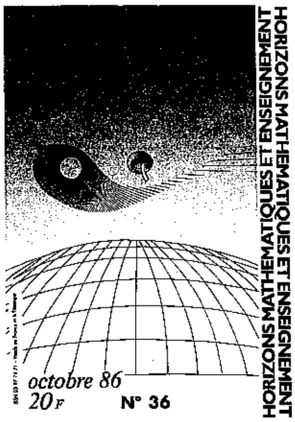


Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi
Comité de rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Michel Clinard, Jacqueline Collet, Roger Crépin, Georges Le Nezet, Serge Parpay, Raymond Torrent,
Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault
Secrétariat
Madeleine Schlienger
Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin
Publicité
Pascal Monsellier
Abonnements
PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2
Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F
Photocomposition et maquette
Graphi'Style - Orléans
Photogravure et impression
Fabrègue-Imprimeur, Limoges
Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471
Editeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, Nantes, Rennes et Rouen avec le concours du Ministère de la Coopération
Diffusion
Adécum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

PLOT : horizons mathématiques et enseignement

sommaire

éditorial

Rentrée 86

Comme tous les ans des programmes changent, de nouveaux manuels arrivent, les problèmes de la classe aussi.

Pour l'enseignant cela se traduit par la recherche d'activités qui font un pont entre les commentaires officiels, les propositions de l'Apmep ou des Irem et les recommandations de la Coprem.

Dans ce numéro nous vous proposons d'analyser comment les mathématiques, en tant qu'outil, servent à étudier à travers les nouveaux programmes, des sujets aussi différents et interdisciplinaires que : la recherche du centre de la France, les rosaces ou le pilotage automatique de grues robotisées.

INFO_ DERNIERES

La Villette : une fresque interactive de 30 mètres de long, 90 m² et 100 m³ sur l'histoire et la nature des Mathématiques (ouvert depuis juin 86).

"Horizons Mathématiques" :

- *En France, les régions de **Brest** puis **Rennes** l'accueillent jusqu'en janvier 87 (renseignez-vous auprès des régionales Apmep).*
- *En Afrique : le Cameroun et la Guinée-Conakry accueillent chacun un exemplaire en novembre-décembre.*
- *En Europe : après le Deutsches Museum de Munich de mai à août c'est Oldenburg qui l'accueille puis Karlsruhe.*
- *Berkeley, août 86 : le Congrès International de Mathématiques décerne **3 médailles Fields** à Gerd Faltings (cf PLOT n° 27), Michael Freedman et Simon Donaldson pour leurs travaux en géométrie algébrique ou de dimension 4.*

OU EST LE CENTRE DE LA FRANCE ?

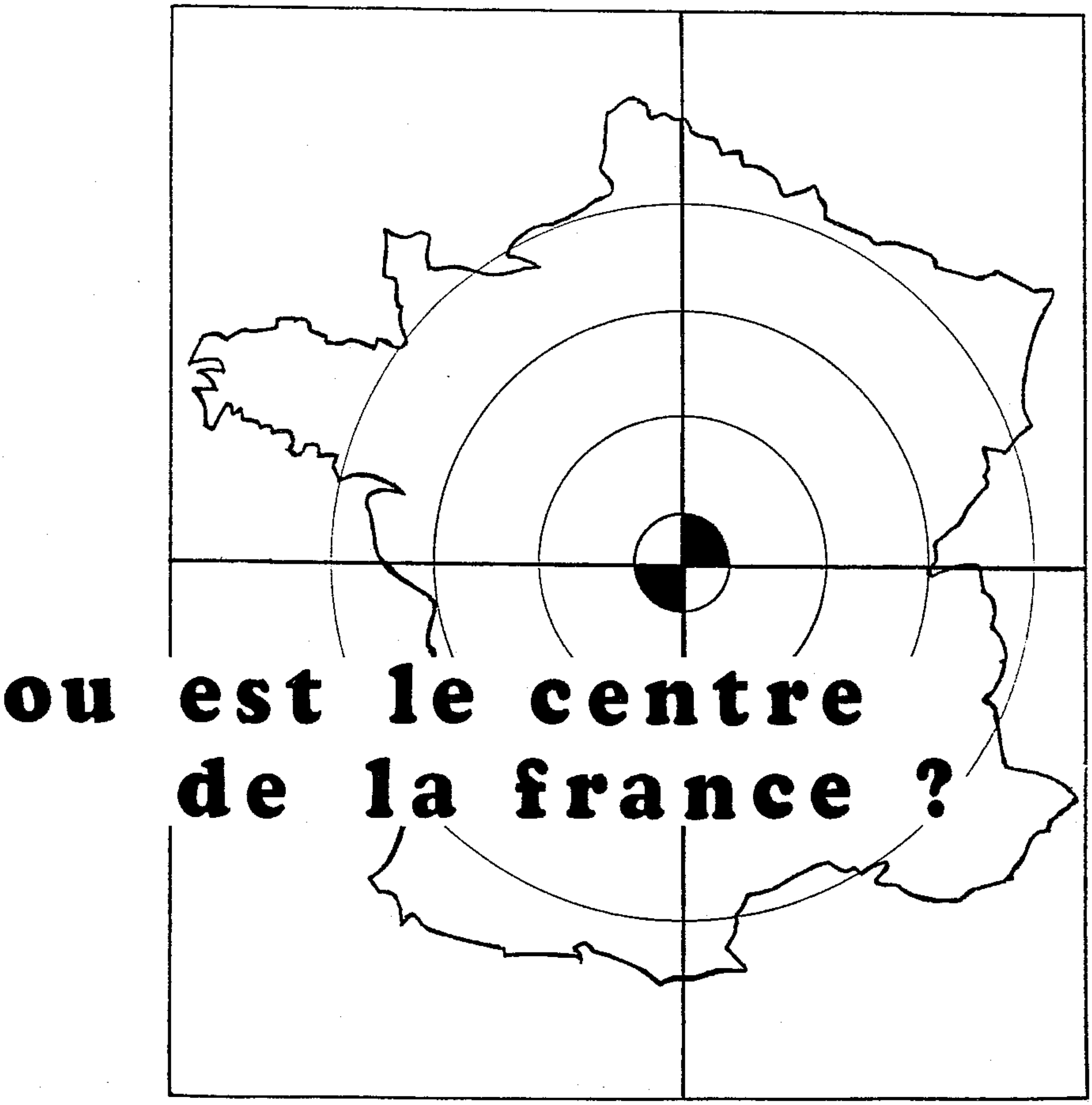
Jacques LUBCZANSKI - Cachan

Où est le centre de la France ?
Question a priori plus anecdotique que mathématique :
la presse se fait régulièrement l'écho de la prétention de tel ou tel village
à être le centre unique et indiscutable de la France.

Pourtant, si on y regarde de plus près, l'anecdote n'est pas innocente
et la mathématique n'est pas si simple :

l'anecdote renvoie à l'importance du centre : on entre dans les champs
de l'histoire, de la sociologie, de la philosophie ;
la mathématique du centre part de la géométrie élémentaire pour se retrouver
en calcul intégral ou en théorie des graphes.

