquentée ?

Rassemblons les résultats de toute la classe, pour cela dessinons le graphique suivant :



Compare cet ensemble de résultats à tes premiers résultats. Y a-t-il des différences ? Pour pouvoir mieux comparer, tu peux calculer les moyennes ou, mieux, les pourcentages d'apparition de la bille à chaque sortie.

Le triangle de Pascal

Regardez le labyrinthe ci-contre. Codez les carrefours, en commençant en haut, par A,B,C,....

Combien vousfaut-il de lettres ?

Partez d'en haut et suivez le chemin G D G D G .

A quel carrefour arrivez-vous ?

Désignez ce carrefour par (GDGDG) et cherchez tous les autres chemins y conduisant, en partant toujours du haut.

Combien avez-vous trouvé de chemins?

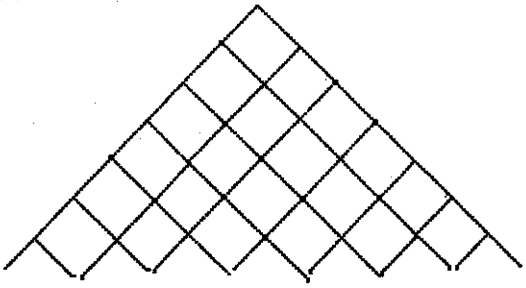
Notez ce nombre à coté de la lettre du carrefour. Refaites le même travail pour tous les autres carrefours et, aussi, les sept sorties.

Supposez que l'on ajoute ..

une nouvelle rangée de carrefours !

Voyez-vous un moyen de connaître rapidement le nombre de chemins différents arrivant à chaque nouvelle sortie ?

Recopiez ces nouveaux nombres ainsi que les précédents dans le tableau 2 :



Pouvez-vous continuer à remplir ce tableau ?

Ce tableau de nombres est appelé **triangle de Pascal**. C'est lui qui, au XVIIè inventa cette disposition du triangle pointe en haut. La méthode de calcul, qui sert dans de nombreux domaines des mathématiques comme l'algèbre, était déjà connue en Chine et en Islam bien avant.

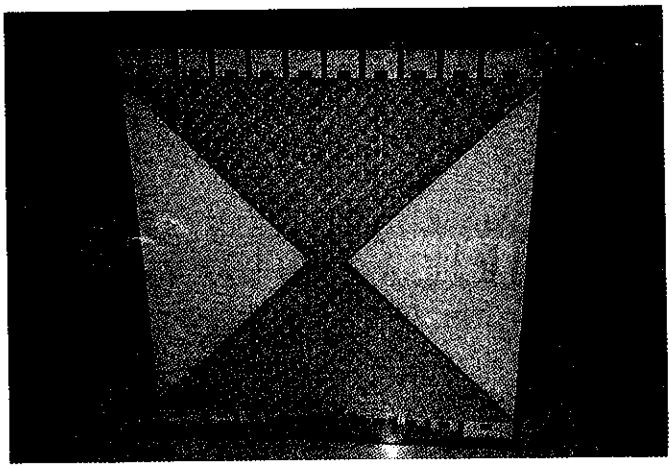
Théorie et pratique.

Reprenons les chemins sur la planche de Galton. Imaginons qu'à chaque carrefour, le choix gauche-droite se fasse en lançant une pièce de monnaie. Voyez-vous pourquoi il y a si peu de chemins conduisant aux sorties extérieures ?

Pour les six rangées de carrefour du début, calculez le nombre total de chemins différents conduisant aux différentes sorties (1+5+...+...). Trouvez-vous 64 ? Ainsi un seul chemin sur 64 conduit à la sortie 0 ou à la sortie 6. Un sur 64 ! Pour chaque sortie, divisez le nombre de chemins par 64. Le résultat est le pourcentage **théorique** de chemins aboutissant à chaque sortie.

Ainsi en 1, il y a 5 chemins sur 64 qui arrivent.

Comparez ce résultat à votre expérience. Dessinez un graphique des résultats théoriques et comparez-le au graphique des résultats expérimentaux. Que pouvez-vous en conclure ?



Retour à la calculette.

Reprenez le codage GDG... obtenu à partir des **entiers pairs ou impairs** tirés au hasard .

Un nombre est pair s'il est divisible par 2 ou encore, si son reste dans la division par 2 est égal à zéro (et à un pour un nombre impair).

Reprenez le codage des chemins et remplaçons G par 1 et D par 0. Codez ainsi tous les chemins qui mènent à 2, à 4, à 1, à 5, ...

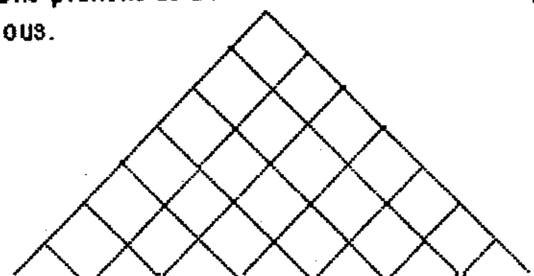
Que remarquez-vous ?

Pour chaque chemin, faites la somme des codes de chaque virage. Comparez au code de la sortie.

Il ne vous reste plus qu'à inventer un petit programme vous permettant ainsi de simuler avec une calculatrice, ou simplement une table de nombres aléatoires, une planche de Galton avec le nombre de rangées que vous voulez.

Jouez à la loterie de Galton.

Une planche de Galton est faites de six rangées de clous.



60 - 10 - 4 - 3 - 4 - 10 - 60

Dans les sept cases de sortie sont placés des **lots** en francs. **Vous misez un franc** sur la case de votre choix . Rien ne va plus! La bille descend. Si elle arrive dans votre case, vous emportez le lot et vous reprenez votre mise. Sinon, je garde tout!

Sur quelle case avez-vous intérêt à jouer ?

Si vous jouez une fois ? dix fois ? mille fois ?

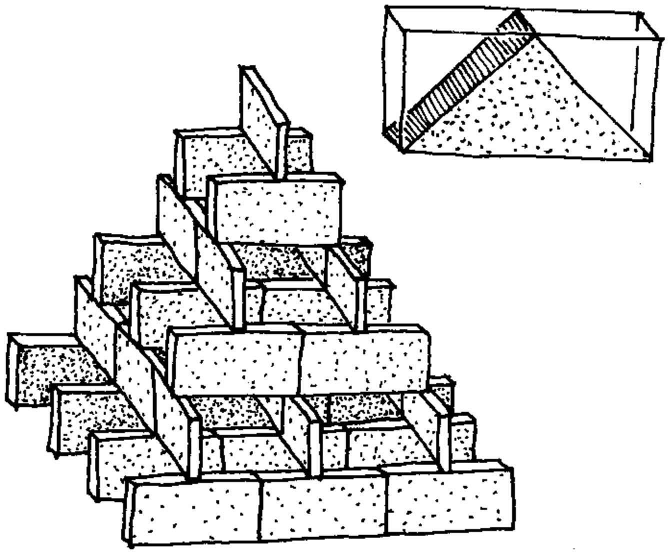
Ce jeu est-il plus intéressant pour moi ?

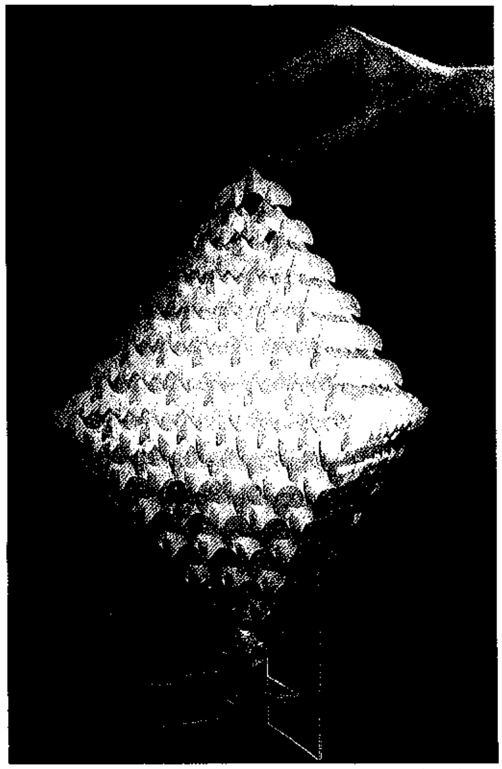
Et si l'on changeait les lots ? Que mettriez-vous ?

Et dans tous les cas, quelle somme dois-je avoir en **stock** pour ne pas être pris au dépourvu, si vous jouez, par exemple, dix parties ? ■

L'ALEASCOPE DE RAOUL RABA

La planche de Galton est une simulation de chutes de billes dans un plan.
Il est possible d'imaginer une telle expérience dans un espace à trois dimensions. Voici un octaèdre, créé par Raoul Raba, qui réalise une telle simulation et fournit des surfaces en forme de cloche !





Du haut de cette pyramide...

La figure montre une pyramide constituée de dominos placés sur leur champ . Chaque niveau est formé de dominos alignés parallèlement. Les alignements superposés se croisent à angle droit. Les niveaux successifs de dominos parallèles, placés aux milieux des arêtes des dominos précédents, sont décalés en quinconce.

Imaginez maintenant qu'il y ait, dans l'épaisseur de chaque domino, deux toboggans symétriques qui descendent en sens opposés pour rejoindre les toboggans des dominos des étages inférieurs. Une bille tombant sur l'arête centrale, roule au hasard d'un coté ou de l'autre.

Faites tomber une bille dans le domino supérieur de la pyramide. Elle va descendre, d'étage en étage, jusqu'au pied de la pyramide, changeant à chaque étage de direction. C'est ce qui différencie cet appareil de la planche de Galton.

L'aléascope correspond à deux ensembles constitués chacun de plusieurs planches de Galton parallèles ou entrecroisées perpendiculairement deux à deux. Il s'agit donc d'une structure en volume conduisant à un développement arithmétique tridimensionnel du triangle de Pascal.

Du pied de cette pyramide ...

Dans un tel appareil, il est facile d'observer l'arrivée des billes si elles débouchent à l'extérieur; mais l'observation est plus difficile si elles arrivent dans la partie centrale. On résoud ce problème en donnant à l'aléascope la forme d'un octaèdre reposant verticalement sur un sommet.

Pour cela on accole deux pyramides par leurs bases et les arrivées des toboggans se distribuent naturellement sur les faces inférieures de l'octaèdre où l'on peut facilement observer l'apparition des billes.

Reste que le cheminement des billes à travers la pyramide renversée modifie le nombre des chemins conduisant à la "sortie". Nous vous laissons apprécier les effets de ce changement.

Notez que, pour l'aléascope dont nous vous proposons le modèle et qui forme un octaèdre à 26 étages, il y a près d'un million de chemins différents pour aller du sommet supérieur au sommet inférieur. Il n'y a qu'un seul chemin pour aller du sommet supérieur à l'un des sommets latéraux.

Structure de l'aléascope

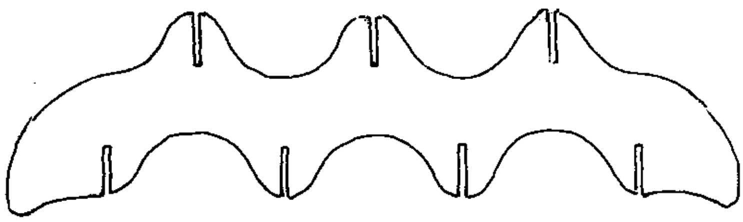
Les tables qui suivent donnent, niveau par niveau, le nombre des chemins différents conduisant à chaque bifurcation.

A ces tableaux de nombres correspond une répartition suivant une surface en cloche indiquant les probabilités d'apparition de chaque bille à la sortie de chacun des toboggans formant le pied de la pyramide.

Pouvez-vous trouver la **"formule du trinôme"** donnant le nombre de chemins dans le cas général ?

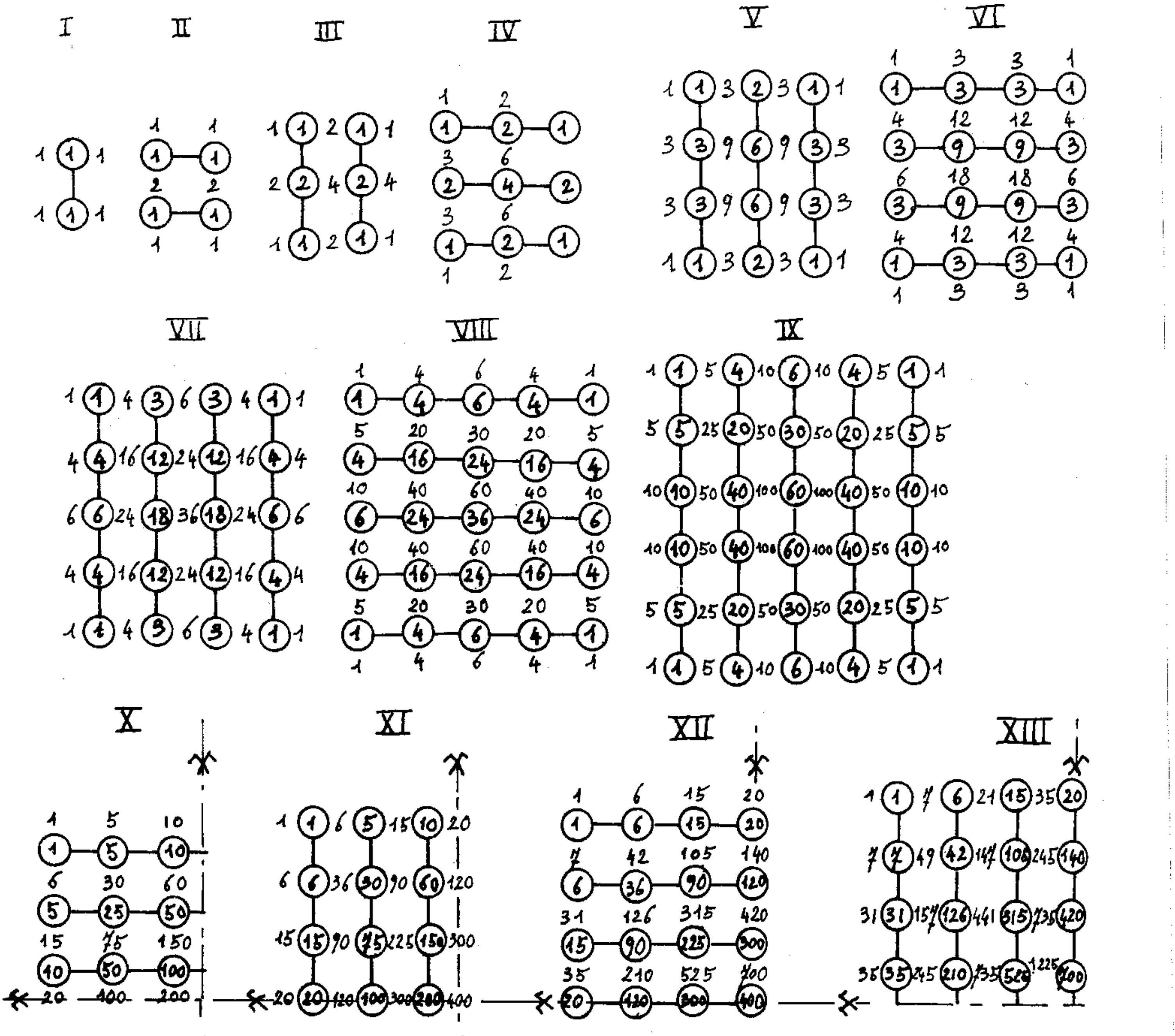
Matériel Plot-Aléatoire

Plan, en réduction, des barrettes en carton qui seront fournies pour réaliser l'aléascope de votre choix !



Tables des chemins pour une pyramide à treize niveaux

(les nombres non cerclés correspondent à l'étage inférieur qui suit).



Pour les 4 derniers niveaux , grâce aux symétries de l'octaèdre, seul le quart de l'étage est montré.

AUTOMATES ET ENSEIGNEMENT

Jean Claude Herz - Paris

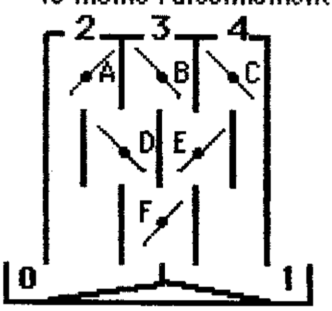
Non, il ne s'agit pas d'une provocation vis-à-vis de l'enseignement, mais d'une réflexion sur la Théorie des Automates. Actuellement enseignée uniquement à l'Université au niveau des spécialisations, elle peut être présentée dès l'enseignement secondaire et même avant.

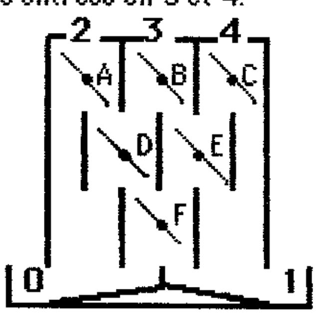
On peut, pour cela, faire manipuler de petits jouets mécaniques comme le "Think a Dot" ou "l'Automate de Galton" à portillons de Raoul Raba.

Ces matériels permettent une bonne concrétisation des automates et des notions mathématiques comme applications, ensembles d'entrée et de sortie

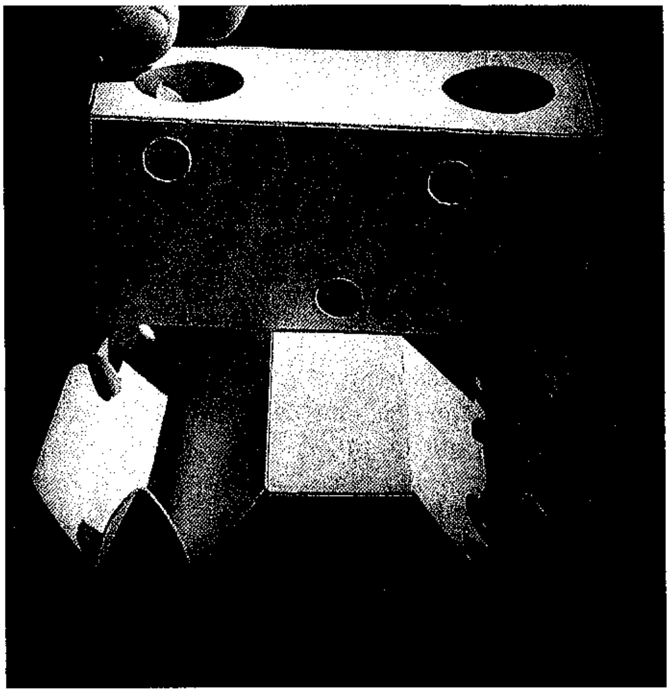
Le "Think a Dot"

Je ne connais rien de plus commode pour débuter une présentation de la théorie des automates, à quelque niveau que ce soit, que ce petit jouet. On peut le schématiser par une machine à trois entrées et deux sorties possibles. Le mécanisme est constitué par des boîtes empilées en quinconce, contenant chacune un portillon. Chaque portillon dirige la bille vers la gauche ou vers la droite et bascule dans l'autre position. Ainsi, si le mécanisme est initialement dans la position de la figure 1, et si la bille entre en 2, elle bascule A et sort en 0; si une deuxième bille entre maintenant encore en 2, elle remet A dans sa position initiale puis bascule D et F et sort encore en 0; une troisième bille entrant en 2 sortira encore en 0. Quelle est la première bille entrant en 2 qui sortira enfin en 1? (réponse, la sixième). Faites le même raisonnement pour des entrées en 3 et 4.





Nous trouvons là les cinq composantes de tout automate fini: un ensemble de stimuli ou signaux d'**entrée**, appelé aussi alphabet d'entrée, ici {2,3,4}; un ensemble de réponses ou signaux de **sortie**, appelé aussi alphabet de sortie, ici {0,1}; un ensemble d'**états** internes, 64 ici; une **fonction de réponse** qui, à une entrée et un état, fait correspondre une réponse (sortie en 0 ou 1); une **fonction de transition** qui, à un état interne et une entrée, fait correspondre un nouvel état.



Les fonctions de réponse et de transition.

Ces deux fonctions peuvent être entièrement déterminées dans le cas du Think a Dot puisqu'il y a 3 entrées et 64 états possibles, il y a donc 192 couples à trouver pour définir le graphe de chaque fonction. La connaissance de ces deux fonctions permet de se livrer à des exercices variés: trouver la suite de réponses provoquées par une suite donnée d'entrées ou stimuli à partir d'un état donné; trouver une suite d'entrées provoquant une suite donnée de réponses ; trouver une suite d'entrées faisant passer d'un état donné à un état donné (l'ensemble des solutions de ce dernier problème est appelé **ensemble régulier** et joue un grand rôle dans la théorie des automates).

Un problème plus conséquent :

La réduction de l'automate

Il s'agit de trouver un automate qui réagisse de la même façon et possède moins d'états.

Cela revient à classer les états sachant que deux états sont équivalents si quelle que soit l'entrée choisie, ils donnent la même réponse et le même nouvel état. L'automate réduit a alors comme états les classes de cette relation d'équivalence.

Cette réduction est impossible pour notre automate à 64 états, comme nous le verrons plus loin. Mais on peut le considérer lui-même comme une réduction de l'automate constitué des six portillons précédents auxquels on ajoute deux autres portillons placés de chaque coté de F, à la verticale de A et C. On voit que ces portillons sont actionnés par la bille lorsqu'elle ne passe pas par F, mais qu'ils n'influent pas sur son coté de sortie. L'automate à 256 états, constitué par les huit portillons, peut être réduit au précédent.

L'automate "boîte noire"

La position de chaque portillon est apparente sur la face avant du jouet. On peut facilement "remettre à zéro" l'appareil en le penchant vers la droite; les portillons se retrouvent tous alors dans la position gauche. Cela facilite **l'étude expérimentale** dont je vais parler maintenant.

Supposons que la face avant de l'appareil soit opaque et qu'on ignore tout du mécanisme interne. C'est alors une "boîte noire". Il est cependant possible, par la seule observation du **comportement extérieur** de l'automate, de reconstituer ses composantes inconnues : états et fonctions de réponse et de transition.

Toutes nos expériences commencent par la

remise à zéro de l'appareil

Nous choisissons une suite d'entrées en disposant la bille dans tel ou tel trou, et nous notons la suite de réponses obtenues, c'est-à-dire la suite des trous par lesquels la bille est ressortie. Sauf incident technique, deux suites identiques d'entrées donneront toujours deux suites identiques de réponses : l'automate est **déterministe** .

En d'autres termes, l'automate nous définit une nouvelle application de l'ensemble des suites d'entrées dans l'ensemble des suites de réponses.

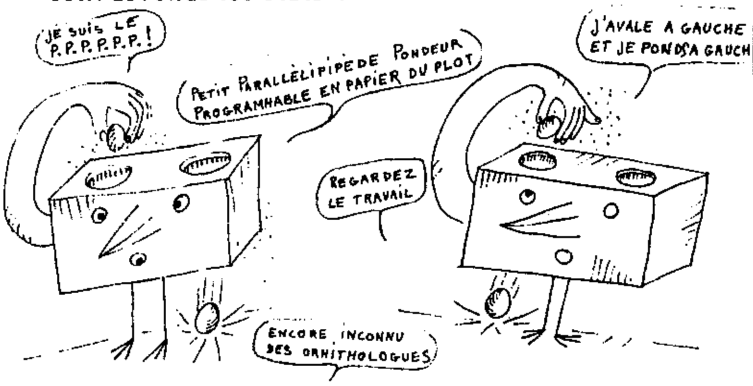
Nous ne parlerons pas ici, bien que ce numéro spécial pourrait s'y prêter, **des automates probabilistes**. Il faudrait un autre numéro spécial . Demandez-le à l'équipe du PLOT ! Pour le moment contentez-vous de savoir qu'il suffit de transformer la fonction de transition par une fonction de probabilité pour avoir de tels automates.

Devinez comment je marche !

C'est de la connaissance de cette application que nous pouvons déduire les composantes internes de la boîte noire. Bien entendu, la connaissance de cette application sera toujours incomplète dans la mesure où l'ensemble des suites d'entrées est un ensemble infini (bien que visiblement dénombrable) et où le jouet est notre seul outil de calcul. Nous ne pouvons que **raisonner** sur des restrictions de l'application comme nous raisonnons sur l'application ($x \longmapsto 2x$) dans IN. Nous pouvons cependant **calculer** n'importe quel élément du graphe de l'application, c'est une question de patience.

Par ce moyen, par exemple :
(3) donne (0),
(2,2,4) donne (0,0,0),
(3,4,4,2) donne (0,0,1,0).

Comme nous l'avons vu sur la figure 1, en remettant l'automate à zéro (tous les portillons à gauche) les trois entrées donnent 0 en sortie. Que sont devenus les états ?



Ainsi, désignons par q_4 l'état obtenu à partir de l'état initial q_1 et de l'entrée 4. Nous ignorons parfaitement, à priori, si q_4 diffère ou non de q_1. La connaissance de l'application "boîte noire" va nous permettre de trancher. En effet, puisque (4,4) donne (0,1) c'est que l'état q_4 et l'entrée 4 provoquent la réponse 1. Or l'état q_1 et l'entrée 4 donnent la réponse 0, q_1 et q_4 sont nécessairement différents.

Désignons par q_3 l'état obtenu à partir de l'état initial et de l'entrée 3. Là encore q_3 et q_4 diffèrent car (3,4) donne (0,0) alors que (4,4) donne (0,1). Vous pouvez de même déduire que q_3 et q_1 diffèrent sachant que (3,3) donne (0,0,) alors que (3,3,3) donne (0,0,1). De manière analogue vous pouvez vérifier que q_2 diffère à la fois de q_1, q_3 et q_4.

Le procédé de démonstration se résume à ceci:
Pour montrer que deux suites d'entrées font passer de l'état initial à deux états différents, il suffit de trouver une troisième suite non vide qui, précédée de chacune des suites précédentes donne des suites de réponses qui diffèrent par leur dernier élément.

La recherche peut être longue.

Ainsi, pour les suites (4) et (4,4), aucune des 39 suites de un, deux ou trois éléments ne permet de distinguer les deux états résultants; vérifiez que l'on y arrive avec la suite (3,3,3,4).

De même, avec (2,3) et (3,2), l'expérience ne donne aucun résultat, et pour cause ! Connaissant l'appareil, nous savons qu'il s'agit du même état (CEF). Si nous l'ignorons, la vanité de nos efforts de discrimination nous amène à formuler **l'hypothèse** de l'identité des deux états.

Approche expérimentale et approche pédagogique

Ici apparaît une nouvelle vertu de notre automate : il illustre de façon particulièrement claire la méthodologie de **l'approche expérimentale** : derrière la complexité de l'Univers, comment découvrir le mécanisme simple que "le Grand Architecte" y a mis? Dans notre lutte contre le cloisonnement des disciplines, voilà une arme à ne pas négliger.

Maintenant, comment conduire intelligemment nos expériences? Cette question peut être intéressante à traiter avec les élèves. En voici ici quelques éléments :
La méthode la plus simpliste consiste à calculer les suites de réponses successives en rangeant les valeurs de la variable dans **l'ordre lexicographique**:

(2),(3),(4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2), ...,(4,3),(4,4),(2,2,2),(2,2,3),......

autrement dit dans l'ordre naturel des nombres en écriture décimale obtenue par suppression des parenthèses et virgules :

2, 3, 4, 22, 23, 24, 32,......
43, 44, 222, 223,.......

Mais l'expérience 234 contient les expériences 2 et 23, d'où un gaspillage de temps. D'un autre côté, si on décide de faire toutes les expériences de, disons, cinq entrées, ce qui donne automatiquement le résultat de toutes les expériences plus courtes.

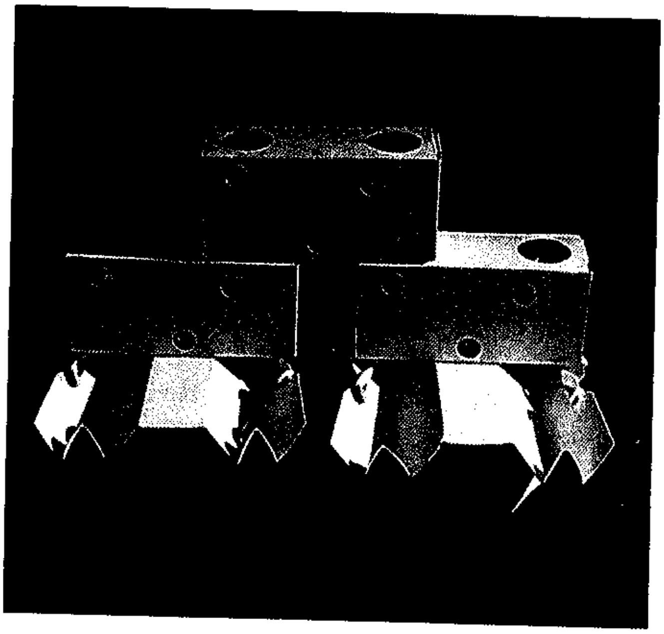
Si on désire ensuite poursuivre la recherche plus loin, on est obligé de recommencer à zéro (sauf naturellement si on possède un très grand nombre d'exemplaires du jouet, ce que je n'ai pas supposé jusqu'ici).

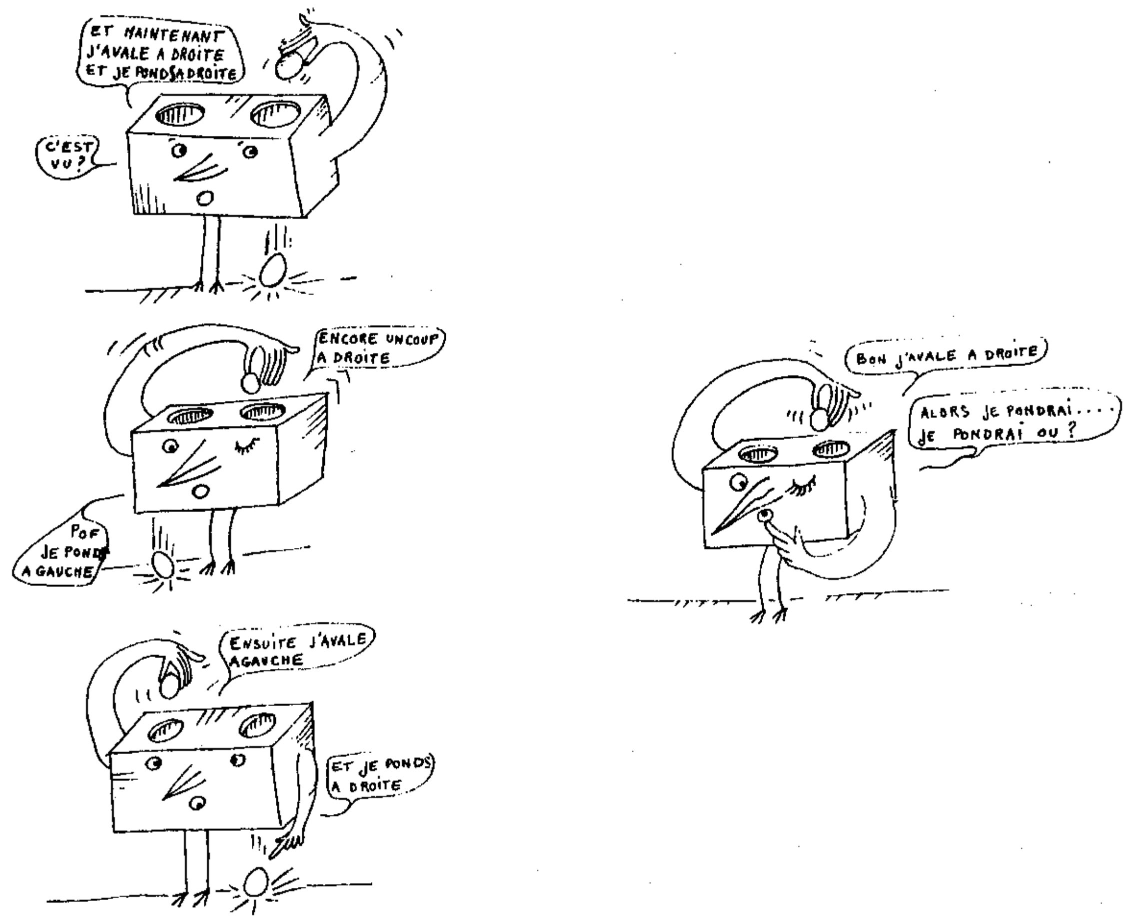
Une méthode plus conforme à la démarche ordinaire du chercheur consisterait à essayer d'obtenir le plus rapidement possible des résultats positifs (discrimination d'états) ou de faire en priorité les expériences propres à étayer une hypothèse suggérée par un résultat négatif.

Les automates jumeaux.

La faculté de remettre à zéro le jouet (ou, ce qui revient au même, la possibilité de disposer de plusieurs exemplaires) est évidemment précieuse et on conçoit le prix qu'attachent les biologistes aux observations des jumeaux homozygotes (les termes stimulus-réponse ont d'ailleurs pour origine l'étude des organismes vivants, en particulier des cellules nerveuses).
Cependant, elle n'est pas strictement indispensable; je laisse au lecteur le plaisir de concevoir une expérience unique qui, poussée suffisamment loin, permettrait de faire apparaître les 64 états du Think a Dot.

Il va sans dire que faire tomber quelques millions de billes dans un trou prend du temps. On peut avantageusement substituer à ce moyen honnête, mais lent, une "simulation" sur ordinateur.





Qu'est-ce qu'un automate fini pour un mathématicien ?

Partons de la définition d'un automate comme quintuplet **(S,R,Q,f,g)** où **S** désigne l'ensemble des stimuli, **R** l'ensemble des réponses, **Q** l'ensemble des états, **f** et **g** les fonctions de réponse et transition.