Où est le centre de la France ? c'est finalement un exemple typique
de problème posé aux mathématiques par la société...



OU EST LE CENTRE DE LA FRANCE ?

SOMMAIRE

PREAMBULE

PORTRAIT RAPIDE DU CENTRE

"Le centre de gravité de la France est entre Paris et son Armée"

(Maxime)

"Le premier (principe fondamental) est le suivant : ramener le poids de la force ennemie à des centres de gravité aussi peu nombreux que possibles, à un seul s'il se peut"

(Clausewitz)

"La Convention Nationale est le centre unique de l'impulsion du gouvernement"

(Décret du 4 décembre 1793)

"Pour le cercle, le problème des causes ne présente aucune difficulté : il est engendré par un centre, son histoire part du point. Ce point rayonne dans toutes les directions"

(P. Klee)

On pourrait multiplier les citations à l'infini : le centre est omniprésent ! Il intervient pour l'essentiel sous deux aspects :

C'est d'abord un point de pouvoir : tout converge vers le centre ; le centre (nerveux) reçoit toutes les informations nécessaires à l'action. Tout part du centre : pour agir sur un corps, on agit sur le centre ; tout pivote, tout s'articule autour de ce point.
En Chine, l'Empire du milieu s'est aussi appelé Royaume du Centre. Il faut un centre au monde, à notre univers : cela a été la Terre ; c'est à présent le soleil.

C'est aussi un point représentatif : le point moyen, qui résume le tout. Un point d'équilibre, entre la gauche et la droite (d'après une affiche récente, 43 % des français sont... au centre !) : le centre de symétrie. Etre au centre, c'est être comme tout le monde : une nouvelle catégorie de français s'appelle les "recentrés".
La force centrifuge serait-elle une force du mal ?

PREMIERE PARTIE

LE CENTRE GEOGRAPHIQUE

AU CENTRE

Et si l'usage d'une carte était l'invariable témoin d'une mise à mal de la conscience ? Le voyageur égaré et l'évanoui revenu ont en commun la même phrase, **où suis-je ?** dont on ne sait si elle est une question ou un constat. Je suis perdu, j'ai perdu connaissance, je suis au milieu d'un territoire que borne l'horizon, j'en parcours du regard la circonférence, je suis le pivot d'un monde dont je ne sais rien, qui reste étrange et auquel je suis étranger. Où que je sois, l'horizon m'entoure et je suis au centre, souverain impuissant. Je me retrouve avec la carte, et le temps que je mets à identifier ma situation correspond à l'écart entre le lieu central du territoire et le point indifférent de la carte. Donc je me retrouve mais au prix de perdre ma centralité. Pour me remettre en marche, je dois abdiquer ma souveraineté. Deux cas extrêmes : je n'ai pas la bonne carte et je dois donc errer jusqu'à ce que mon horizon la recoupe ; le point où je suis est aussi le centre de la carte, je peux jouir alors de cette coïncidence - le plaisir des rois - mais sans bouger : un seul pas est un écart.

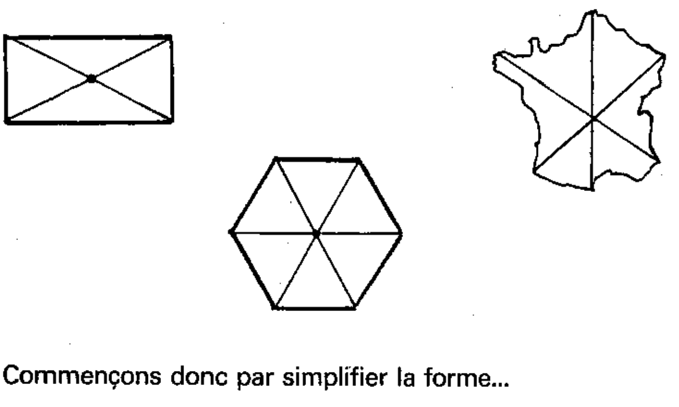
Pour ordonner cet écart, pour qu'il soit repérable, il faut un **Centre,** fonctionnel ou symbolique. Capitale administrative ou spirituelle qui permet aux minuscules égarées de se retrouver. Elire un député ou faire un pélerinage est révérence faite à ce point symbolique à quoi chacun délègue sa souveraineté perdue. La carte est un langage qui donne consistance à mon corps, elle lui donne un lieu, le réveille, et lui fait reprendre la route.

Jean Loup RIVIERE
in "Cartes et figures de la Terre"

Notre propos : où - et comment - les mathématiques situent le centre de la France ? Disons tout de suite qu'il y aura plusieurs réponses, chaque façon de poser la question amenant une ou plusieurs solutions.

A. QUESTIONS DE SYMETRIE

La France n'admet pas de centre de symétrie, qui serait le milieu de toutes ses diagonales. Comme c'est le cas par exemple pour un rectangle ou un hexagone régulier :



Commençons donc par simplifier la forme...

1. Quand la France se prend pour un rectangle

Premier ouvrage de référence, facile d'accès, le "QUID" : voici un extrait de l'article "France" :

On y encadre la France par deux méridiens et deux parallèles extrêmes, autrement dit on inscrit la France dans un rectangle, dont le centre sera le centre du pays :

La France continentale est située entre les 42,5° et 51° de latitude N. ; en longitude, elle s'étend du 5° de longitude O. au 8° de longitude E.

Points extrêmes du territoire continental.

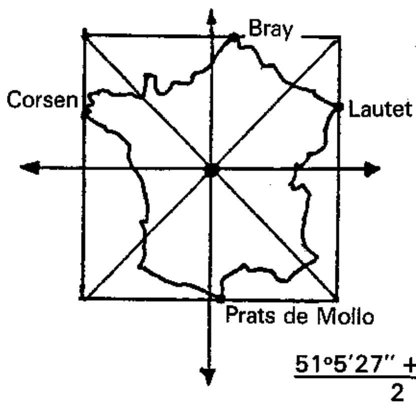
Nord : plage de Bray-Dunes près de Dunkerque (51°5'27").

Sud : montagne de la Bague de Bordeillat, près de Prats de Mollo (42°20').

Ouest : pointe de Corsen, à l'ouest de Brest (4°47'47" de longitude O.)

Est : embouchure de la Lauter, au nord de l'Alsace (8°1'47" de longitude E.). Distances maximales : Nord-Sud (Dunkerque-Prats de Mollo) 973 km ; Est-Ouest (Lauterbourg-Pointe de Corsen) 945,5 km ; Nord-Ouest-Sud-Est (Pointe de Corsen-Menton) 1 082 km.

Centre géométrique du territoire continental. Il est calculé comme étant le point de rencontre entre le méridien et le parallèle équidistants des 2 méridiens et des 2 parallèles cités ci-dessus (46°43'17" de latitude N. et 2°30'37" de longitude E. de Greenwich) : colline du Belvédère, à St-Amand-Montrond (Cher).



parallèle équidistant des extrêmes : sa latitude est la moyenne des deux latitudes extrêmes :

$$\frac{51°5'27" + 42°20'}{2} = 46°42'43"N$$

Méridien équidistant des extrêmes : sa longitude est la moyenne des deux longitudes extrêmes :

$$\frac{-4°47'47" + 8°1'47"}{2} = 1°57' E$$

Tiens, les chiffres du QUID sont faux !
Etonnant, non !