Nous avons introduit une application f^* de l'ensemble des suites d'entrées dans l'ensemble des suites de réponses. f^* a la propriété de conserver **la longueur** : à une suite de <u>n</u> stimuli elle associe une suite de <u>n</u> réponses; de plus , f^* conserve la relation "sous-suite initiale de ": $f^*(ab)$ commence par $f^*(a)$. Inversement, à partir d'un triplet **(S,R,**f^***)** nous pouvons définir un ensemble **Q** et deux applications **f** et **g** . **Q** est le quotient de l'ensemble des suites d'entrées, S^*, par l'"équivalence : deux suites a et b sont équivalentes si , pour toute suite c, les sous-suites terminales, extraites de $f^*(ac)$ et de $f^*(bc)$ et ayant la longueur de la suite c, sont égales . Cette équivalence correspond exactement à la règle de discrimination des états donnée plus haut.

L'application g^* de $S^* \times S$ dans S^* définie par $g^*(a,s) = as$ est compatible avec l'équivalence précédente : si a est équivalent à b alors $g^*(a,s) = g^*(b,s)$. En passant au quotient, on obtient une application **g** de **Q**x**S** dans **Q**.

L'application de $S^* \times S$ dans **R** qui à (a,s) associe le dernier terme de $f^*(as)$ est aussi compatible avec la même équivalence. En passant au quotient, on obtient une application **f** de **Q**x**S** dans **Q**.

Nous avons ainsi construit le quintuplet **(S,R,Q,f,g)** à partir du triplet **(S,R,**f^***)**. Il est facile de vérifier que la construction inverse redonne bien la même application f^*.

Il est donc possible de fonder la théorie des automates sur la définition par le triplet **(S,R,**f^***)** où **S** et **R** sont deux ensembles **finis** et f^* une application de l'ensemble des suites d'entrées S^* dans l'ensemble des suites de réponses R^* qui conserve la longueur et la relation "sous-suite initiale de ". Cependant, pour avoir des automates **finis**, il est nécessaire de poser en axiome que le quotient de S^* par la relation d'équivalence est fini.

On peut remarquer que l'automate défini en prenant pour **Q** le quotient de S^* par l'équivalence est nécessairement **irréductible**. Dans le cas de notre jouet, comme l'expérience permet de différencier 64 états, on établit ainsi la propriété d'irréductibilité annoncée plus haut.

Un exemple pour l'école primaire.

Voici un autre exemple d'automate "vivant" proposé naguère par Marcel Dumont pour illustrer les groupes booléens.

Dans ce jeu, la variable est la position du bras droit, qui peut être - levé ou baissé - plié ou tendu - main ouverte ou fermée - ce qui donne huit positions possibles.

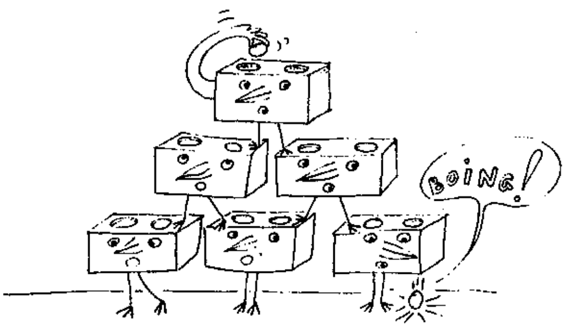
A partir d'une position quelconque, le commandement "épaule" change la première composante, le commandement "coude", la deuxième, le commandement "main" la troisième. Je passe sur les interprétations géométriques et algébriques de cette règle pour dégager l'interprétation par la théorie des automates .

Ici, l'automate est "transparent": on peut considérer qu'états et réponses coïncident , de même que fonctions de réponse et de transition. Il est donc décrit entièrement par la donnée des entrées, des états et de la fonction de transition selon le tableau suivant :

fonction	épaule	coude	main
L P O........	B P O.......	L T O	L P F
L P F	B P F	L T F	L P O
L T O	B T O	L P O	L T F
L T F	B T F	L P F	L T O
B P O	L P O	B T O	B P F
B P F	L P F	B T F	B P O
B T O	L T O	B P O	B T F
B T F	L T F	B P F	B T O

Ce codage peut aussi être disposé selon un diagramme en forme de cube .

On pourrait rendre l'automate "opaque" en dissimulant la position du bras et en demandant à son propriétaire d'émettre un signal sonore déterminé par l'état antérieur et le commandement reçu selon une règle plus ou moins arbitraire. En faisant varier ensemble de réponse et fonction de transition, on aurait une mine d'exercices.



L'illustre compagnie des P.P.P.P.P.P. en représentation de gala*

** Petits Parallélipipèdes Pondeurs Programmables en Papier du Plot*

Petite bibliographie .

Les propriétés mathématiques du Think a Dot sont développées dans deux articles :

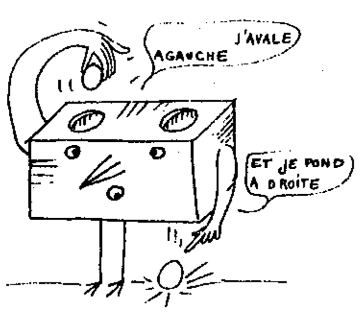
- S. Kravitz: additional theory of Think-A-Dot in Journal of Recreational Mathematics, vol.1, p. 247-250, 1968.
- B.L. Schwartz : Mathematical theory of Think-A-Dot in Mathematics Magazine, vol.40, p. 187-193, 1967.
- et, bien sûr, dans la collection de P.A., Petit Archimède n° 9 à 20 (une bonne raison pour les réouvrir ou acheter la collection)

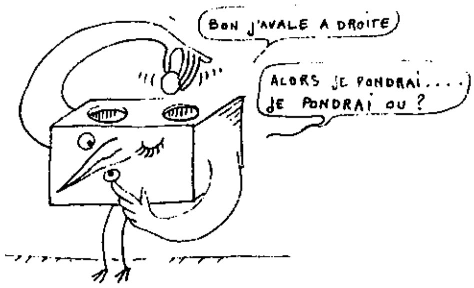
Pour le lecteur qui désire approfondir le sujet : des livres qui ne supposent aucune connaissance spéciale en mathématiques:

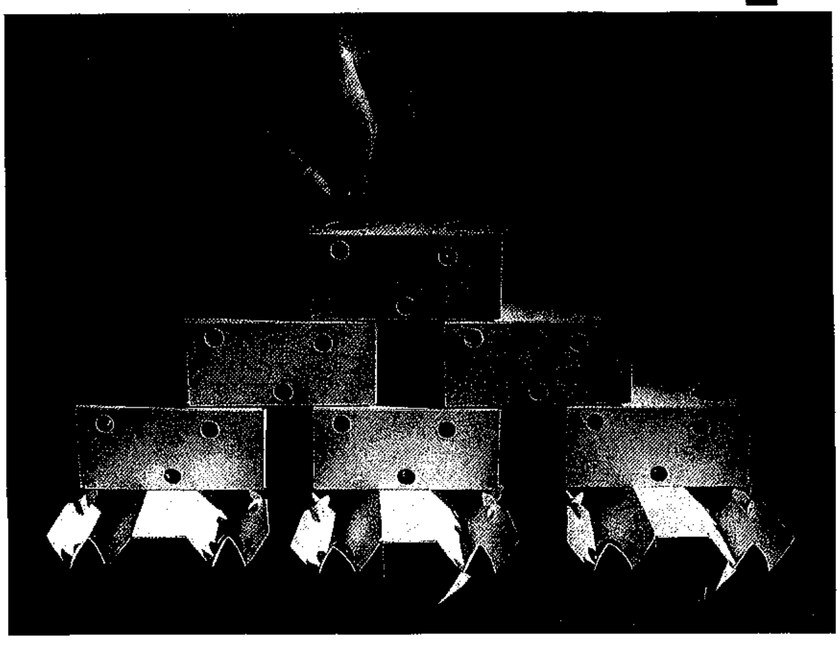
- M.L. Minsky : Computation, finite and infinite machines . Prentice Hall. 1967.,
- Nelson : Introduction to automate.J.Wiley.1968
- Arbib : Brain, machines and mathematics. Mac Graw Hill. 1964.

Des présentations plus abstraites :

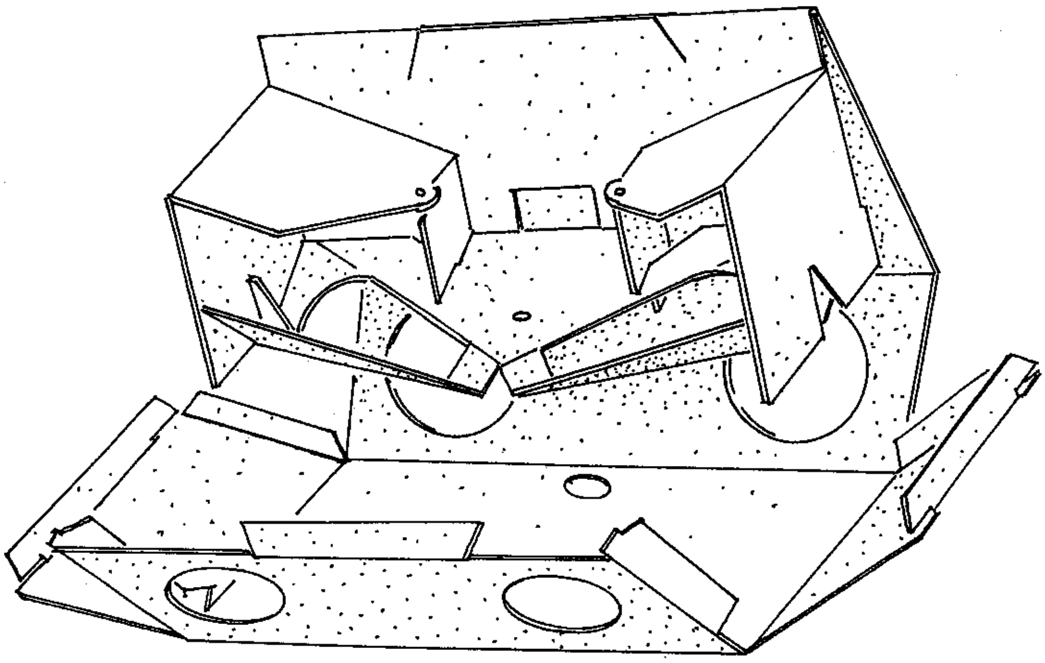
- J. Hartmanis et R.E. Stearns :Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice Hall.1966.-
Pin : Variétés de langages formels. Masson.1984.
- Salomoa : Computations & Automate.Camb P U 85



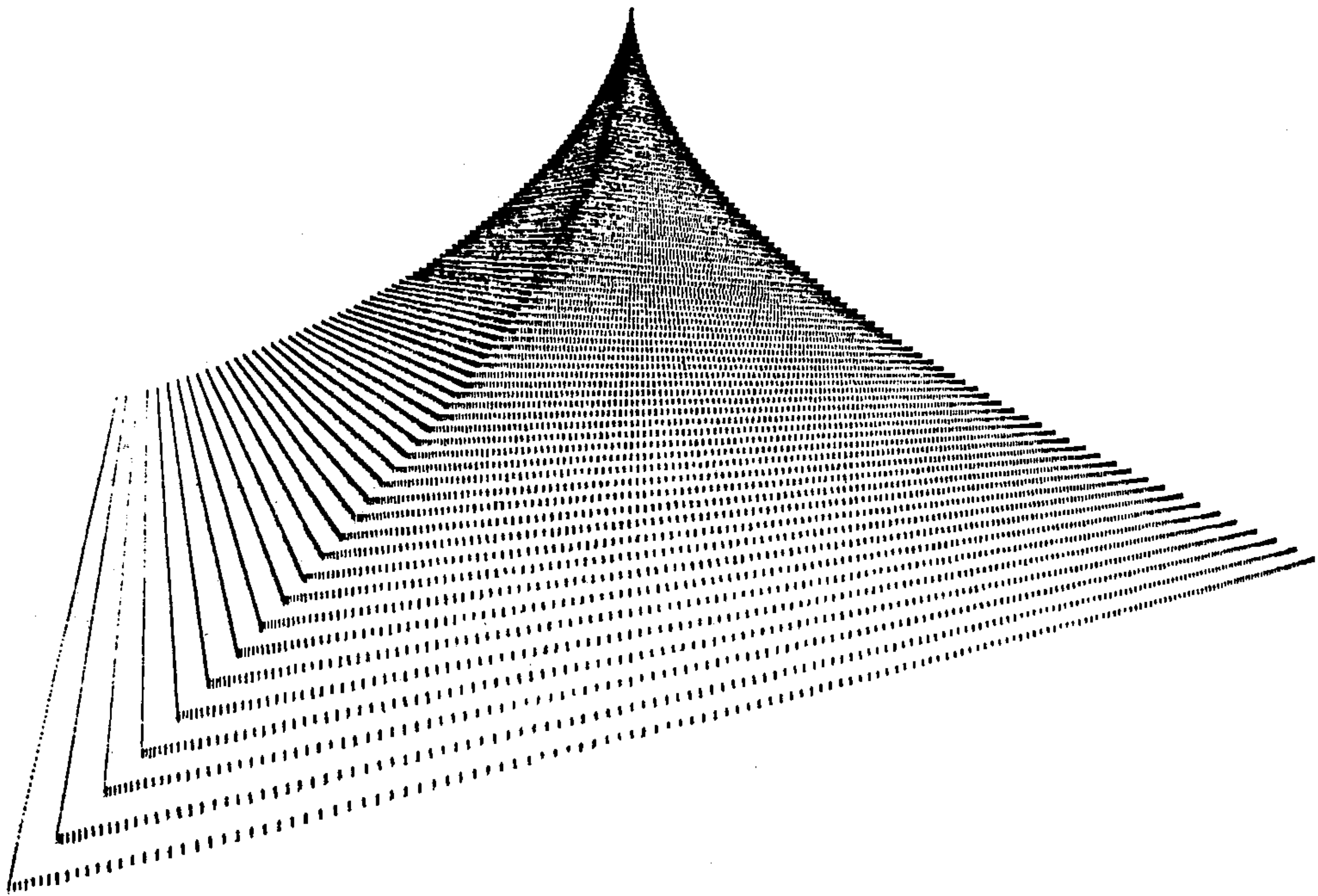




Vue de la boîte ouverte avant montage



La parfaite pyramide de Pascal et le paradoxe du peuple.

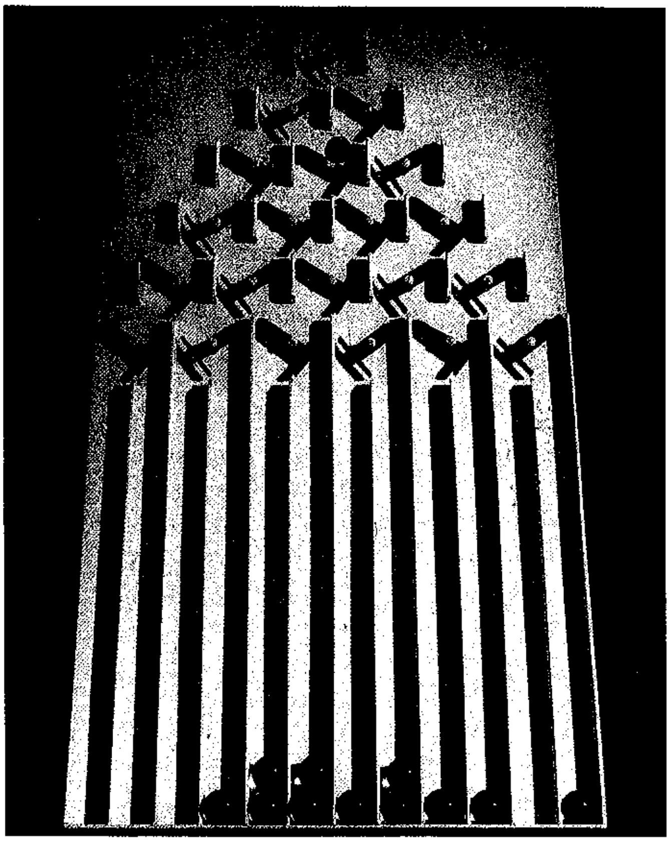


Agnès DENES - 1980

L'AUTOMATE DE GALTON

Raoul RABA - Andrezy

La planche de Galton est un modèle expérimental bien connu pour simuler l'aléatoire. En munissant chacun des clous de la planche d'un ingénieux portillon à bascule, Raoul Raba a créé un automate fini dont il nous fait apercevoir ici les propriétés étonnantes.



Il existe dans l'industrie des mécanismes à levier alimentant des chaînes de production en pièces brutes. Ils sont constitués d'un élément oscillant qui, en tournant d'un certain angle, ferme le passage alternativement à gauche et à droite, divisant ainsi en deux la file générale des pièces. Le mouvement de bascule est provoqué par un levier mis en action par le passage d'une pièce.

Ce mécanisme peut être adapté sur chacun des "clous" d'une planche de Galton. La figure montre un exemple de réalisation d'un automate de ce type. Il est constitué par un ensemble de six rangées de couloirs en quinconce aménagés sur une planchette inclinée et qui débouchent sur douze cases de réception. Dans chacun des couloirs, le passage des billes à gauche ou à droite est commandé par un portillon qui bascule autour d'un pivot fixe.