2. Quand la France se prend pour un hexagone

L'assimilation de la France à un hexagone n'est pas une idée nouvelle : voici un extrait de l'encyclopédie Larousse de 1936 :

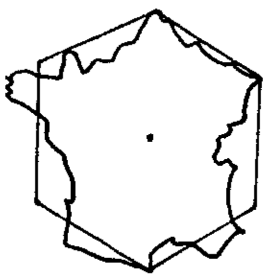
"La France présente une forme géographique massive et compacte. Elle dessine un hexagone régulier dont trois côtés sont baignés par la mer"

Pour se fixer les idées, traçons donc un hexagone régulier de surface égale à celle de la France (sur la carte) : puisque la superficie du pays est 551602 km^2 et que l'aire d'un hexagone régulier de côté a vaut :

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2$$

on en déduit : a = 461 km

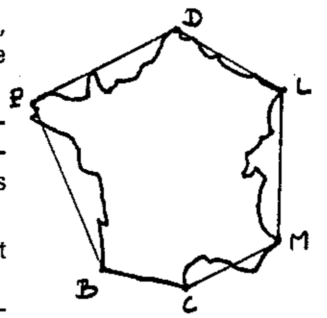
Il ne reste plus qu'à superposer l'hexagone et la carte : le centre de l'hexagone sera celui de la France.



Malheureusement, on ne peut pas faire coïncider les six sommets avec six points extrêmes du territoire : sur la figure ci-contre, on en a fait coïncider trois, et c'est le maximum.

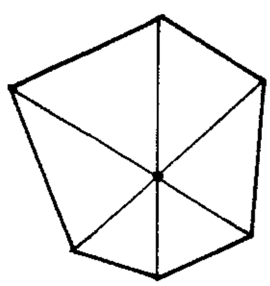
Il n'y a pas une façon évidente de placer l'hexagone, mais de nombreuses positions approximatives, et autant de centres approximatifs. Revenons plutôt à l'encyclopédie Larousse de 1936, qui précise les six sommets de l'hexagone :

Dunkerque, Lauterbourg, Menton, C. Cerbere, Bidassoa et la pointe St-Mathieu.



L'hexagone obtenu n'est pas régulier, mais est une bonne approximation de la carte, quoique plus grand en superficie.

Où est donc le centre de cet hexagone ?
Réponse : à l'intersection des diagonales



D'abord les diagonales ne sont pas exactement concourrantes, mais presque : à l'échelle de la figure ci-contre, cela ne se voit pas.

Ensuite, comme on avait pu l'observer au début de ce paragraphe, les diagonales sont loin de se couper en leur milieu.

Alors, peut-on encore parler de centre de symétrie ? Certainement pas.

Par contre, on peut calculer le centre de gravité de cet hexagone, par exemple en le décomposant en six triangles dont on calcule le "poids" (c'est-à-dire la surface) et le centre de gravité (point d'intersection des médianes).

Mais si on en est à calculer un centre de gravité, pourquoi ne pas le faire sur la carte initiale ?

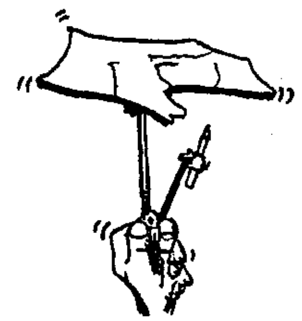
C'est en effet ce qu'ont essayé de faire tous les "chercheurs de centre", depuis l'abbé Théophile Moreux au début du siècle jusqu'à MM. Denègre et Pilkiewicz de l'I.G.N., en 1984, en passant par quelques autres centristes passionnés.

Passons donc en revue ces recherches : quels résultats, quelles méthodes, quelle précision ?...

B. QUESTIONS DE GRAVITE

1. Faites-le vous-même !

Ça n'est pas difficile : achetez dans le commerce une carte de France en plastique - vous savez, celles qui sont supposées aider les écoliers à tracer leurs fonds de carte -, et cherchez sur quel point elles tiennent en équilibre sur la pointe d'un compas.



A moins d'avoir des talents d'équilibriste, ce n'est pas très facile, ni très précis !

Une autre méthode classique consiste à suspendre la carte par un fil, à tracer la verticale obtenue, qui passe par le centre de gravité, et à répéter cette opération plusieurs fois : le centre est au point de concours des verticales tracées.

Enfin, la méthode la plus facile, dérivée des précédentes, mais évitant les problèmes d'attache du fil sur la carte, consiste à faire tomber la carte sur le bord d'une table, en la poussant doucement vers le bord : au moment où la carte bascule, l'arête de la table passe par le centre de gravité : on la trace et on répète l'opération.

Bon, tout ça n'est pas très précis mais cela dégrossit sérieusement le problème.

2. Il l'a fait lui-même !

Remplacez la carte en plastique format "écolier" par une carte collée sur du carton, à l'échelle 1/200 000, représentant un département, suspendez-la par un fil, notez la verticale et recommencez : vous obtiendrez le centre de gravité du département en question.

Connaissant, grâce au cadastre, les superficies de chaque département, et grâce à la méthode ci-dessus, l'emplacement de chaque centre de gravité (en relevant sa latitude et sa longitude) il ne reste plus qu'un calcul de moyenne pondérée pour trouver le centre de gravité de la France.

C'est exactement ce qu'a fait Georges Dumont en 1966, en consignant le tout dans un mémoire de 18 pages, que m'a aimablement transmis la mairie de Chazemais (Allier).

La démarche est scientifique : critique de la méthode, évaluation de la précision et discussion des résultats obtenus.

- **Critique de la méthode :** c'est une méthode expérimentale : on augmente donc les risques d'erreur. Elle est basée sur une carte donc dépend a priori de la projection cartographique utilisée : mais à l'échelle d'un département l'erreur est faible. D'autre part, le calcul final par latitude et longitude ne dépend plus de la carte.

- **Evaluation de la précision :** il faut tenir compte de la précision de découpage de la carte du département : les traits sur la carte ont une épaisseur. Il faut aussi tenir compte de la déformation possible par l'humidité. Enfin, dans certains cas, le tracé de la frontière prête à confusion : par exemple, pour la baie du Mont Saint-Michel : à marée haute ou à marée basse ? Au total, M. Dumont arrive à une approximation à 100 m près.

- **Discussion des résultats** : certains parti pris sont nécessaires, qui modifient le résultat : M. Dumont tient compte des îles, mais laisse le choix pour la Corse et les DOM-TOM :

• Le centre de la France métropolitaine est situé sur le territoire de la commune de Vesdun (Cher).

• Le centre de la France, Corse comprise, est situé à une dizaine de km du précédent, sur la commune de Chazemais (Allier).

• Le centre de la France, Corse et DOM-TOM compris (avec une approximation moins bonne : quelques kilomètres) est... au Nord Ouest de l'Espagne, en Galice !