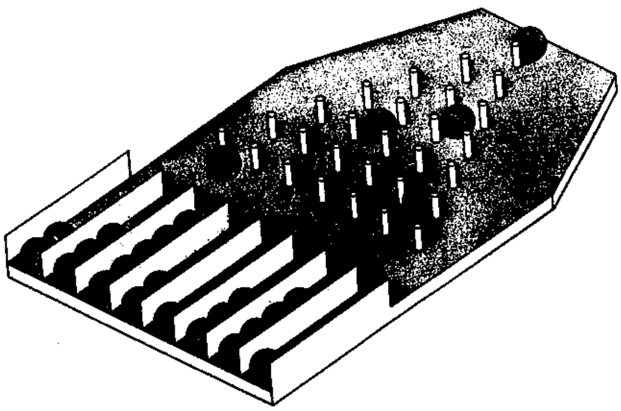
La descente automatique.

Sur la figure, une bille est "photographiée" pendant sa descente. Elle est en train de faire basculer un portillon vers la droite. Que va-t-il se passer ensuite ? Où va-t-elle arriver? Quel était l'état des portillons supérieurs avant le passage de la bille? Où vont arriver les dix billes suivantes (attention, observez bien la dixième!) ?

Deux types de problèmes peuvent ainsi se poser :
- Quelles répartitions est-il possible d'obtenir en "programmant" une telle planche ? Peut-on, par exemple, obtenir une courbe en cloche ?
- Comment placer au préalable chaque portillon pour que l'ensemble des billes introduites dans l'appareil se répartisse automatiquement dans chacune des cases d'arrivée avec un ordre déterminé? Trouvez, par exemple, un état initial pour que les douze premiers lancers placent une bille dans chaque case.

Le jeu de "Galton puissance 4"

Vous connaissez sinon le jeu puissance 4, du moins le jeu de morpion. En voici une variante autrement plus difficile, le "4 puissance 4". Il se joue à deux joueurs au moins disposant de billes d'une couleur différente. Chacun à son tour fait tomber une bille de sa couleur. Le premier qui aligne 4 billes de sa couleur dans les couloirs de réception a gagné! (horizontalement, verticalement ou en diagonale).



Quelques résultats théoriques

Voici quelques résultats généraux transmis par Jean Lefort que vous pouvez vérifier dans le cas où il y a six rangées de portillons.

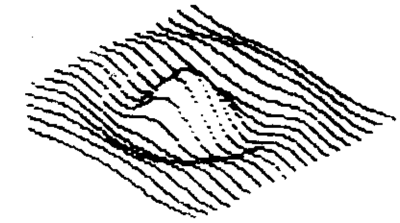
Pour **n** rangées de portillons, il y a **2n** cases de réception des billes. On peut vérifier par exemple que :

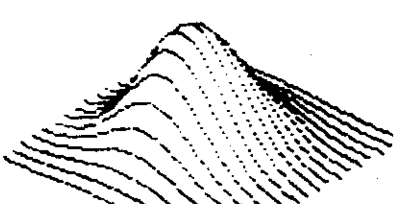
- l'automate a une période de 2^n (pour n=6, cela fait 64)
- Si on laisse tomber 2^n billes, chaque couloir de réception reçoit respectivement $C^0_n, C^0_n, C^1_n, C^1_n, C^2_n, C^2_n, C^3_n, \ldots, C^{n-1}_n, C^n_n, C^n_n$ billes.
- les deux couloirs extérieurs (à droite et à gauche) ne reçoivent qu'une bille chacun sur une série de 2^n billes, la p-ième et la q-ième. On a alors $|p-q| = 2^{n-1}$. Il n'est donc pas possible, pour n = 6, de placer les douze premières billes dans chacune des cases. Seules, les dix premières billes peuvent être placées dans les dix cases centrales.
- Si l'on s'intéresse à l'ordre d'apparition des 2^n billes dans les divers couloirs en fonction de la position initiale des portillons (c'est la fonction de réponse), on trouve $2^{n(n+1)/2}$ solutions. On peut largement réduire ce nombre en tenant compte des symétries de l'automate.

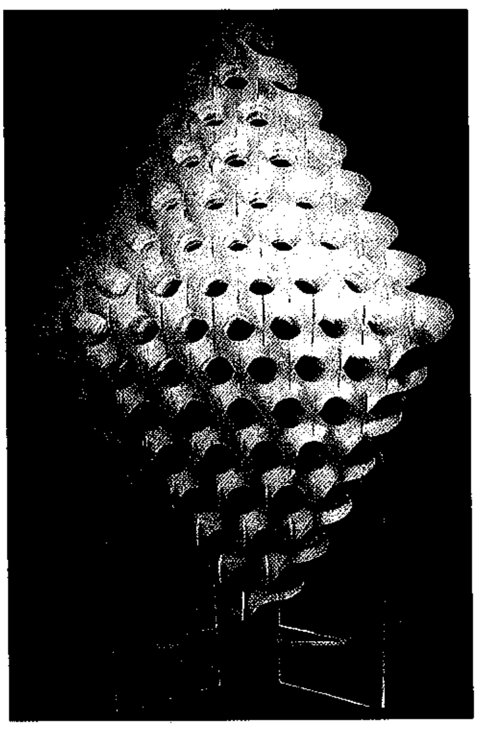
L'automate du hasard !

Revenons à l'aléatoire. Modifiez l'automate en supprimant les cloisons qui se trouvent sous l'avant-dernière rangée de portillons. Vous avez alors 7 couloirs qui reçoivent chacun pour 2^n billes jetées $C^0_{n+1}, C^1_{n+1}, C^2_{n+1}, \ldots, C^{n+1}_{n+1}$ billes.

Vous obtenez donc une répartition suivant ... la courbe de Gauss !



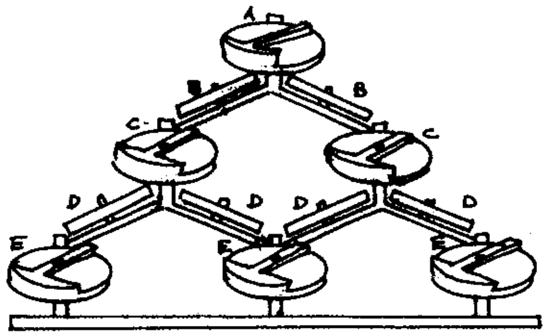


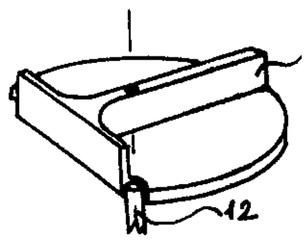


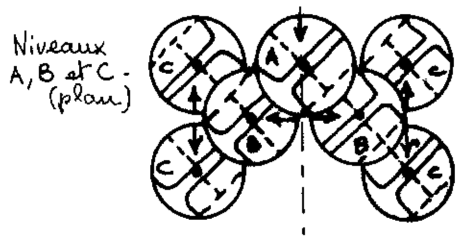
L'ANTI-ALEASCOPE : L'AUTOMATE A TROIS DIRECTIONS

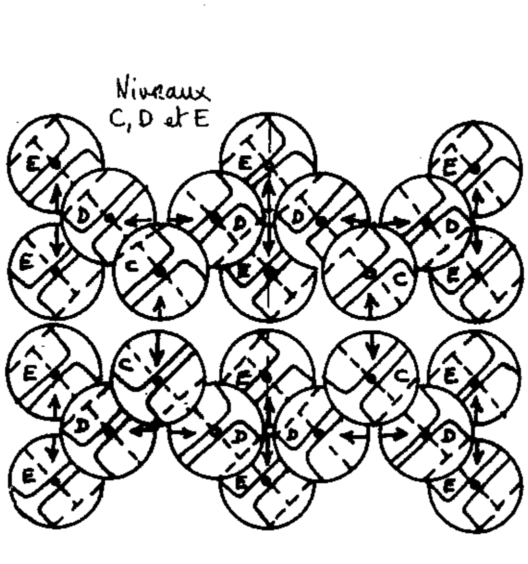
Comme la planche de Galton, l'aléascope peut être transformé en automate par des portillons. L'automate a la même structure que l'aléascope mais chaque toboggan est remplacé par un portillon qui bascule entre deux butées. Les axes sont inclinés de 30° par rapport à la verticale. Les portillons sont fixés sur des plaques tournantes.

Dans la situation représentée la première bille introduite en A tombera d'une plaque sur l'autre en les faisant basculer au passage dans l'autre direction.





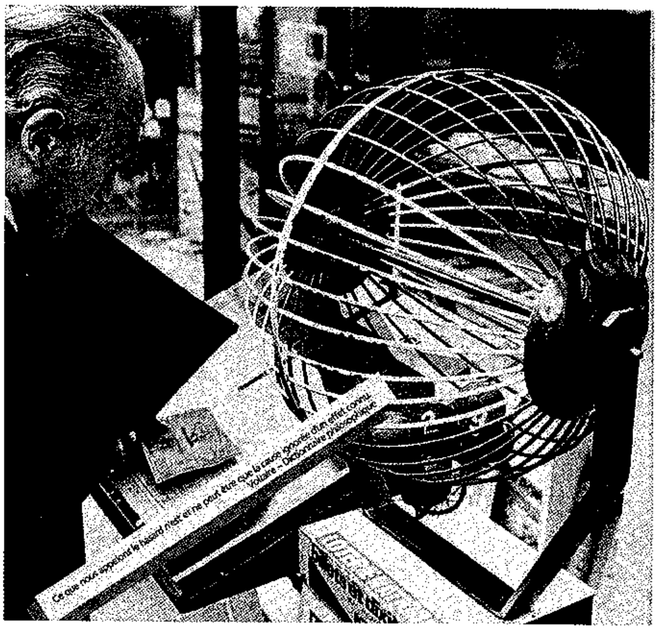




HASARDS ET SIMULATIONS

Les sciences, les techniques, l'environnement sont pleins de de problèmes mathématiques qui n'ont pas de solutions simples ou exactes. Il y a pourtant une méthode générale qui permet d'apporter des réponses suffisamment précises à beaucoup de ces problèmes.

Nous allons voir ici une variété de problèmes simples ou complexes que des méthodes de simulations, par approche statistique ou géométrique, peuvent résoudre. Elles montrent la variété et l'efficacité de l'aléatoire transformé en outil. Ne vous effrayez pas si certains exemples paraissent difficiles,... beaucoup d'entre eux ... le sont!
Mais après avoir parcouru ce chapitre, ils vous paraîtront sûrement plus élémentaires.



AS-TU VU MONTE-CARLO ?

Le PLOT lance une loterie !

Pour sa nouvelle campagne de promotion (avez-vous pensé à renouveler votre abonnement? si oui, vous pouvez participer à la loterie !! sinon, à vos bulletins !!!), votre journal propose une loterie très classique :

Sur chaque billet se trouve une des quatre lettres P L O T, sur 40% des billets il ya un P, sur 30% un L, sur 20% un O et sur le reste un T (pardon à nos amis tourangeaux mais tout ce qui est rare est cher!) . Pour gagner un gros lot, un abonnement d'un an à votre journal, il faut pouvoir former le mot "PLOT".

Combien de tickets acheter pour augmenter vos chances de gagner le gros lot ? Un lot de consolation si vous formez le mot PLO ?

Attention ! Ne confondez ce problème avec le suivant : Combien tirer de chaussettes de votre tiroir pour être sûr d'en avoir au moins deux identiques sachant qu'il y en a de deux types différents ?

Pour vous aider à trouver une solution nous vous proposons de trouver une simulation de cette loterie à l'aide de votre calculette ou d'une table de nombres aléatoires.

Et si cette loterie ne vous plait pas, n'oubliez pas que votre boîte aux lettres regorge de ces attrape-tout qui vous annoncent que vous avez **déjà** gagné ! En voici une autre, encore plus classique, proposée par Jacques Lubczanski .

Un billet sur quatre est gagnant : achetez quatre billets !

Dans cette loterie, combien de billets acheter pour être gagnant, c'est-à-dire être en possession d'un billet gagnant ?

Première étape , **calcul sans visibilité:**

Quelles sont vos chances de gagner
- en achetant quatre billets ?
- en achetant n billets, n supérieur à quatre ?

Si vous avez trouvé, étudiez l'évolution de vos chances en fonction de n.
- Combien devez-vous acheter de billets pour que vous ayez plus de neuf chances sur dix de gagner.

Deuxième étape, **le brouillard se lève:**

Supposons qu'il y ait N billets gagnants. Quelle est, en fonction de N, la probabilité de gagner en achetant quatre billets? en achetant n billets ?

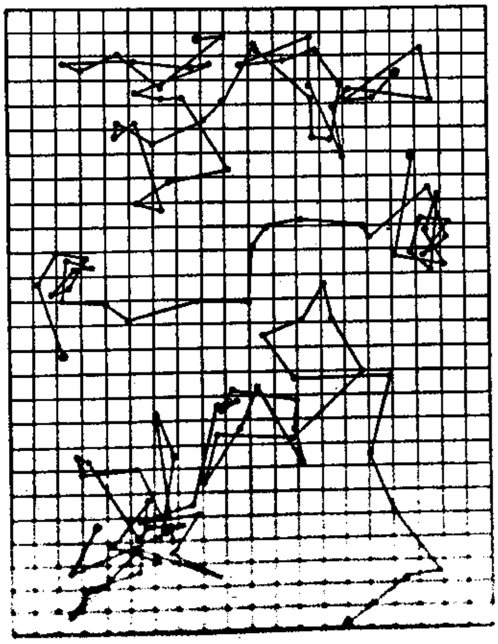
N et n étant donnés, trouvez un algorithme de calcul de cette probabilité.

Dresser un tableau des probabilités obtenues pour N égal à 10, 100, 1000. Combien achèterez-vous de billets pour que cette probabilité dépasse 0,9?

Que se passe-t-il si N augmente ?
Comparez à la première étape, étonnant non ?

Le cas général :

Pour tout nombre n de billets achetés, comparez les probabilités obtenues à chacune des deux étapes. A-t-on intérêt à connaître N ?
Pour n fixé, que deviennent ces probabilités lorsque N tend vers l'infini ?



Traînée de mouvement brownien.
(in Les Fractals, B. Mandelbrot. Flammarion)

La tortue browniène.

Une tortue (Logo of course) part du milieu d'un écran ou d'un carré dessiné sur une feuille.

Au hasard elle tourne à gauche (ou à droite) de zéro,un, deux ou trois quarts de tour puis fait un pas en avant .

. Si elle répète l'opération à chaque étape, chaque changement de direction étant également probable, à quelle distance sera-t-elle de son point de départ au bout de cinq pas, dix pas, cent pas ?

Cette expérience est une modélisation élémentaire du comportement d'un grain de pollen ou d'une molécule d'huile dans l'eau, par exemple.

Les déplacements désordonnés de ces particules furent observés et décrits en détail en 1827 par le botaniste anglais Brown.

Ce n'est qu'en 1905 que le phénomène sera expliqué par Albert Einstein: l'agitation des particules est dûe aux chocs aléatoires et non observables qu'elles reçoivent des éléments environnants (les molécules d'eau) . Einstein s'en servira pour prouver l'hypothèse atomique.

Les files d'attentes

Pour chaque congrès Apmep, l'équipe du PLOT, pour vendre les Plot-Matériels a à résoudre un problème de file d'attente à la caisse.

Elle a le choix entre:
- doubler le nombre de caisses, chaque client étant alors traité en deux minutes,
- doubler le caissier d'un aide-caissier, ce qui permet de traiter chaque client en une minute.

Une étude statistique a été faite et nous permet de savoir que 30% du temps aucun nouveau client ne se présente pour payer, 40% du temps, il en arrive un et 30% du temps, il en arrive deux.

Pour chacune des solutions envisagées et pour pouvoir choisir, aidez-nous à estimer :
- le temps d'attente moyen de chaque client
- la longueur moyenne de la file d'attente.

Quelle solution choisirez-vous ?

Ce type de problème est non seulement fréquent dans les files d'attentes, mais aussi en économie, par exemple, pour la gestion des stocks.

Comment simuler la réalité ?

Comment estimer ce que va devenir le phénomène réel? C'est là que vont se rejoindre (asymptotiquement) statistiques et probabilités .

Si le phénomène est simple ou simplifiable, on peut le déterminer mathématiquement. C'est vrai de quelques problèmes ci-dessus, mais il faut des connaissances en théorie des probabilités.

S'il devient complexe, les outils mathématiques habituels ne peuvent plus servir ou n'existent pas encore, les équations sont trop complexes ou ne peuvent être résolues. C'est là que fréquence et proportions vont s'unir pour le meilleur.

Le recours à l'expérimentation, à l'étude du phénomène sur une assez longue période, pourrait encore apporter des réponses et il le fait, par exemple pour l'efficacité d'une méthode de contraception, lafréquence d'arrivée aux caisses,...

Malheureusement, ce n'est pas toujours possible ou pratique, pour des raisons de coûts ou de délais, de sécurité ou de morale.

Dans ces cas il reste encore une piste : la simulation du phénomène. Il faut pour cela simuler correctement le comportement de l'expérience réelle et faire apparaître les résultats rapidement et à coût réduit.

Ces simulations ont, de plus, l'avantage de pouvoir être exploitées facilement en classe.

La méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo est l'une des plus simples de ces techniques de simulation .

Et ceci peut se faire encore plus facilement grâce aux calculatrices et aux ordinateurs ou, si l'on ne dispose pas de ces moyens, grâce aux tables de nombres aléatoires. La méthode de Monte-Carlo peut être ainsi aisément exploitée dans la classe et ceci d'autant mieux que l'on pourra montrer aux élèves l'évolution des résultats au fur et à mesure des simulations. Ils pourront ainsi se prendre au jeu, faire des prévisions et les valider à la fin.

Voici un exemple très simple : **Pile ou Face**.

Combien de lancers faut-il faire en moyenne pour obtenir un pile? deux ? trois ?

L'expérimentation réelle consisterait à lancer une pièce et compter le nombre de lancers qu'il a fallu faire pour obtenir trois piles.

Répétez l'expérience et faites la moyenne et vous approcherez de la réponse exacte. Mais il vous faudra répéter l'expérience un très grand nombre de fois pour accroître la précision de votre mesure Cela peut-être long et fastidieux.

Simulez! Simulons !

Supposons que la pièce soit parfaite (est-ce possible ?) et que les lancers donnent autant de chance d'avoir pile que d'avoir face.

Prenez votre calculatrice est sortez une série de nombres au hasard, entiers compris entre 0 et 9 (soit INT[10x RND]). Vous pouvez alors associerpar exemple, pile et nombre pair, face et nombre impair (ou pile et nombres inférieurs à 5, face sinon, ...) et obtenir ainsi un tableau de ce type pour "trois piles dans une série":

nombres 0655845354673384532007092528

pile/face **PPFFP|PFFFPP|FFFPPFFP|PPFP|FPFPP**
nombre 5 | 6 | 8 | 4 | 5
de lancers pour avoir trois "pile".

Il ne vous reste plus, ensuite, qu'à continuer l'expérience à faire un diagramme (appelé histogramme!) et à calculer, sans peine, Moyenne, Ecart-type, etc...

Ces histogrammes et histogrammes cumulés montreront que les deux tiers du temps il faut plus de six lancers pour obtenir trois "pile".

La même simulation peut-être utilisée pour simuler d'autres jeux de piles ou faces avec des pièces parfaites ou non !

Une pièce peut-elle être parfaite ?

Avez-vous déjà rencontré une pièce parfaite, parfaitement lancée par un homme parfait ?

Que faire si les conditions expérimentales font que la pièce tombe trois fois sur cinq sur "pile" ?

Réponse, du Tac∅Tac, pas de problème !

Il suffit d'associer, dans la simulation, les chiffres 0 à 5 à pile et 6 à 9 à face. Si les dix nombres ont une apparition équiprobable, vous aurez une bonne simulation de l'expérience.

Et si "pile" apparaît 54 fois sur cent (comme c'est à peu près le cas actuellement dans certains pays... pour une expérience réalisée depuis que l'homme existe mais sur laquelle on ne possède que des statistiques récentes : la naissance d'un garçon (pile!) ou d'une fille (face!!)).

Là encore , réponse du Tac∅Tac: on monte d'un cran ... et l'on prend des nombres entiers entre 0 et 99 (INTx100RND). Sortir pile est un événement équivalent à sortir un nombre au hasard entre 0 et 53 parmi les entiers jusqu'à 99.

Et si on lance parfaitement ... un dé parfait ?

Réponse du Tac∅...Tac .... On prend les entiers à un chiffre et on ne retient que ceux qui correspondent aux six nombres marqués sur le dé. Si 0, 7, 8, 9 sortent, on tire à nouveau un nombre.

Revenons aux problèmes du début .

- La loterie du PLOT -

40% de P se remplace facilement par entiers compris entre 0 et 3, 30% par entiers entre 4 et 6, 20% par 7 et 8, et 10% par 9. Et il ne reste plus qu'à sortir les calculettes.

- Un billet sur quatre -

Vous pouvez fixer, par exemple, sur les dix nombres entiers de la touche Random, 0 et 1 pour un billet gagnant, 2 à 7 pour perdant et rien pour les deux derniers. Vous pouvez aussi, et c'est peut-être plus simple à programmer, remarquer que cela fait 25% de billets gagnants soit à tirer un entier entre 0 et 99 et de couper à partir de 25.

- La tortue brownienne -

Là encore on choisira, par exemple, DR 0 si l'on tire un entier entre 0 et 24, DR 90° entre 25 et 49, DR 180° entre 50 et 74, DR 270° entre 75 et 99 . A vous de bien programmer.

Files d'attente

Pour simuler l'arrivée des clients aux caisses à chaque instant (on prendra une minute comme unité), vous pouvez, par exemple, associer zéro client au tirage d'un nombre entier compris entre 0 et 2, un client pour un entier entre 3 et 6, deux clients pour un entier entre 7 et 9.

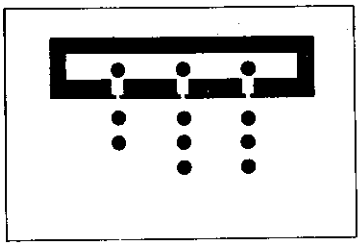
Simulation des arrivées chaque minute :
minutes 0123456789012345678901234567 8
nombres 2859981863918290329401242363 5
clients 0212220211202020102100010111 1
noms acdfh jlmn p r t u w x yzab
b egi k o q s v

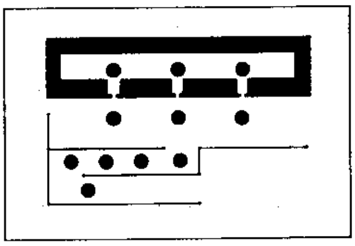
Il reste maintenant à étudier le temps d'attente de ces clients suivant les deux solutions envisagées:
pour chacun des 28 clients ci-dessus, on obtiendra avec deux caisses un temps d'attente de :

client: abcdefgh ijklmnopqrstuvwxyzab
temps: 00102132424343534353334 00000
Soit un temps moyen de 2 minutes 12 secondes.

Avec une seule caisse et deux caissiers :
client: abcdefgh ijklmnopqrstuvwxyzab
0111223343444454545434410000
Soit un temps moyen de 2 minutes 40 secondes.

Le Plot, toujours à la recherche de nouvelles idées, s'est vu proposerencore mieux:
mettre d'abord trois caisses et remplaçer les trois queues classiques par une seule queue!
Qu'en pensez-vous ?





temps : 0123456789012345678901234567 8
caisse 1:-aaddggjjmm pprrttuu xxyyaa
g
caisse 2:-bbeehhkk nnqqss vv zz
caisse 3:--ccffi il loo ww bb

Une seule personne attend une petite minute. Par contre, une au moins des trois caisses, est inemployée pendant 31 minutes (pour 28/29 minutes d'observation !) .Nouvelle idée : revenir à deux caisses mais une seule queue. Qu'en pensez-vous ?

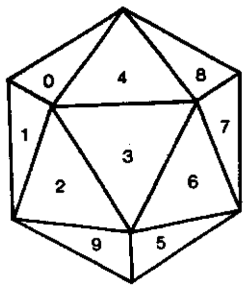
Méthode et gestion pédagogique

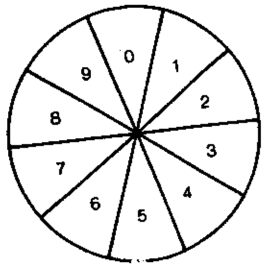
Cette méthode a l'avantage de transformer des calculs probabilistes en calculs statistiques, des probabilités en fréquences et, de ce fait, un travail sur les réels en un travail, plus concret pour l'élève, sur les proportions. On approxime le réel par le rationnel, on passe de phénomènes continus à des phénomènes discrets (cf figure ci-dessous).

La méthode est approximative, soit, mais oh combien plus facile à manipuler puisque basée sur la règle de trois! Elle a, de plus, l'avantage de faire sentir aux élèves l'influence du hasard dans des phénomènes complexes ou trop théoriques à aborder par le Calcul des probabiltés qui demande souvent une adhésion à priori.

Comme vous avez pu l'observer sur ces exemples, elle demande aussi et surtout de savoir organiser et traiter les données numériques simples mais nombreuses. Elle demande enfin de savoir générer des séries de nombres aléatoires .

Une autre méthode est encore possible: se construire physiquement une table de nombres aléatoires en utilisant, par exemple les aléas du lancer par des personnes physiques. Vous pouvez pour cela utiliser un dé à vingt faces, une roulette à dix secteurs ou tout autre matériel adapté au problème à traiter.





Von Neumann et Monte-Carlo.

C'est justement le jeu de la roulette qui a donné le nom de cette méthode. Elle a été mise au point pendant la seconde guerre mondiale par Von Neumann et Stanislas Ulam pour décrire le comportement des neutrons dans divers matériaux sans avoir recours à l'expérimentation réelle (il s'agissait bien sûr d'expérimentations nucléaires).

Elle est de nos jours très utilisée en économie, en politique, en démographie ou en mathématiques pour choisir une stratégie commerciale ou électorale, prévoir l'évolution de la natalité ou le transfert des voix entre deux tours de scrutins, ou calculer une intégrale .

Sources: entre autre,bulletin Umap:
vol1, n°2. 1980

ALLEZ A THOUARS : visitez une fabrique de nombres

Yves Olivier - Blois

Pour réaliser de "bonnes" simulations, il faut de "bonnes" usines de fabrication ! Les calculatrices et ordinateurs, avec les fonctions Random et Hasard fournissent, en fait, des suites de nombres construits par l'homme. Peut-il fabriquer du hasard ? Il ne peut seulement que s'en rapprocher le plus possible mais les suites qu'il fabrique ne présentent pas toutes les caractéristiques des nombres aléatoires.

Les pseudo-aléatoires

Un nombre aléatoire est un nombre choisi "au hasard" dans un domaine que l'on considérera d'abord comme fini où chaque nombre a la même chance d'être choisi.

Il y a génération de nombres aléatoires lorsqu'une procédure donne un nombre du domaine. En fait, le plus souvent, ce n'est pas un nombre qui est désiré, mais une suite.

Lors d'un très grand nombre de "tirages", on doit pouvoir s'attendre à ce que chaque nombre du domaine apparaisse le même nombre de fois ou presque.

De telles procédures n'existent pas avec les **machines déterministes** électroniques que sont les ordinateurs et calculatrices.

On peut cependant construire des procédures qui possèdent la plupart des propriétés des nombres aléatoires. Décrivons-en quelques-unes.

Germes et générateurs.

Ces procédures, appelées générateurs, produisent le plus souvent des suites périodiques (qui ne sont pas aimées à Thouars). Pour les faire accepter, on s'arrange pour que la période soit largement supérieure au nombre total de nombres à tirer.

Enfin, contrôle de qualité oblige, des tests très précis permettent de faire le "tri" dans les générateurs. Un des tests les plus connu est le "Khi-deux"

Les exemples qui suivent sont spécialement conçus pour être utilisés sur des calculatrices programmables. Dans le **matériel Plot-Aléa...** vous trouverez d'autres programmes écrits en basic microsoft et testés sur TO7-70.

A vos calculatrices !

- les 997 et 147-générateurs -

la suite des nombres est définie par:

$u_1 = 0{,}52841637$ et $u_{i+1} = \text{FRAC}(A * u_i)$

où A est un nombre générateur, ici 997 ou 147, et FRAC la fonction qui à un nombre associe la mantisse du nombre, ainsi FRAC(23,4567) vaut 0,4567

u_1 est appelé **germe** du générateur.

Voici un algorithme possible pour avoir N nombres aléatoires que l'on peut stocker ou utiliser directement:

```
initialisez u, A et N
faites pour i variant de 1 à N
    début
        u <-- FRAC( A*u )
        utiliser u
    fin
```

FRAC peut être simulé par : ENT étant la partie entière,

```
y <-- A*u
u <-- y-ENT(y)
```

- les p/q générateurs -

Prenez les décimales d'un rationnel p/q, mais attention à leur périodicité ! Choisissez bien !! Par exemple 5 698 345 / 8 000 087, où le dénominateur, premier, assure une période de 8 000 086 à la suite. Il faut, de plus, produire ces décimales par paquets de 2, 3 ou 4 pour ne pas dépasser la capacité de la calculatrice.

Algorithme possible :

```
initialisez p, q, n et N
m <-- 10n
u <-- p
faites, pour i de 1 à N
début
    y <-- ENT(m*u/q)
    u <-- m*u - y*q
    utilisez u
fin
```

Cet algorithme produit des nombres à m chiffres, ainsi, pour m=4, 43 correspond à 0043.

- le π - générateur -

u_1 dans [0,1[et u_{i+1} = FRAC ($\pi + u_i$)^n
Ce générateur produit des nombres entre 0 et 1.
Algorithme possible :

en général, n vaut 5 ou 8.

```
initialisez u, n et N
    faites pour i de 1 à N
    début
        u <-- FRAC (π+u)^n
        utilisez u
    fin
```

- Pour vos micros : les congruences linéaires

Cette méthode est la plus connue et la plus utilisée sur les ordinateurs depuis sa création par D. Lehmer en 1951. En voici le principe:
a[1] contient un nombre qui sera le **germe** et, grace à l'itération suivante, on construit N nombres :

a[i+1] = a[i]*b + c (modulo m)

b et c sont des constantes et a[i+1] est le reste de la division euclidienne de a[i]*b + c par m.

La suite u(i) = a[i]/m peut être utilisée comme génératrice de nombres compris entre 0 et 1.

Aussi simple qu'il puisse paraître, ce générateur doit être pris avec précaution. De nombreuses et difficiles études, en particulier celles de D. Knuth in "the art of computer programming" en 1969 ont permis de cerner les choix du germe et de b et m .

En effet, des choix "raisonnables" ne permettent pas toujours d'avoir des nombres aléatoires:
- m doit être proche du nombre maximum utilisable par l'ordinateur (une puissance de 2 ou 10),
- b, par contre,ne doit être ni trop grand ni trop petit, en principe un chiffre de moins que m suffit,
- le germe enfin peut être quelconque, son choix n'a pas d'effet sur la qualité "aléatoire" des suites.

Le plus sérieux problème avec ce générateur est qu'il engendre toujours des suites périodiques! Par exemple, le choix du germe 0, de 19 pour b, de 1 pour c et de 381 pour m conduisent à la suite 0, 1, 20, 0, 1, 20,... qui n'est pas très aléatoire !!

Il faut donc s'arranger pour que la période soit la plus longue possible et, en tout cas, supérieure à N De plus, les chiffres des unités des nombres obtenus ne constituent pas, eux non plus,, une suite aléatoire de chiffres entre 0 et 9.

Enfin, il n'est pas nécessaire de mémoriser dans un tableau chaque terme de la suite. On peut très bien utiliser une variable globale **a**.

On obtient l'algorithme suivant :

```
a<- ainit ; b <- binit; c <- cinit; m <- minit;
pour i variant de 1 à N faites
    début
        a <-- (a*b + c) modulo m
        exploitez a
    fin
```

On peut encore simuler les congruences et éviter les problèmes de dépassement de capacité de la fonction modulo avec la modification suivante :

```
    début
        y <-- a*b + c
        a <-- y - ENT(y/m) * m
        exploitez a
    fin
```

Valeurs conseillées pour ainit, binit, cinit et minit -
- 1234567, 31415821, 1, 100 000 000.

Attention aux dépassements de capacité si vous travaillez avec des entiers.

Sedgewick dans "Algorithms" suggère de scinder les multiplications en tranches de 4 chiffres.
- 4567, 9749, 1 et 262144 (donné par Engel dans "Mathématiques et Informatique" de Cédic)

Ou encore, germe quelconque avec des chiffres différents et : - 24298, 9991, 199017 ou
- 3^{17}, 0, 2^{29}.
Ces deux derniers exemples sont proposés par JM Chauveau et S. Weber dans "Algorithmes et Maths".

Points au hasard

La méthode ci-dessus se trouve dans la plupart des logiciels. On peut la "voir" à l'œuvre en faisant apparaître 500 ou 1000 points au hasard dans un carré et en essayant de repérer les régularités ou pourquoi pas la périodicité de la suite.

Les carrés de points au hasard de la page 44 sont construits, l'un à partir d'un basic résident en utilisant la touche RND et l'autre à partir d'une fonction qui est loin d'engendrer ou de simuler le hasard : appelée méthode d'Anosov, elle est donnée par les formules générales suivantes :

x' = (a*x) + (b*y) - flr (a*x + b*y)
y' = (c*x) + (d*y) - flr (c*x + d*y)

où flr est le plus grand entier, a,b et c des constantes égales ici à 1 et d à 2.

Les germes étant 1,6700 et 3,7800.

Matériel Plot-Aléatoire

En dehors des carrés de points au hasard et du tableau de nombres pseudo-aléatoires qui se trouvent dans le présent dossier, vous trouverez, dans le **matériel aléatoire** des programmes pour TI 57 et TO 7 70 permettant de générer des nombres au hasard (de la machine) et de faire des simulations comme :
- lancers d'une pièce , d'une punaise ou d'un dé,
- jeu avec mise et gain,
- calculs d'aires par la méthode de Monte-Carlo ou par la "pseudo" méthode des rectangles.

Matériel Plot-Aléatoire !