3. Enfin l'ordinateur vint...

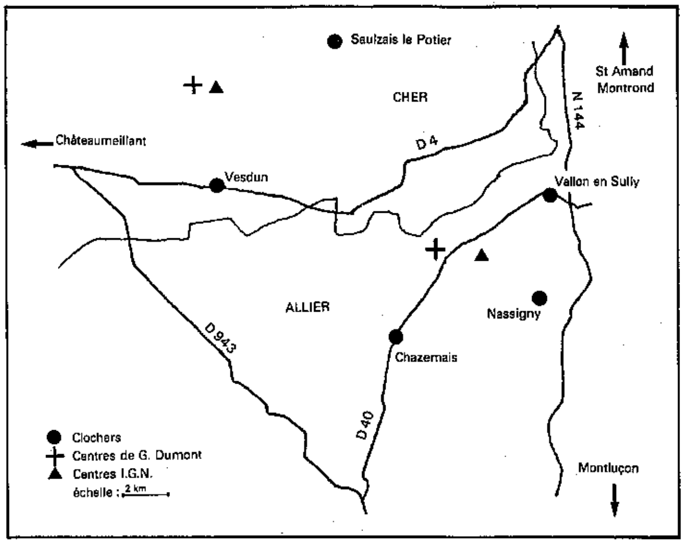
Si nous avons passé quelque temps sur l'étude de G. Dumont, c'est que c'est la plus fine et la plus scientifique de toutes les études "artisanales" dont j'ai eu connaissance.

En 1984, le journal "Le Monde" a demandé à l'I.G.N. si on pouvait faire mieux. La réponse ne se fit pas attendre, car l'I.G.N. possède une base de données suffisante pour traiter la question par l'informatique. La voici, donnée par C. Pilkiewicz le 20.07.84 :

• Le centre de la France métropolitaine est situé sur la commune de Vesdun au lieu dit "La Coucière" (et à 500 m de la commune voisine, Saulzais le Potier).

• Le centre de la France, Corse comprise, est au lieu dit "La brande du Murat", à la limite des communes de Vallon en Sully et de Nassigny.

Dans les deux cas, il y a environ 1 km d'écart avec les conclusions de G. Dumont ! (dernière précision : dans les calculs de l'I.G.N., on n'a pas tenu compte des lacs, alors qu'il semble que cela ne soit pas le cas dans l'étude de Dumont).



INTERMEDE : QUAND LA PRESSE S'EN MELE...

Au point où nous en sommes, cinq villages se retrouvent au centre de la France : Vesdun, Saulzais le potier, Chazemais, Vallon en Sully et Nassigny.
Les deux derniers, membres de fraiche date de ce club très fermé, n'ont pas encore, à ma connaissance, participé à la campagne de presse permanente dont le centre de la France fait l'objet.

Il faut dire que, pour un journaliste, c'est un bon sujet, anecdotique et scientifique, présentant de fréquents rebondissements. En outre, les maires de chacun des villages ont bien compris que l'essentiel était qu'on parle de leur commune : ça fait venir les touristes...

Chaque village a son monument, ses commémorations et ses projets : Vesdun détient sans doute la palme, avec une carte de France de cinq mètres de diamètre... en émaux de Briare (60 000 en tout) et la création de toutes pièces d'un saint patron du centre de la France, St-Guerlet : on y intronise comme compagnons tous ceux qui de près ou de loin ont consacré Vesdun comme l'unique centre ! (voir encadré).

A côté de cette grandiloquence, Saulzais le Potier et Chazemais font pâle figure : ils se contentent d'être de bonne foi, et ne réclament finalement que l'entente courtoise entre voisins.

Une mention spéciale doit par contre être attribuée à Bruère Allichamps, situé une trentaine de kilomètres au nord de Vesdun, et qui revendique bruyamment la position (enviée) de centre, mais avec pour seule et unique preuve la présence d'une borne milliaire romaine attestant l'intersection de trois voies (romaines), découverte en 1757 dans un champ et replantée à l'entrée du village : aucun rapport avec le centre de la France. Le "bulletin bruerois" (n° 24, 1972) est d'ailleurs très clair à ce sujet.

Cela n'empêche pas le maire de déclarer : (La Montagne, 15 juillet 85)

Il est malaisé de justifier la tradition populaire qui lui assigne le rôle illustre de marquer le centre Géographique de la France. Le rapport de DEFOUGERES ne contient aucune allusion au motif qui a guidé la générosité de Bethune Charost. Cet esprit éclairé qui avait subventionné les fouilles du Prieur PAJONNET a eu sans doute le simple désir d'orner l'entrée de l'ancienne ville de Bruère par un monument romain qu'il croyait replacer exactement à sa localisation primitive.

Par suite, il a été facile de supputer sur une carte que celle-ci coïncidait à peu près avec le centre de la France et l'amour-propre local a fait le reste. Mais les calculs savants de M. le Général GERIN alors en retraite à DUN et décédé depuis peu ont appris à la société historique du Cher, dans sa séance du 27 juin 1957, qu'en réalité ce centre théorique se situerait plutôt sur le territoire de la commune de Sauzais le Poitier à 5 km W S W du clocher et à quelques 10 km de Bruère.

La distance n'est pas tellement grande sur une carte à petite échelle que les habitants de Bruère ne soient fondés à croire toujours que le cœur de la France palpite encore après 1700 ans sous l'humble monument qui a servi à guider les voyageurs de la Gaule Romaine.

"L'ordinateur crache ce qu'on lui donne à manger... et puis les calculs ne servent à rien. Le centre de la France, la tradition dixit, c'est Bruère Allichamps"

Et de donner le feu vert pour un projet de sculpture monumentale qui remplacerait avantageusement la borne milliaire (voir encadré)...

LE MONDE

BATAILLE POUR LE CENTRE DE L'HEXAGONE

Bruère, le nombril de la France

De notre correspondant

Bourges. - Pouvoir contempler le nombril de la France... C'est en tout cas le souhait d'un architecte parisien, M. Claude Parent. L'auteur des plans de la Maison de l'Iran à la Cité universitaire à Paris et de l'église futuriste Sainte-Bernadette, à Nevers, vient de proposer le projet d'un « monument symboliste » destiné au petit village du Cher, se considérant comme le centre de l'Hexagone, Bruère-Allichamps, six cent cinquante-huit habitants. Ce monument, composé d'une structure en béton de 15 mètres sur 30, représenterait le ventre d'une femme couchée sur une colline surplombant le Cher... L'enceinte accessible par le nombril accueillait un centre culturel et d'hébergement pour touristes, le tout recouvert de mosaïque aux tons imitant la couleur de la peau.

Le père de ce projet, pour le moins original, évalué à 20 millions de francs, a déjà reçu en dot de M. René Larguinat, maire de la commune, un terrain de 8000 mètres carrés. Une idée que l'on prend ici très au sérieux « *dès l'instant où ça ne coûte rien au village* », précise, toutefois, le premier magistrat. Les plans définitifs déposés au secrétariat de la mairie ont déjà été communiqués au ministre de la culture en attendant le feu vert de l'Elysée.