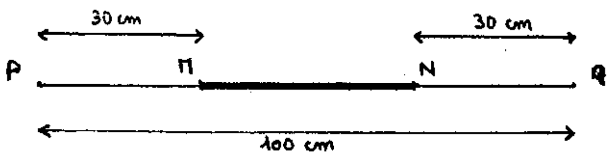
ICI, LA CHANCE N'A... AUCUNE CHANCE

Regardez le sol autour de vous, repérez un point particulier, n'importe lequel. Maintenant fermez les yeux et faites tomber une bille, ou ce que vous avez sous la main. Vous n'avez aucune chance de tomber sur le point choisi. Le résultat est le même pour tout autre point ! Et pourtant, elle tombe bien quelque part, votre bille. Plus fort encore, prenez un ficelle et une paire de ciseaux. Chaque point de la corde n'a aucune chance d'être atteint par votre coup de ciseaux !! Et pourtant, si vous êtes assez habile ...

– Hé, Joë ! j'ai parié avec Luc Le Chanceux 10 grains de riz contre 2 pousses de soja que sa bulle de savon retomberait en g3...

La ficelle.

Coupez, au hasard, une ficelle d'un mètre de long en deux morceaux. Quelles chances avez-vous pour que vous ayez au moins un morceau d'au moins trente centimètres ?



Réponse:
Appelons E le segment [PQ] et A le segment [MN]. La réponse nous est donnée par la probabilité de couper en un point de A soit :
P(A) = MN/PQ = 40/100 = 0,4.

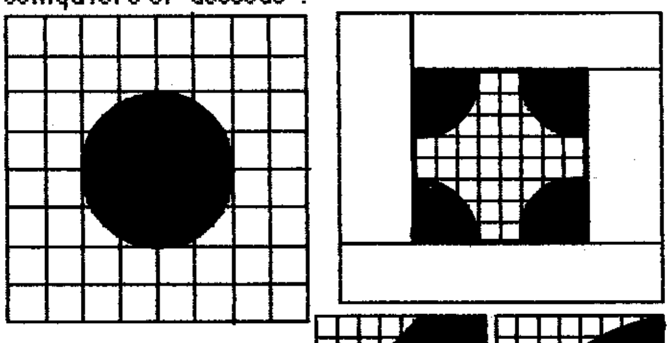
L'échiquier.

Jet ez, au hasard, un grain de riz sur un échiquier de 64 cases blanches et noires. Quelles chances a-t-il de tomber sur la case g3 ?

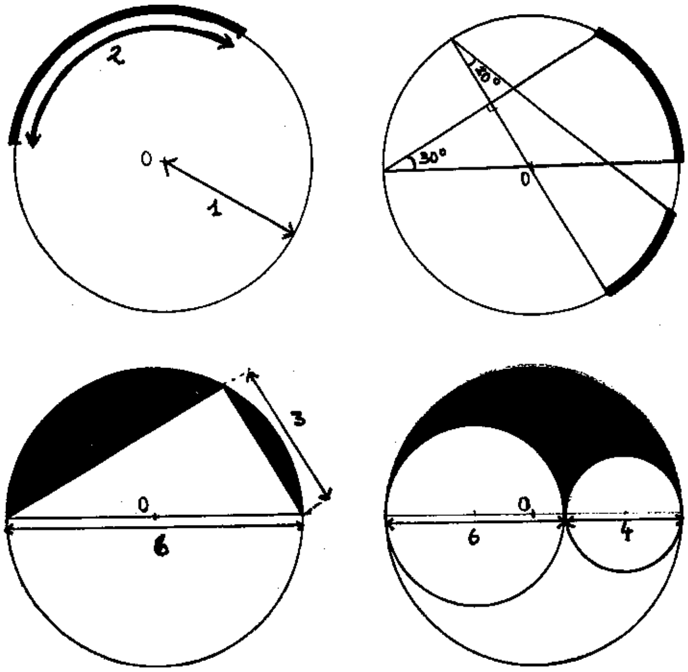
Réponse :
On ne connait pas les dimensions des cases ni, bien sûr, celles de l'échiquier. Et pourtant, si l'on appelle E la surface de l'échiquier et A celle de la case g3 (qui est noire), toutes les cases ayant les mêmes dimensions, la réponse nous est donnée par:
P(A) = aire(A)/aire(E) = 1/64 = 0,015625.
En fait, cette probabilité peut être aussi obtenue par la bonne vieille formule "cas favorables/cas possibles". Voyez-vous mieux pourquoi vous n'avez aucune chance de tomber sur un point quelconque?

Etes-vous maître de l'échiquier ?

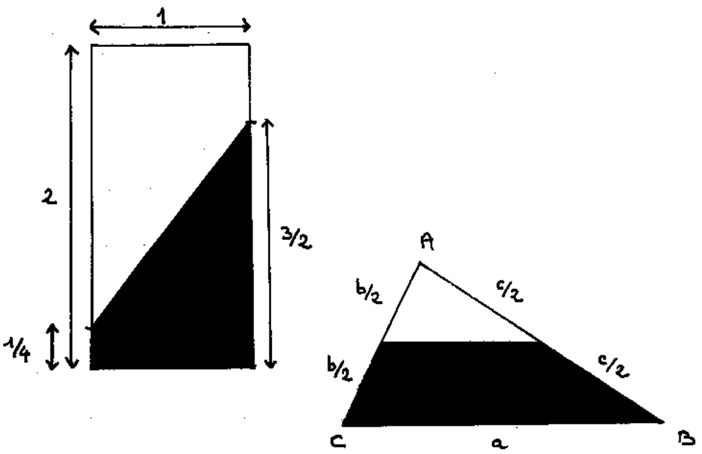
Quelles chances avez-vous pour que le grain tombe sur la case d4? sur une case noire ? sur une case de la colonne e? sur une case de la diagonale? dans un disque, intérieur à l'échiquier, de rayon deux cases ? dans la partie noircie des échiquiers ci-dessous ?



Réponses : 1/64, 1/2, 1/8, 1/8, $\pi/16$, $1-9\pi/64$, 39/64, $\pi/2-1$.



Pour vous entraîner:
Dans chacun des cas de figure
déterminer la probabilité de tomber sur la partie sombre par rapport à la partie toute entière.



Réponses :
$1/\pi$, $5/18$, $(\pi-\sqrt{3})/2\pi$, 0,24, 7/16, 3/4.

Quelques applications.

Bombardements calculés

Des citernes, contenant du pétrole, sont disposées régulièrement sur un terrain, leurs centres formant des carrés de 40 mètres de coté.

Suivant la puissance des bombes, une citerne ne peut être endommagée que si la bombe tombe à une distance donnée du centre de la citerne.
- 15 mètres pour une bombe de faible puissance,
- $40/\sqrt{3}$ mètres pour une bombe moyenne,
- $40/\sqrt{2/3}$ mètres pour une bombe plus puissante

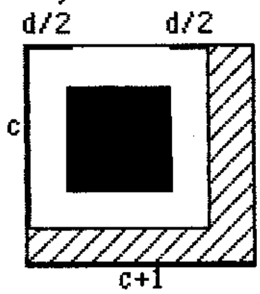
Quelle est la probabilité pour qu'une bombe, tombant au hasard dans un carré défini par les centres de quatre citernes, endommage zéro, une, deux, trois ou quatre citernes ?
(Comme vous vous en doutez, ces distances ont été s choisies par la rédaction pour vous faciliter les calculs ! Merci à mon PLOT !!)

Bill et Boule .

Chez Bill, la buse d'évacuation des eaux de pluie est fermée par une grille métallique. Les barreaux de cette grille ont une épaisseur de un centimètre et délimitent des carrés de coté c(en cm).

Bill jette, au hasard, une bille au-dessus de la grille. Si elle passe au travers, sans toucher les barreaux, il gagne (et... perd sa bille !), sinon il perd (et perd peut-être aussi sa bille!!).
Que dire de ce jeu de billes, débile, de Bill?

Pour vous aider, utilisez la figure ci-contre où d est le diamètre des billes de Bill.
Et si d augmente ?



Chez Boule, le copain de Bill, il y a la même grille ,mais les barreaux sont deux fois plus larges et ses boules aussi.
Le jeu de billes de Bill est-il moins débile que le jeu de boules de Boule ? ©

La probabilité géométrique.

Dans ce modèle probabiliste, l'ensemble des cas observables à l'issue d'une épreuve aléatoire, s'appelle ensemble fondamental. Notons-le Ω.
Un événement élémentaire est un événement réalisé par un seul résultat de l'épreuve aléatoire.

Ω étant infini, non dénombrable, on lui associe une partie E du plan ou de l'espace qui est :
- soit un segment de courbe de longueur finie,
- soit une surface d'aire finie
- soit un solide de volume fini.

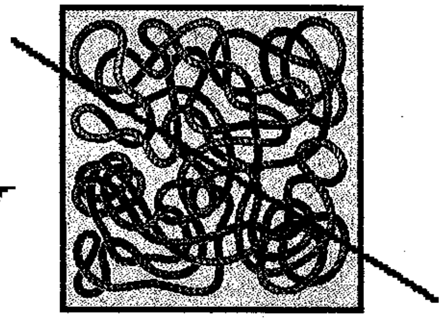
On peut considérer que l'expérience aléatoire revient à tirer au hasard, c'est-à-dire de manière équiprobable, un point de E. A chaque événement élémentaire, correspond donc un point M de E.

A un événement quelconque lié à l'épreuve aléatoire, correspond une partie A de E. Si M est élément de A, l'événement est réalisé, c'est un succès! Si non, c'est un échec .
On a, par définition : P(A)=mesure(A)/mesure(E)

Vérifiez les propriétés suivantes(ordre au hasard)
- pour tout A de E, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
- pour deux événements A et B incompatibles,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E,
$P(\bar{A})=1-P(A)$ et $P(\emptyset)=0$, $P(E)=1$.
- Pour toutes parties A et B de E :
$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$ et
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ■

LA LONGUEUR DE LA NOUILLE

A votre avis,
quelle est la longueur de cette ligne ?
La "géométrie intégrale", qui traite ce genre de questions, a eu depuis 1960, de très nombreuses applications techniques et, en premier lieu, la tomographie ou balayage par scanner et la radio-astronomie.



Première approche :

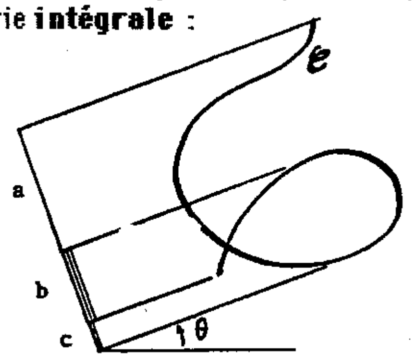
Supposez que le carré qui enveloppe cette ligne ait un périmètre **P** qui vale un mètre.

Placez, au hasard, une règle sur le carré et comptez le nombre d'intersections. Recommencez plusieurs fois l'opération et faites la moyenne **N** des mesures obtenues.

La formule $\mathbf{L = (1/2)P \times N}$ donne une bonne approximation de la longueur L de cette "nouille" !

Pour avoir **la longueur réelle**, il faudrait :
- trouver la courbe qui enveloppe, au plus près, la ligne (c'est ce qu'on appelle l'enveloppe convexe de la nouille !), puis,
- définir ce que peut être la "moyenne" des intersections lorsqu'on considère **toutes** les droites du plan qui coupent la nouille.

On arrive ainsi, comme nous allons le voir avec la formule de Cauchy-Crofton, au concept de géométrie **intégrale** :



$$m(\theta) = a + 3b + 2c$$

Projetez la courbe suivant une direction donnée et calculez la mesure de l'ensemble des segments projetés, multiplicités comptées.

Faites varier la direction de projection de 0 à π et faites la moyenne des mesures, divisez par 2 et vous obtiendrez la longueur de la courbe :

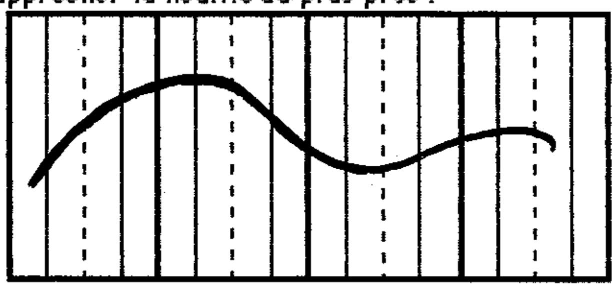
$$\textbf{Longueur (C)} = 1/2\int_0^{\pi} m(\theta)\,d\theta$$

Deuxième approche :

Des aiguilles pour une nouille

Pas facile, me direz-vous, de calculer toutes ces mesures, même si l'on ne choisit que quelques directions pour avoir une mesure approchée.

Exact ! Alors voici encore une méthode pour approcher la nouille au plus près :



Vous voulez mesurer les segments projetés suivant la direction de ces parallèles.

Ce réseau vous permet de le faire en ne comptant que des points d'intersection. La mesure est alors voisine de :

nombre d'intersections
X
distance entre 2 droites

Ainsi, ici, suivant l'écartement choisi, on trouve : 3x 2 ou 7 x 1 ou 14x 0,5 ou ....

Plus l'écart est faible plus la mesure est proche de la réalité .

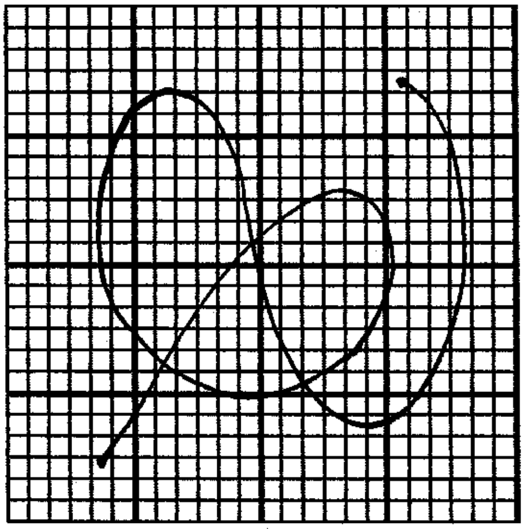
Cela vous rappelle sans doute quelque chose ! Mais oui ! Mais c'est, bien sûr (!), les aiguilles de Buffon . Ce problème est, en effet, l'ancêtre de la géométrie intégrale. En 1777, Buffon énonçait : par rapport à un ensemble d'aiguilles de longueur L lachées sur des lames de parquet de largeur **d**, la proportion d'aiguilles qui coupent une rainure est voisine de : $\mathbf{P = 2L/\pi d}$,moyen commode pour obtenir une bonne approximation de π.
[cf le spécial π du Nouvel Archimède]

Dernière approche :
quadrillage au rétro-projecteur

Toutes ces mesures peuvent se faire aisément à l'aide d'un transparent sur lequel serait dessinée la courbe (ou, l'inverse pour les élèves : une courbe polycopiée placée sous un réseau transparent de droites quadrillées). L'avantage d'un tel procédé est de pouvoir facilement changer de direction et d'avoir, avec tous les groupes de la classe, une multiplicité de mesures en faisant glisser une feuille sur l'autre.

Dernière méthode:

Un quadrillage , une courbe; l'un des deux sur un transparent.



Comptez les intersections du quadrillage avec la courbe, tournez la feuille transparente (ou l'autre) à 45°, faites la moyenne, multipliez par π et divisez par 2 !

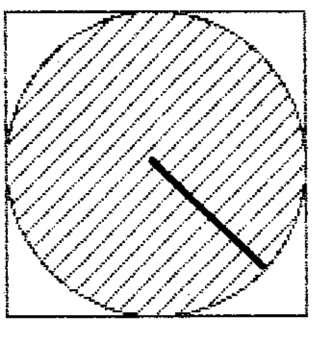
Vous obtiendrez une ou plusieurs bonnes approximations de la longueur réelle de la courbe.

GENERALISONS :

Le périmètre d'une surface convexe.

Vous connaissez tous, bien sûr, la formule donnant le périmètre d'un cercle : π x **diamètre**

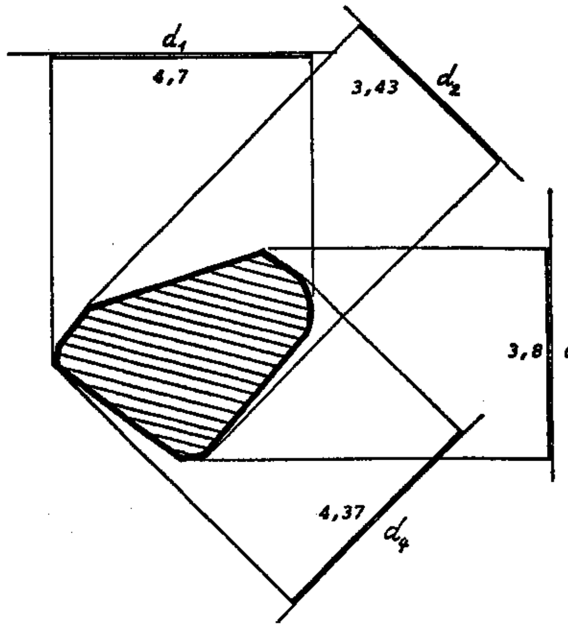
Cette formule se généralise, en géométrie intégrale, à toute surface convexe:



Le périmètre d'une surface plane convexe est égal à π multiplié par la "moyenne" de tous les diamètres de la surface.

Comment obtenir ces diamètres ?

En projetant la surface dans toutes les directions ! Si vous ne le faites que dans quelques-unes, vous obtiendrez une approximation du périmètre réel.