René Larguinat voit dans ce nombril « *une confirmation de Bruère comme centre de la France* ». Il estima que les travaux devraient commencer assez rapidement. Dans cette partie du pays où la France cherche son centre, où les communes avoisinantes contestent à Bruère ses prétentions géographiques, le monument ferait taire la querelle. Pour le maire, « *au point de vue touristique, ce serait tout à fait épatant...* »

Voilà qui éclipserait la borne milliaire, vestige romain planté au beau milieu du village, indiquant depuis deux mille ans le point sensible tant convoité.

Patrick MARTINAT
(Le Monde, 25.07.84)

La Nouvelle République

Saint-Guerlet, le sixième chapitre de la guerre des centres est ouvert

Au milieu des bons saints auxquels ont rendu hommage au fil des saisons dans le Saint-Amandois, "Saint Guerlet" doit donner quelques frissons ! Il ne figure pas sur le calendrier chrétien.

Imaginé de toute pièce, jusqu'à sa représentation iconographique par les Vesdunois, il n'a qu'un souci, un seul : rendre hommage à tous ceux qui, de près ou de loin, participent à la vie rurale. Un rituel païen, du vin et du fromage de rassembler au sein d'une confrérie.

Dimanche, le maître du domaine, entouré de la maîtresse, du berger, du laboureur, de la bergerette, des servantes a procédé à l'intronisation du sixième chapitre. En toute amitiance et devant un public qui savoure l'ambiance de fête populaire, il a prononcé un compliment à chaque intronisé.

Ce sixième chapitre a tenu à rendre hommage à tous ceux qui, par leurs savants calculs, ont depuis des années reconnu en Vesdun le centre de la France continentale. Une façon d'enfoncer un peu plus le clou dans la guerre des centres.

Font désormais partie de la grande famille des campagnons de Saint-Guerlet : Mlle Christine Massaux, jeune peintre qui a exposé cet été à Vesdun, nos confrères du "Berry Républicain" Patrick Martinat et André Rousseau ; Louis Merchier, chirurgien-dentiste à Vallon et Vesdun ; Marcel Puissegur, professeur de mathématiques à Nevers (à signaler qu'en 1975, celui-ci a consacré six mois à calculer le centre de la France continentale qui est sans conteste Vesdun, près du hameau de Mondan).

A également été intronisée Jacqueline Simon, fille de M. Georges Dumont, ingénieur des houllières aujourd'hui décédé. Les travaux de ce dernier effectués en 1966 ont déterminé le centre de la France continentale. Celui-ci serait situé entre le hameau de Frappon et La Presle.

C'est Pierre Bonte qui, dans son émission radiophonique "Bonjour, M. le Maire" en 1966, a mis Vesdun sur le front de guerre des centres. Font également partie du sixième chapitre M. François Lamelot, sous-préfet, directeur de cabinet du président du conseil général du Cher ; M. Jacques Griffon, metteur en scène de François le Champi ; Christiane Gand ; M. Didier Citerin, responsable du groupe celtique de Gourin dans le Morbihan.

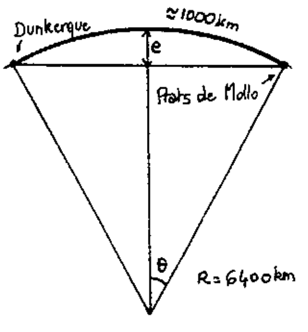
Et comme dans nos campagnes le folklore est vivace, il était normal que vielles et cornemuses du Berry mêlent leurs sons aux binious bretons. Danses folkloriques des deux provinces, histoires berrichonnes contées avec talent par Jean-Louis Boncœur ont permis de passer un moment agréable à Vesdun, au cœur du Boischaut.

(La Nouvelle République)
Edition du Cher
Vendredi 16 août 83

C. QUESTIONS DE FOND

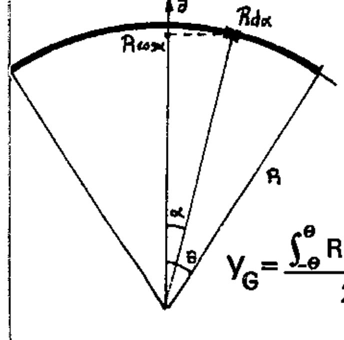
1. Au fait, la terre est ronde...

La France a une épaisseur : si la distance, sur la terre, de Dunkerque à Prats de Mollo vaut environ 1000 km, et si on prend 6400 km comme rayon de la terre, on trouve que l'angle Θ vaut environ $\frac{500}{6400}$ radians



Alors l'épaisseur e est donnée par
$e = R - R\cos\Theta \simeq 19{,}52$ km

En toute logique, le centre de gravité de la France superficielle (c'est à dire de la croûte terrestre) doit être en dessous de la surface.



Le calcul intégral nous permet un calcul précis : si la France était une position de sphère (c'est à dire sans tenir compte du relief), l'altitude Y_G du centre de gravité serait :

$$Y_G = \frac{\int_{-\theta}^{\theta} R\cos\alpha \; R\,d\alpha}{2R\Theta} = \frac{2R^2\sin\Theta}{2R\Theta} = \frac{R\sin\Theta}{\Theta}$$

Soit ici : $Y_G = 6393{,}5$ km

Y_G est comptée à partir du centre de la terre : donc on trouve en fait 6,5 km sous le niveau de la terre ($Y = 6400$ km).

Comme l'altitude moyenne de la France est de 342 m, on peut estimer que **le centre de la France se situe à peu près 6 kilomètres sous terre !**

Il ne reste plus qu'à creuser... pour poser une borne !

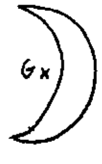
2. Il n'y a pas que la France dans le monde...

Que se passerait-il si chaque pays se mettait à calculer son centre de gravité ?

Prenons par exemple la Grande Bretagne, composée de deux îles ; le centre a de grandes chances d'être en mer, entre les îles !

Royaume uni

Pire encore, le Japon, qui, comme on dit en maths, n'est pas convexe : le centre de gravité est en mer, et loin du pays, car celui-ci a une forme de croissant.



Japon (simplifié)

On comprend que la question du centre géographique ne passionne pas tous les pays !

DEUXIEME PARTIE :

LES CENTRES D'INTERET

« *Le jeu du centre est d'entraver la communication entre* ***éléments périphériques, source de créativité : il agit par un processus furtif de cloisonnement, en séparant, et exige une communication radiale appauvrie parce que asymétrique. Le jeu de la périphérie - quand elle échappe à la fascination du centre - est de se coaliser avec d'autres éléments périphériques, et de gérer son opacité vis à vis du centre*** »

Thierry GAUDIN
in "Pouvoirs du rêve"

Nous l'avons vu, le centre géographique de la France ne présente aucun intérêt particulier : il est symbolique mais pas fonctionnel.

Dans cette deuxième partie, le propos est sensiblement le même : - où, et comment, les mathématiques situent le centre ? -, mais cette fois le centre cherché devra répondre à une fonction précise. Par exemple, où faut-il situer un centre de tri postal pour un maximum d'efficacité ? Ou encore où faut-il implanter un centre hospitalier dans une région donnée ?

Le territoire ne sera plus forcément la France, mais un espace à l'intérieur duquel on cherche un point privilégié, solution d'un problème particulier.

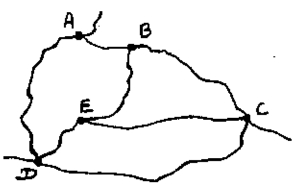
Mais auparavant, finissons en avec les centres symboliques : de la même façon qu'on a pu calculer le centre géographique de la France - ce qu'on appelle en mathématiques un calcul de barycentre, ou plus simplement une moyenne pondérée - on peut trouver le centre des français : on donne à chaque portion de territoire un "poids" égal à son nombre d'habitants (au lieu de sa surface). En remplaçant les habitants par les hommes, les femmes, les enfants,... on obtiendra le centre des hommes, des femmes, des enfants... et pourquoi pas le centre des chiens, des veaux, des vaches ou des cochons ! C'est un calcul purement mécanique, pourvu qu'on dispose des données correspondantes.

C'est à peu près aussi intéressant que de dire que le couple moyen de français a 2,35 enfants : j'imagine que 0,35 enfant ont 3 doigts et demi...

A. CENTRES D'INTERVENTION

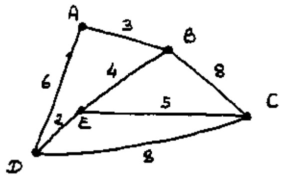
1. Au feu, les pompiers !

Les cinq agglomérations A, B, C, D et E sont desservies par le même centre d'intervention des sapeurs pompiers :



où doit être situé ce centre pour que le temps d'intervention soit le plus court possible ?

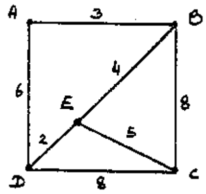
Cela dépend, bien sûr, du temps nécessaire pour parcourir chaque route du réseau local. Redessinons donc la carte, en la simplifiant et en indiquant le temps (en minutes) de parcours de chaque tronçon :



La carte perd son aspect réaliste : les longueurs des traits ne peuvent plus être proportionnelles aux distances (en minutes !).

Mais la solution de notre problème ne va pas être visuelle mais algébrique : en effet, il s'agit ici d'un modèle réduit. La situation peut être plus complexe et impliquer un grand nombre de villes, mais les méthodes restent les mêmes.

On peut même simplifier encore la carte, pour ne plus conserver que la structure du réseau : on obtient alors un "graphe", c'est à dire un ensemble de "sommets" (A, B, C, D, E) reliés par un certain nombre d'"arêtes" (AB ; BC ; CD ; DA ; BE ; CE ; DE).



Notre problème est alors le suivant : si un incendie se déclare, les pompiers vont prendre le plus court chemin (en temps) pour aller le combattre le plus vite possible ; mais le lieu du sinistre peut être n'importe lequel des cinq sommets : le plus proche... ou le plus éloigné. Pour minimiser le temps d'intervention, sans bien sûr savoir à l'avance où il va falloir aller, il faut donc minimiser le temps nécessaire pour aller au sommet le plus éloigné : on minimise le temps maximum. C'est ce qu'on appelle une méthode de "minimax".

2. Vite, vite !

Il faut d'abord connaître les plus courts chemins entre chacun des sommets ; on observe le graphe : par exemple, pour aller de D à C, on a intérêt à passer par E (7 mn) plutôt que d'y aller directement (8 mn), ou de passer par B ou A.

On rassemble tous ces résultats en un tableau

Ensuite, pour chaque sommet, on cherche lequel, parmi les quatre autres est le plus éloigné : le temps nécessaire mesure "l'excentricité" du sommet d'où on est parti.

C'est le sommet dont "l'excentricité" est la plus faible qui convient pour placer le centre d'intervention.

(En termes savants, ce tableau est la "matrice" associée au graphe.)

	A	B	C	D	E	"excentricité"
A	0	3	11	6	7	11
B	3	0	8	6	4	8
C	11	8	0	7	5	11
D	6	6	7	0	2	7
E	7	4	5	2	0	7

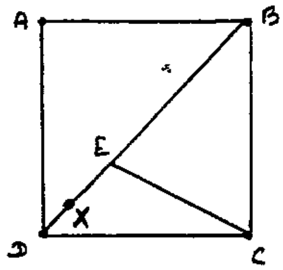
Il y a deux solutions équivalentes D et E, pour lesquelles le temps d'intervention maximal est 7 mn.

On dira que notre graphe admet deux centres D et E, pour un rayon de 7.

Il se peut que le tableau des plus courts chemins ne soit pas "symétrique", au cas où par exemple la distance de A à B n'est pas la même que de B à A (sens uniques ; côtes...). Cela ne change rien à la méthode.

3. Encore plus vite

On peut encore diminuer le temps de 7 mn, à condition d'accepter que le centre d'intervention ne se situe plus forcément sur un sommet, mais qu'il puisse être sur une arête, entre deux sommets.



On peut, par exemple, espérer un meilleur emplacement quelque part entre les deux centres trouvés plus haut D et E.

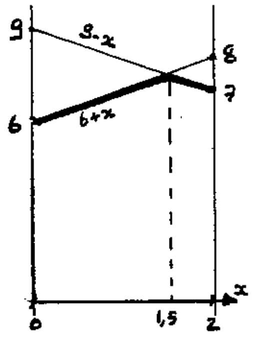
Soit pas exemple un point X, situé à x minutes de D (et donc à 2-x minutes de E).

On peut encore calculer "l'excentricité" du point X, qui dépend de x, en calculant le plus court chemin de X à chacun des sommets :

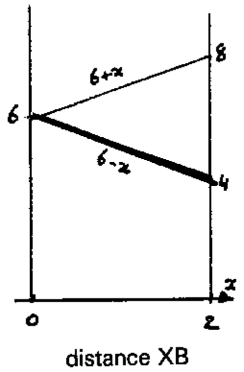
On reprend les "colonnes" de D et de E du tableau précédent, auxquelles on ajoute respectivement x ou 2-x.

Distance de X à	en passant par D	en passant par E
A	x + 6	7 + 2 - x
B	x + 6	4 + 2 - x
C	x + 7	5 + 2 - x
D	x	—
E	—	2 - x

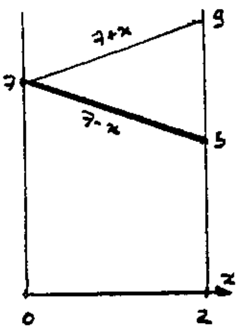
Ensuite, on cherche, en fonction de x, s'il est plus avantageux de passer par D ou par E pour aller de X aux autres sommets. Utilisons ici une représentation graphique : (en gras le chemin le plus court).