On a ici une moyenne des quatre diamètres égale à : $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)/4$ soit 4,08 cm multiplié par π : 12,81 cm pour un périmètre réel de 12,85cm, à peu près .

En fait, ces mesures sont les applications à $\mathbb{R}^2$, d'un résultat plus général de géométrie intégrale, trouvé par Cauchy - Minkowski, et donnant la mesure de la surface latérale d'un corps convexe dans un espace de dimension n:

c'est le produit d'une constante C_n par la moyenne des mesures des projections de ce corps sur tous les hyperplans de $\mathbb{R}^n$.

Quid de cette constante ?

Elle s'obtient par une formule récurrente de la façon suivante :

$$C_n = \frac{A_{n-1}}{V_{n-1}} = (n-1)\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}$$

où A_{n-1} et V_{n-1} désignent l'aire et le volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$.

On a, directement :

$$C_n = (n-1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx$$

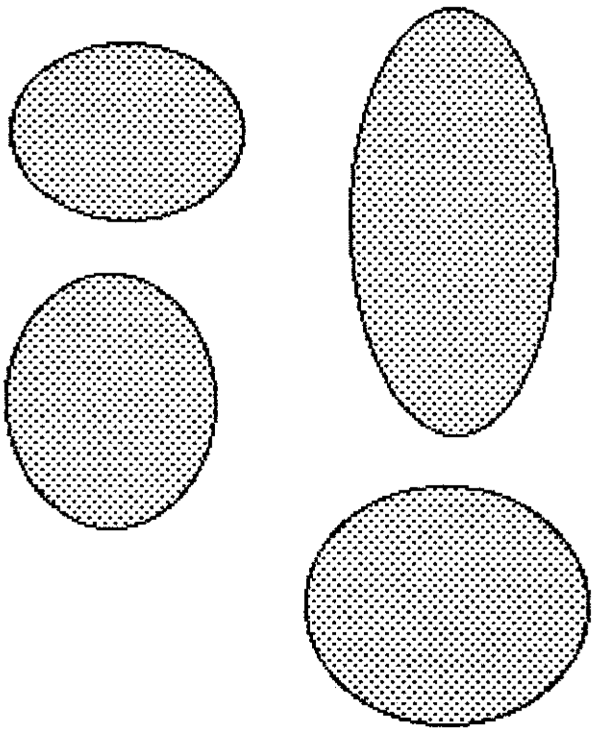
Vous pouvez le vérifier pour IR et $\mathbb{R}^2$!!

LA SURFACE D'UN ŒUF !!

Problème : Combien mesure la surface d'un œuf?

Cela vaut bien la longueur de la nouille !

Les résultats précédents doivent permettre d'approcher le résultat par une succession de projections par un faisceau de lumière parallèle, sur une feuille de papier. On passe ainsi à la dimension inférieure.



On fait la moyenne des mesures de ces surfaces, on multiplie par la constante ad-hoc et l'œuf est dans le sac !

Mais au fait, cette constante, c'est quoi?

Pour une ligne du plan, c'est un demi,

pour un périmètre de surface plane, c'est π,

mais dans l'espace ?

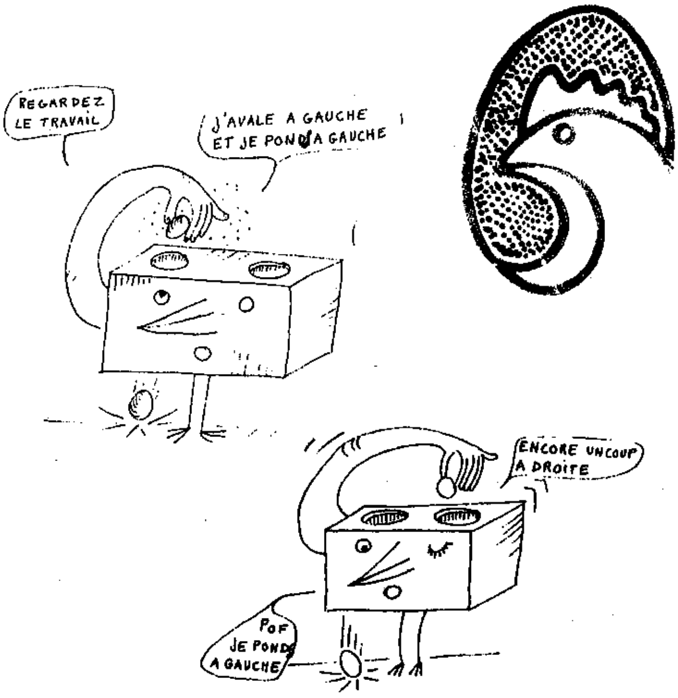
Deux façons de s'en sortir , la formule ou le cas particulier bien connu :

- la formule : $C_n = (n-1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx$.

Elle s'utilise ici pour n=3 !!!

- le cas particulier : la surface d'un œuf très particulier, une boule de rayon unité. Ses projections, dans toutes les directions, sont toujours les mêmes : un disque de rayon unité.

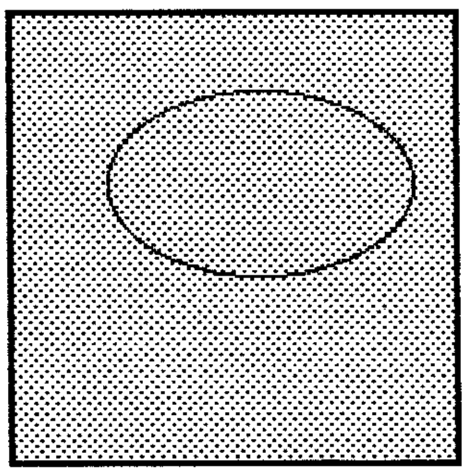
Vous avez trouvé ? Oui !!! c'est pas π, c'est 4 . Il ne reste plus qu'à mesurer les surfaces projetées. Avez-vous une idée ?



Où l'on retrouve Monte-Carlo.
Des points au hasard dans un carré.

Dessinez un carré de 10 sur 10 centimètres. Placez, au hasard, 100 points dans ce carré. Attention!! au hasard!!! Le hasard se construit grace à une liste de nombres pseudo-aléatoires.

Tirez de cette liste 200 nombres entiers compris entre0 et 99. A chaque couple de nombres faites correspondre un point du carré en prenant le millimètre comme unité.



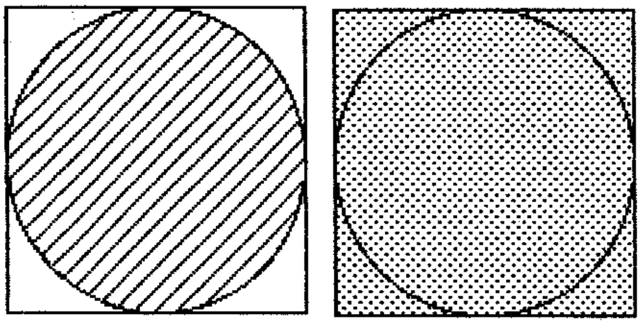
Combien y a-t-il sur l'ombre projetée de l'œuf ? Par rapport aux 100 points jetés au hasard sur le carré, la proportion de points sur l'ombre est une bonne approximation du rapport des aires des deux surfaces: le carré et l'ombre.

Multipliez les mesures, multipliez le nombre de points et vous aurez une approximation encore meilleure de la mesure réelle de cette ombre..

Où l'on retrouve 3,14159...

La méthode précédente, utilisée, pour mesurer une surface plane quelconque, est une excellente simulation pour retrouver l'aire d'un disque et, comme chez les Grecs, son rapport au carré qui l'enveloppe au plus près .

Un carré de coté 10 cm,
un disque de diamètre 10 cm.



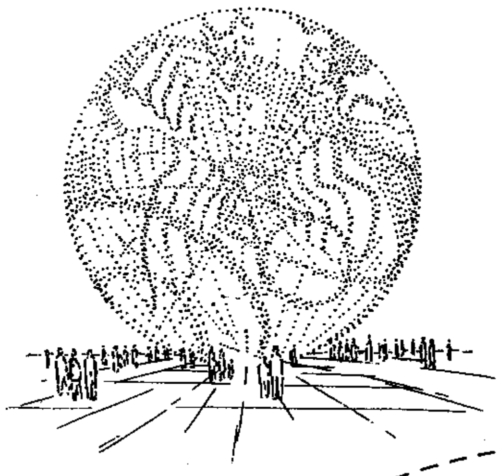
Et des points, au hasard.
Qui a-t-il de changé par rapport à la question précédente me direz-vous ? Apparemment rien.

Sauf que tout peut être traité par calculatrice et petite programmation :

Chaque fois qu'un couple de nombres est tiré au hasard, vous pouvez faire tester par votre machine si le point correspondant est à l'intérieur ou à l'extérieur du disque. Ajoutez un compteur à votre programme et vous verrez votre suite de rapports se rapprocher petit à petit de $\pi/4$.

Pour simplifier, vous pouvez encore simplifier la figure et n'en prendre que le quart.

Cette méthode peut aussi être utilisée pour calculer le volume d'un corps dont on connaît l'équation de la surface. Par exemple une boule.

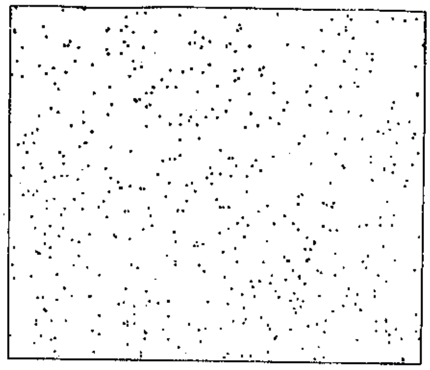


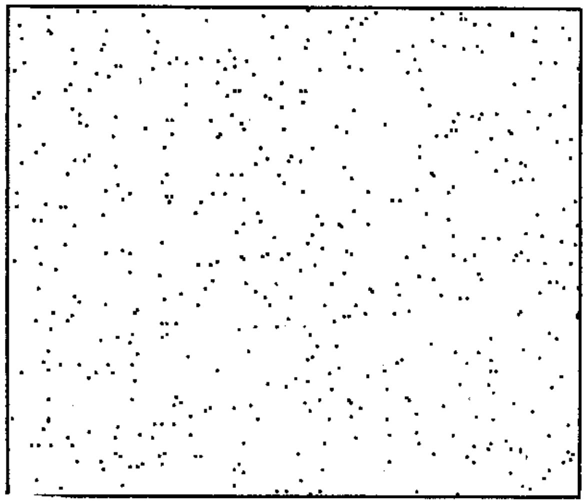
Où l'on retrouve la touche RANDOM

Une bonne méthode pour tester la qualité des suites de nombres pseudo-aléatoires est le remplissage d'un carré par des points aléatoires.

Voici deux exemples de tels carrés.

L'un est rempli à partir d'une belle fonction périodique et pas l'autre. Pouvez-vous deviner lequel ?



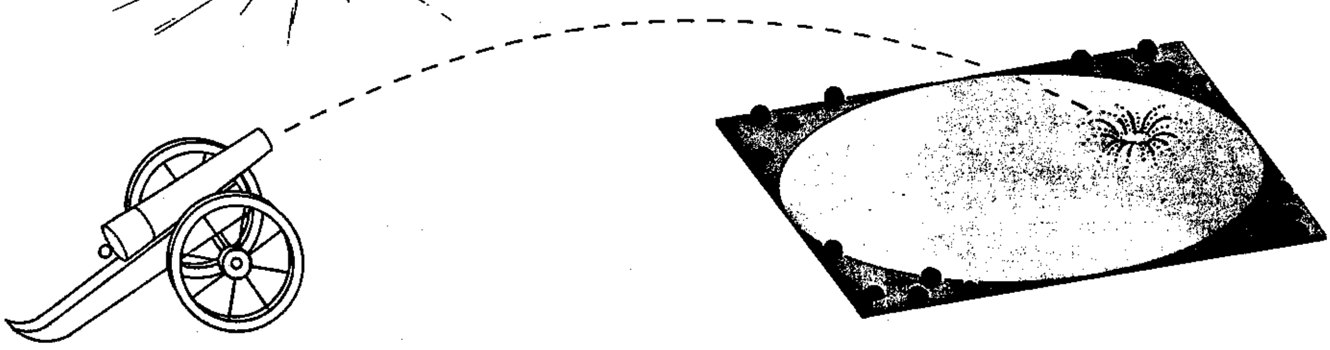


En laissant les points s'accumuler dans le carré, vous verrez des zones d'accumulation se former ou des cycles se constituer plus ou moins rapidement, signes de régularités .

Plot-Matériel:

Vous trouverez dans ce journal deux carrés de 500 et 1000 points aléatoires. Polycopiez-les ou photocopiez-les sur un ou deux transparents, en les ag randissant si vous le pouvez. Attention aux erreurs de ... photocopie : des points peuvent apparaître en plus si vos instruments sont tachés !!

NB : les carrés sont tels qu'en les agrandissant vous obtiendrez des carrés de cotés 20 cm. ©



AU RYTHME DES ALGORITHMES

RANDOM à HASARD , ce qui appartient à l'aléatoire.

Random semble être un de ces nombreux mots du français médiéval qui nous revient tout droit d'Angleterre entouré d'une progéniture douteuse : randomisation, randomiser (voir votre Larousse ou Robert), fruit d'une cure de jeunesse qu'il vaut mieux oublier.

Au XIième siècle, Randon donnera randonnée qui signifie "course impétueuse". L'impétuosité est liée aux aléas de l'impulsion, un mouvement de type brownien en quelque sorte.

Alea jacta est , et allons-y !

Les primitives RANDOM et HASARD,selon les langages, génèrent des nombres aléatoires.

On peut faire comprendre aux élèves le fonctionnement de ces primitives en leur proposant des algorithmes simples qui produisent des suites de nombres aléatoires. Par exemple :

1. Choisissez un décimal compris entre 0 et 1, ayant au moins cinq décimales (ex : 0,72131)
2. Multipliez-le par 137 (on trouve 98,83043)
3. Otez la partie entière (on obtient 0,83043)
4. Prenez les quatre premiers chiffres de la suite décimale (8043)
5. Retournez en **2 avec** le résultat de **3** .

On obtient, avec cet exemple, la suite
8304 7689 3406 6717 0352 ...

Cette méthode est tributaire du multiplicateur (ici 137) appelé le générateur etdu nombre de départ, le gène. On comprend mieux, par exemple, pourquoi la primitive **random** du basic Thomson donne toujours les mêmes nombres aléatoires. Cela pourrait être évité si le générateur se mettait en route à l'allumage de l'ordinateur et non à l'appel de la touche RND.

Un palliatif consiste à introduire une boucle d'affectation y<-- RND avec tout test d'arrêt : " appuyer sur une touche ou arriver à une valeur donnée par vous ou prise par le programme".

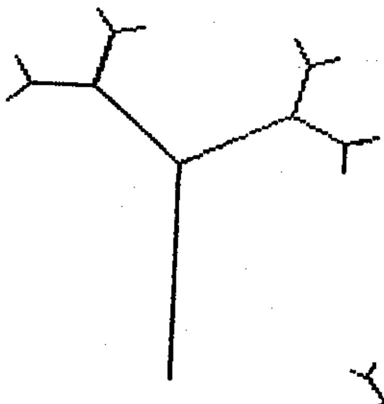
L'ordinateur simule donc de façon délibérée et artificielle un contexte pseudo-aléatoire : des résultats déterministes miment l'aléatoire .

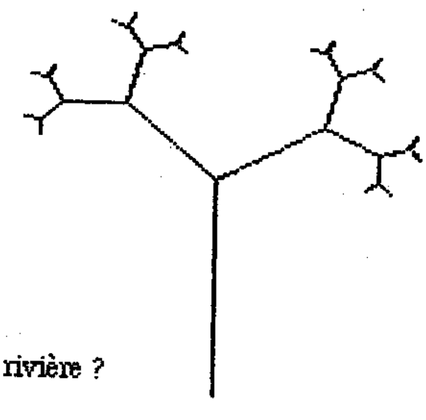
Ce contexte est rarement utilisé directement et consciemment par les élèves qui utilisent peu souvent, trop peu souvent, la touche Random.

Plongez dans l'aléatoire !

L'enseignant est mieux placé pour utiliser le hasard avec ses programmes ou ses logiciels .
En voici quelques exemples :
* Entraînement au calcul par des exercices répétitifs (génération de nombres différents pour un même modèle de calcul),
* Travaux géométriques : placer des points au hasard sur l'écran pour favoriser l'énoncé de propriétés générales puis leurs démonstrations,
* simulations de la réalité (cf articles sur hasard et simulations).

Développons ici deux de ces simulations :
* le jet de dés, de pièces, ...
* la représentation d'une réalité : arbre, côte maritime, montagne, réseau fluvial, etc ... à partir du modèle des fractals très à la mode actuellement.





Arbre fractal ou rivière ?

Séries statistiques et modèle probabiliste: Demandez le programme !!

Reprenons l'étude sur l'enfant et le hasard :

Effectuer des tirages avec remise dans un sac contenant cinq pions, trois blancs et deux noirs.