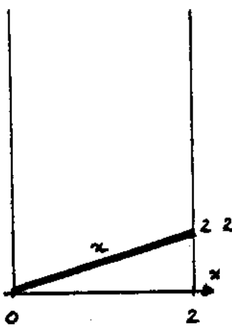
distance XA



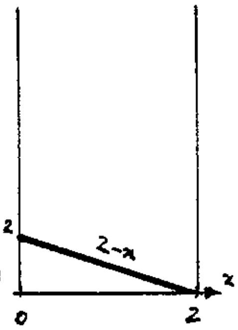
distance XB



distance XC

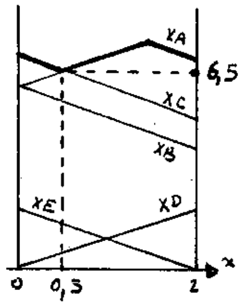


distance XD



distance XE

Pour chercher le "max" de ces "mini", on regroupe en un seul graphique ; la courbe représentant l'excentricité de X est l'enveloppe supérieure des courbes XA, XB, XC, XD et XE (en gras sur le graphique).



Son point le plus bas est le meilleur point de l'arête D.

Le point le plus bas est à l'intersection de XA et XC :

$7 - x = 6 + x \qquad x = 0{,}5$ et le minimum vaut 6,5.

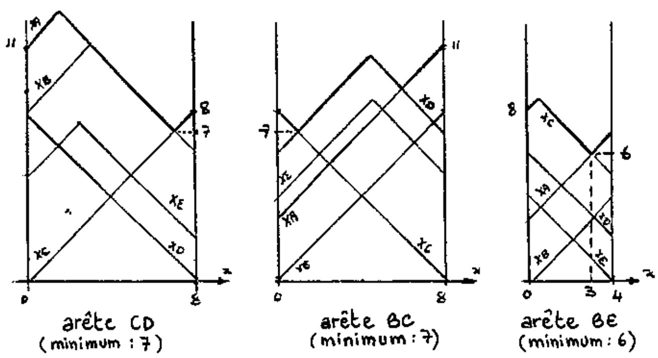
On gagne ainsi 0,5 minutes soit 30 secondes sur le résultat précédent de 7 mn.

Mais pourquoi n'avoir cherché que sur l'arête DE ?

Certaines arêtes peuvent être exclues, à priori :

- l'arête AB car AC = 11 et BC = 8 pour tout point X de AB, XC $\geqslant$ 8 : on ne descendra pas au dessous de 7.
- de la même façon, les arêtes AD (AC = 11 et DC = 7) et AE (AC = 11 et EC = 7).

Mais pour les trois autres, il faut refaire le calcul de "l'excentricité" d'un point X, situé quelque part entre deux sommets ; voici les graphiques :

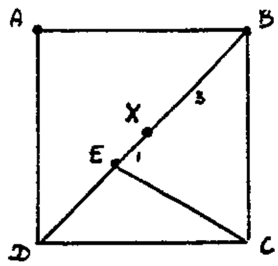


On s'aperçoit que sur chacune des arêtes CD et BC l'excentricité minimale est de 7 mn : on n'a rien gagné.

Par contre, sur l'arête BE, le point X situé à 3 mn de B donne un temps d'intervention maximum de 6 minutes.

Le point X s'appelle le centre absolu du graphe initial : autour de lui le rayon est de 6.

Ce point X s'appelle le centre absolu du graphe initial : autour de lui le rayon est de 6.



Pour un graphe plus compliqué, le calcul des excentricités se ferait entièrement en machine, les graphiques ci-dessus devenant trop nombreux ; et pour gagner du temps, on commencerait par éliminer les arêtes sans intérêt à priori.

4. Toujours plus vite... !

Si on veut réduire encore le temps d'intervention - par exemple si on estime que 6 mn est un temps encore trop long en regard des vies humaines qu'on pourrait sauver - on peut le faire, mais il faut en payer le prix : il suffit de multiplier les centres d'intervention.

En théorie des graphes, cela s'appelle chercher un multicentre, c'est à dire un ensemble de p centres, desservant chacun une partie des sommets. Cette situation se retrouve si on veut, par exemple, partager une région en plusieurs circonscriptions, et affecter à chaque circonscription un centre d'intervention : comment le faire de la façon la plus efficace ?

Notre problème comporte à présent deux variables : le temps d'intervention maximal et le nombre de centres. Appelons les t et n.

Il se trouve que, techniquement, on a intérêt à se fixer d'abord t, puis à développer une solution qui nous dira combien vaut n, c'est à dire combien il faut de centres pour respecter le temps maximum t. Si on n'a pas les moyens d'implanter ces n centres, il faudra recommencer avec une valeur plus grande pour t, ce qui diminuera n.

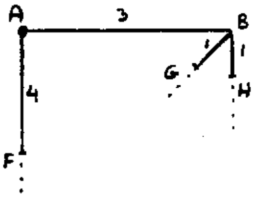
Le principe de la méthode est simple : une fois t fixé, on détermine les "t-voisinages" de chaque sommet, c'est à dire, tous les points d'où on peut atteindre ce sommet en un temps inférieur ou égal à t.

Ensuite, en recoupant les t-voisinages de chaque sommet, on fabrique des t-voisinages pour plusieurs sommets à la fois, c'est à dire les points d'où on peut atteindre certains sommets en un temps plus petit que t.

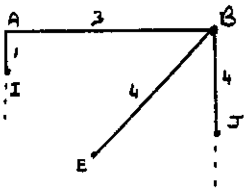
Enfin, on ne garde qu'un nombre minimal de tels t-voisinages, de façon à atteindre tout le graphe.

Voyons plutôt cela sur notre exemple : choisissons t = 4 mn.

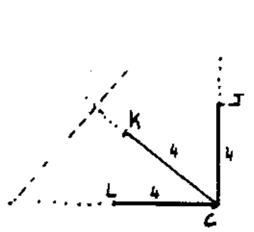
- voisinages de chacun des sommets :(on a baptisé les extrémités de ces voisinages avec de nouvelles lettres : F, G, H...)



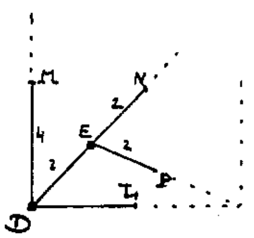
voisinage de A



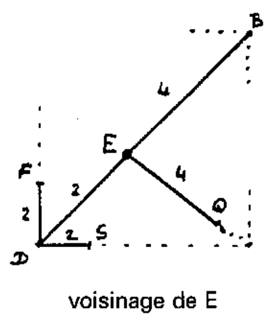
voisinage de B



voisinage de C



voisinage de D

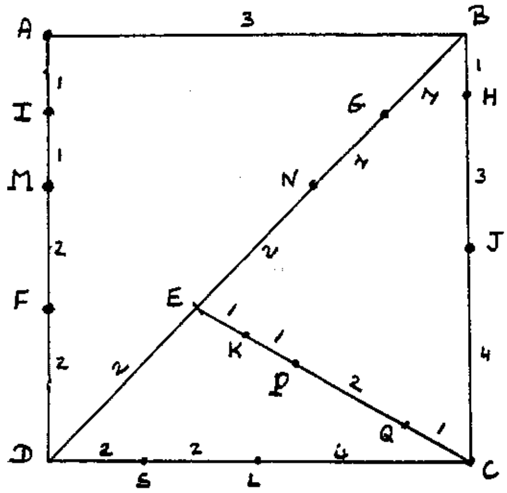


voisinage de E

Voici, en plus gros, le graphe obtenu, divisé en 19 tronçons, dont on fait la liste, avec les sommets desservis :

	A	B	C	D	E
IA	x	x			
AB	x	x			
BH	x	x			
HJ		x			
JC			x		
CL			x		
LS				x	
SD				x	x
DF				x	x
FM	x			x	

	A	B	C	D	E
MI	x				
DE				x	x
EN		x		x	x
NG		x			x
GB	x	x			x
EK				x	x
KP			x	x	x
PQ			x		x
QC			x		



On regroupe les tronçons qui desservent les mêmes sommets : ce sont ici IA, AB et BH puis QC, JC et CL et enfin SD, DE, DF et EK : il reste alors douze régions, formées d'un ou plusieurs tronçons.