Tirer un noir correspond à tirer 1 ou 2 parmi les entiers compris entre 1 et 5.

procédure " tirage "

```
POUR TIRAGE
DONNE "N O DONNE " B D DONNE "NT "O
TIRE
FIN
POUR TIRE
SI :NT = 100[STOP]
DONNE "A 1 + HASARD 5
DONNE NT 1 + :NT
SI DU :A = 1 :A = 2[EC "NOIR DONNE "N 1 + :N]
                   [EC "BLANC DONNE "B 1 + :B]
EC PH :NT PH :N PH :B PH :N/ :NT :B/ :NT
SUITE
FIN
POUR SUITE
SI TOUCHE? [TIRE] [SUITE]
FIN
POUR LOIDESGRANDS NOMBRES
DONNE "N 0 DONNE "B D DONNE "NT "O
TIR
FIN
POUR TIR
SI :NT = 50000 [STOP]
DONNE "A 1 + HASARD 5
DONNE "NT 1 + :NT
SI DU :A = 1 :A = 2 [DONNE "N 1 + :N] [DONNE "B 1 + :B]
SI EGAL? RESTE :NT 100 0 [EC PH :NT PH :N PH :B PH :N/
                                          :NT :B/ :NT]
TIR
FIN
```

N et B sont les nombres de pions noirs et blancs tirés pour NT tirages. Les procédures TIRAGE, TIR, SUITE permettent aux élèves de simuler l'expérience tirage par tirage pour NT = 100.

Dans un deuxième temps, on peut approcher la loi des grands nombres et obtenir l'écriture des résultats tous les cent tirages par exemple.

Quand on est pressé, on peut obtenir ceci :

NT	N	B	Noirs	Blancs
20000	7989	12011	0,39945%	0,60055%
30000	11999	18001	0,399966	0,600033

Il reste aux élèves à bien percevoir et utiliser cette simulation, et à juger de l'apport de la procédure "loi des grands nombres" par rapport à "tirage"

D'autres procédures peuventainsi être construites pour simuler un lancer de dés et obtenir "au moins 5" ou " au moins 7" quand on lance le dé deux fois de suite, ou pour que le second résultat soit supérieur au premier, pour que 6 soit obtenu à au moins l'un des lancers, ...

On peut imaginer aussi des lancers de pièces, ... Les situations ne manquent pas, il reste à en faire l'analyse didactique et de voir comment se met en place le modèle probabiliste sous-jacent.

Arbres (ou rivières) fractalisés.

Le modèle probabiliste d'un arbre fractal (et hivernal, à cause du manque de feuilles!) permet d'écrire la procédure suivante :

```
POUR ARBRE :L
SI :L < 10 [STOP]
AV :L
TD 60 ARBRE :L/2
TG 105 ARBRE :L/2
TD 45 RE :L
FIN
```

Cet arbre qui, chaque année, produit deux nouvelles branches qui s'écartent exactement de 60° et 45° de la précédente, reste figé dans sa régularité. L'introduction de la primitive HASARD permet d'engendrer des irrégularités aussi foisonnantes que dans la nature (cf pour cela les travaux de B. Mandelbrot sur les Fractals . Ed. Flammarion)

```
POUR ARB :L :A :B
SI :L < 10 [STOP]
AV :L
TD :A
ARB :L/[1.1 + .1 *HASARD 10] 10 + HASARD :A 10 +
                                           HASARD :B
TG :A + :B
ARB :L/[1.1 + .1 *HASARD 10] 10 + HASARD :A 10 +
                                           HASARD :B
TD :B RE :L
FIN
```

Cette procédure rend aléatoire l'écartement des branches et leur longueur.Les données initiales peuvent également être déterminées au hasard.

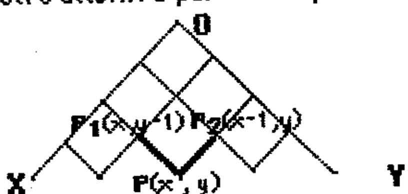
Vous pouvez aussi obtenir aléatoirement 2, 3 ou 4 branches à chaque nouvel appel récursif! Envoyez-nous vos solutions, le PLOT les publiera.

Planche de Galton et analyse récurrente

Une rapide analyse récurrente de la planche de Galton, étudiée par ailleurs, permetdedéfinir l'application NC de IN* dans IN qui, aux coordonnées d'un point associe le nombre de chemins pour y arriver:

- $x = 0$ ou $y = 0$: $NC(x, y) = 1$
- sinon : $NC(x, y) = NC(x-1, y) + NC(x, y-1)$

car P peut être atteint à partir des points P1 ou P2



On retrouve, bien sûr, les coefficients du triangle de **Pascal** : NC(x , y) représente le nombre de combinaisons de x ou y éléments dans un ensemble à x + y éléments .Et voici la procédure récursive:

```
POUR NC :X :Y
SI DU EGAL? :X 0 EGAL? :Y NC 0 [RENDS 1]
RENDS SOMME NC :X-1 :Y NC :X :Y-1
FIN
POUR PASCAL :N :P
VT DONNE "TEXTE PH "C MOT CAR 40 MOT :N MOT" ,
                                       MOT :P CAR 41
EC PH :TEXTE PH" = NC :P DIFF :N :P
FIN
```

Voir bibliographie page 48

mc

A-PLOT-STROPHE

A tous ceux qui ont apprécié son premier livre (cf aplotstrophe n° 34) et, bien sûr aux autres, Jacques Lubczanski propose, aux éditions Cédic-Nathan, treize "nouvelles friandises" mathématiques qui devraient faire le régal de chacun.

Son livre s'adresse aux enseignants comme aux élèves et j'ai pu voir avec étonnement des élèves de quatrième se jeter sur la première de ces friandises et vouloir tout savoir sur "Comment réussir le triangle quel-con-que".

C'est un signe positif de l'évolution de certains auteurs, pas assez nombreux encore, qui veulent rendre les mathématiques accessibles à un large public: construire des textes que le lecteur, même non "averti" puisse entamer et comprendre en partie.

> Un lecteur "averti" en vaut deux ! Mais un lecteur, même "averti", ne fait au plus qu'un acheteur !! Il est étonnant que les éditeurs et les auteurs de livres de mathématiques ne s'en soient pas encore rendu compte !!! ndlr.
>
> Le problème posé, au moins, doit pouvoir être compris par le lecteur, même s'il ne saisit pas toujours toutes les finesses des solutions.
>
> Reste aux auteurs à faire aussi l'effort de bien différencier pour le lecteur ces deux parties: ce qui peut être lu comme un roman sans connaissance particulière et ce qui demande, par exemple un papier et un crayon.

Revenons aux treize friandises.

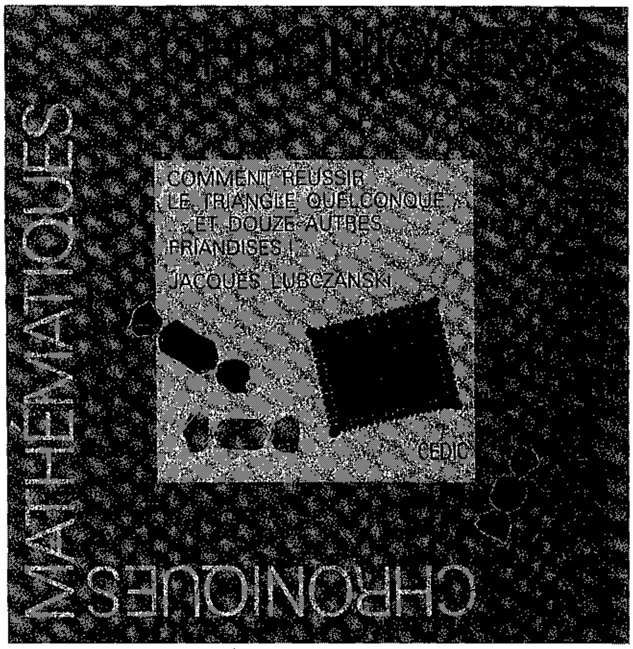
Une présentation plus agréable, moins éclatée que dans le premier livre. Les problèmes sont suivis de solutions détaillées, le tout fort bien illustré de dessins " à la Tonton Lulu".

Comme dans le livre précédent, tous les problèmes peuvent être étudiés avec, au plus, les outils mathématiques d'un élève de lycée.

Quelques-uns des problèmes ont déjà été abordés dans le bulletin vert de l'Apmep ou dans des journaux régionaux comme l'Ouvert, Sans tambour ni trompette ou le PLOT.

Dernière remarque : l'auteur cite chaque fois sources, premières publications et origine de l'idée quand elle n'est pas de lui. Attitude qui est d'autant plus rare qu'elle mérite d'être remarquée.

Alors, n'hésitez pas, si vous cherchez à renouveller votre garde-robe pédagogique, faites -le aussi acheter par votre documentation pour qu'il profite à tous.



Titres de douze des treize friandises :

Sur proposition de l'auteur, vous trouverez ci-après le début de la treizième qui est en fait, et c'est logique, le début de la neuvième !!!

1. Comment réussir un triangle quelconque ?
2. Comment partager (équitablement) un gâteau?
3. La recette du "Kaprékar".
4. Un peu, beaucoup, énormément,...,pas du tout?
5. Le centre de gravité à toutes les sauces.
6. Les abaques attaquent !
7. Qu'est-ce qu'un petit gros ?
8. Lutte des classes dans un nuage.
9. La recette du capitalisme sauvage !
10. Les "caisses rapides" des supermarchés.
11. Et pourtant, elles tournent !
12. Mais où est le troisième arbre ?
13. Maths en kit !

Vous remarquerez qu'une bonne partie de ces sujets ne sont pas sans rapport avec ce dossier.

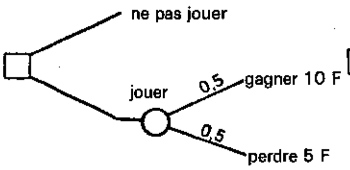
> Avant de passer au prélude de la neuvième, voici, pour finir, **trois petits problèmes-chocs** :
> - Tirez, au hasard, trois nombres entiers. Quelle chance avez-vous pour que ces nombres soient les mesures des cotés d'un triangle ... quelconque ? (nous vous renvoyons au titre n° 1 et au Nouvel Archimède n°9 de septembre 86).
> - Coupez 3 barres suivant les longueurs ci- dessus Quelle chance avez-vous de trouver ... le centre de gravité du triangle formé par ces 3 barres !!! ?
> - Tirez au hasard 2 nombres entiers. Quelle chance avez-vous pour qu'ils soient premiers entre eux ?

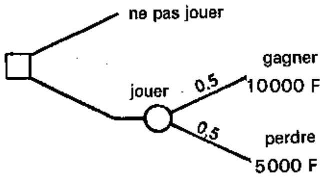
LA RECETTE DU CAPITALISME SAUVAGE !

ou jouer avec son argent ...et celui des autres

JOUER OU NE PAS JOUER :

Que décidez-vous dans les deux cas suivants ?





Les carrés □ représentent la décision à prendre ; les ronds ○ le tirage au sort ; et les nombres les probabilités.

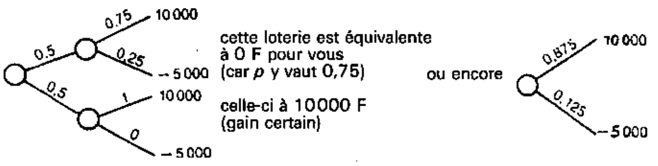
Ces deux problèmes sont identiques, aux sommes mises en jeu près.
Dans le premier cas vous pouvez décider de jouer. Dans le second vous pouvez hésiter. Pourtant, dans les deux cas, le calcul de l'espérance mathématique donne 0 si vous ne jouez pas et un gain espéré (2,5 F et 2500 F) si vous jouez : il «*faut*» donc jouer !

Tout ceci pour dire que notre attitude face à l'argent dépend des sommes mises en jeu, et que le calcul de l'espérance mathématique est peut-être insuffisant pour prendre une décision.

Pour pallier cette insuffisance, on va essayer de coder, de chiffrer, votre attitude face à l'argent et au risque d'en gagner (ou d'en perdre).

Le principe est simple : on va essayer d'attribuer une valeur subjective (et relative à l'individu qui doit prendre une décision), à tout gain et à toute perte, pour les sommes mises en jeu par le problème étudié.

Pour vous cette loterie est équivalente à la double loterie :

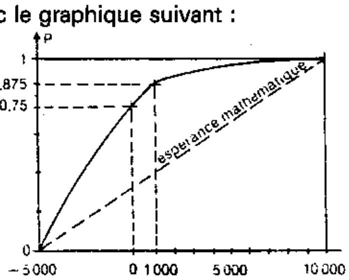


Car dans la loterie de gauche il y a une probabilité :
$0{,}5 \times 0{,}75 + 0{,}5 \times 1 = 0{,}875$ de gagner 10000 F
et $0{,}5 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0 = 0{,}125$ de perdre 5000 F).

On en conclut que si p vaut 0,875 dans la loterie (gagner 10 000/perdre 5 000), un billet vaut 1 000 F pour vous.

- A ce stade nous avons donc le graphique suivant :

On pourrait préciser la courbe tracée en vous posant d'autres questions, relatives à d'autres loteries construites sur le même modèle.



Notons au passage que la courbe d'un individu ne raisonnant qu'en termes d'espérance mathématique serait la droite tracée en pointillé.

Plus votre courbe s'éloigne de cette droite, plus forte est votre aversion pour le risque.

Pour des individus aimant jouer au point de payer pour cela (vous n'avez jamais vu ça ?), la courbe passerait en dessous de la droite.

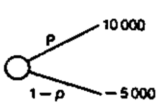
A partir de cette courbe, on peut calculer la valeur, pour vous, de toute somme comprise entre – 5000 et + 10000.

Votre fonction d'indifférence

Reprenons notre problème de décision : jouer ou ne pas jouer à une «*loterie*» qui me fait gagner 10000 F une fois sur deux, perdre 5000 F une fois sur deux.

Imaginons que les probabilités de gagner 10000 F et de perdre 5000 F ne soient plus égales :

Notons p la probabilité de gagner 10000 F.
Il est sûr que pour $p = 1$, vous accepteriez de jouer : c'est un gain certain de 10000 F.



On peut également affirmer que pour $p = 0$, vous refusez de jouer : c'est une perte certaine de 5000 F. Si vous aviez en poche un billet pour une telle loterie, vous le donneriez avec joie à quiconque en voudrait !

Si j'augmente petit à petit la valeur de p, en partant de 0, et si je pose toujours la même question : «*Vous jouez ou non ?*» il est raisonnable de penser qu'à partir d'une certaine valeur de p, vous direz oui.

En d'autres termes, qu'à partir d'une certaine valeur de p, vous ne donneriez plus votre billet de la loterie : il commencerait à avoir une certaine valeur, pour vous.
Ce «*seuil*» dépend de chacun, de son goût du risque et de ses moyens financiers.

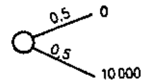
- A titre d'exemple, supposons que ce soit pour $p = 0{,}75$. On est alors dans la situation suivante :

si la probabilité p est	0	0,75	1
un billet pour la loterie vaut pour vous :	– 5000	0	10000

On va compléter ce tableau pour suffisamment de valeurs de p entre 0 et 1 pour être capable de tracer une courbe.

Pour cela, on va introduire des loteries annexes et on va vous demander combien vaut pour vous un ticket pour une telle loterie, combien vous accepteriez de le vendre : continuons notre exemple avec la loterie suivante :

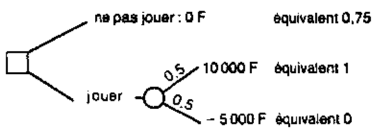
Un billet pour une telle loterie vaut quelque chose, puisqu'on ne peut pas perdre !
Supposons que, après y avoir réfléchi, vous acceptiez de le vendre, mettons 1000 F.



Si donc vous étiez face à un problème de décision où des sommes de cet ordre étaient en jeu, il suffirait de remplacer ces sommes par votre «*indice*» personnel lu sur la courbe, pour évaluer votre choix.

- Revenons à notre problème initial :

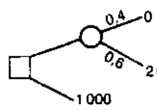
- ne pas jouer, pour vous, est équivalent à l'indice 0,75 ;
- jouer, pour vous, est équivalent à :
$0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 0 = 0{,}5$



Conclusion : vous ne jouez pas à cette loterie (ça on s'en doutait un peu, mais la réponse n'avait pas encore été donnée).

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet un chiffrage de toute loterie, en respectant l'attitude du «*décideur*» face au risque et à l'argent.

- Autre exemple :
que choisirez-vous dans le cas présenté ci-contre ?



On calcule les équivalents d'après votre courbe : pour 2000, on lit 0,9, d'où pour la branche supérieure :
$0{,}4 \times 0{,}75 + 0{,}6 \times 0{,}9 = 0{,}84$ à comparer avec l'équipement de 1000 qui est 0,875.

Conclusion : la certitude de gagner 1000 F pour vous est préférable à la loterie : «gagner 2000 F avec une probabilité 0,6 ou ne rien gagner avec une probabilité 0,4.»

Biblio sur aléatoire et algorithme

- Arthur ENGEL :
Math d'un point de vue algorithmique, ou, en réédition, Math et informatique.
Edition Cédic-Nathan - 1979 ou 1986.

- Roger SEDGEWICK : Algorithms.
Edité en anglais par Addison-Wesley - 1983.

- D. KNUTH : the art of computer programing.
Edité en anglais par Addison-Wesley - T1 - 1969.