Enfin, on ne garde que les régions les plus performantes : par exemple KP fait mieux que PQ, que JC, CL et QC... GB est meilleur que IA, AB et BH... etc.

Que nous reste-t-il ?

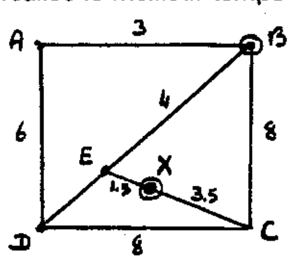
Seulement quatre régions :

	A	B	C	D	E
FM	x			x	
EN		x		x	x
GB	x	x			x
KP			x	x	x

Pour terminer, on voit que KP est nécessaire pour desservir le sommet C, et qu'alors GB suffit pour desservir les sommets qui manquent.

Deux centres d'intervention suffisent à réduire le temps à 4 minutes : il en faut un sur GB et un sur KP.

La situation de ces centres est l'objet d'un dernier sursaut d'énergie et d'étude ! B est la meilleure position pour desservir A et B (temps maximal : 3 mn), quant au tronçon KP, c'est son milieu X qui réalise le meilleur temps : 3 mn 30 s.



On peut remarquer qu'en fait, s'il ne s'agit que de desservir A et B, le milieu de AB est meilleur (1 mn 30 s) mais cette méthode garantit d'abord $t \leqslant 4$ mn : on peut la reprendre entièrement avec des valeurs plus petites de t pour observer l'évolution du nombre et de l'emplacement des centres.

Cette méthode peut sembler lourde, mais elle est conçue pour être donnée en pâture à un ordinateur, qui est très doué pour toutes les opérations mises en œuvre (intersections d'ensembles, comparaison de petites croix, etc.) et arrive vite (?) à la solution.

Dernier point : on peut tenir compte de l'importance plus ou moins grande des sommets (par exemple : le nombre d'habitants) en leur affectant un "poids", par lequel on multiplie les distances...

B. CENTRES DE DISTRIBUTION

1. Une question d'économie

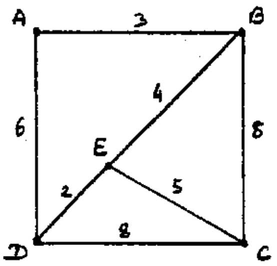
Après les centres d'intervention, où on cherchait un "minimax", voici une autre notion de centre, celle de centre de distribution, qui répond à une préoccupation économique.

En effet, pour distribuer une "denrée" à travers un pays, il faut l'acheminer jusqu'à tous les points de vente ; or cet acheminement coûte cher : comment minimiser ce coût ?

Plus précisément, depuis quel point est-il le plus avantageux de distribuer le produit ? en d'autres termes, où placer le centre de distribution ?

Ce problème se retrouve dans de nombreux contextes : centraux téléphoniques, sous-stations EDF, centres de tri postaux ou ferroviaires, raffineries, etc.

Ici encore, le territoire sera représenté par un graphe dont les sommets seront les points de vente ou de livraison, et dont les arêtes seront les chemins possibles.



Et puisque c'est une question de coût, les distances ne seront plus exprimées en km ou en mn, mais en... francs.

Enfin, si certains points de livraison sont plus importants que d'autres, on peut affecter les sommets du graphe de "poids" correspondant à cette importance, et multiplier les distances menant à un sommet par le poids correspondant.

Dans ces conditions, le point que nous cherchons est le sommet d'où le coût total d'acheminement est le plus faible : ce coût est égal à la somme des distances de ce point à tous les autres sommets.

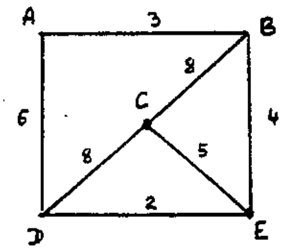
Il suffit donc de calculer cette somme pour chacun des sommets du graphe : celui dont la somme est la plus petite est notre centre de distribution. Ce point s'appelle le **point médian** du graphe et la méthode n'est plus une méthode "minimax" mais "minisomme".

Voyons cela sur notre exemple : on part du tableau des plus courts chemins, et on fait la somme de chaque ligne.

On trouve ici que le point médian est le sommet E, avec une somme qui vaut 19.

	A	B	C	D	E	Somme	
A	0	3	11	6	8	28	
B	3	0	8	6	4	21	
C	11	8	0	7	5	31	
D	6	6	7	0	2	21	
E	8	4	5	2	0	$\boxed{19}$	point médian

Ce résultat provient d'un calcul et n'était pas visible à l'œil nu : en effet, ci-contre est dessiné le même graphe, mais de façon légèrement différente : va-t-on alors affirmer que C est le point médian alors que c'est le plus excentré (il a la somme la plus forte : 31) ?



Si on veut en rester au niveau géographique, on peut ainsi calculer la ville la plus centrale de France, à l'aide du graphe des routes et des distances : ce sera le centre routier du pays. Et de même on peut trouver la ville la plus excentrée.

Si on remplace le réseau routier par le réseau auto-routier, ferroviaire, aérien, fluvial, etc... on trouvera à chaque fois un nouveau centre de la France !

2. Sur les arêtes : on tombe sur un os !

On a vu pour les centres d'intervention qu'accepter un point sur une arête, entre deux sommets, améliorait la solution.

Qu'en est-il pour un point médian ?

Soit X un point de l'arête AB, de longueur ℓ, situé à une distance x de A. Le plus court chemin depuis X jusqu'à un sommet quelconque passe soit par A, soit par B.

Séparons les sommets en deux groupes :

- les M pour lesquels XM passe par A : $XM = x + AM$
- les N pour lesquels XN passe par B : $XN = \ell - x + BN$

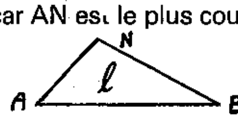
On peut supposer le premier groupe plus nombreux que le second : si ce n'est pas le cas, on échangera dans ce qui suit les rôles de A et B.

Alors la somme des distances de X à tous les autres sommets, qu'on note S (X) vérifié :

S (X) = somme des $(x + AM)$ + somme des $(\ell - x + BN)$

Remarquons que $\ell + BN \geqslant AN$ car AN est le plus court chemin de A à N :

alors $\ell - x + BN \geqslant -x + AN$



Donc S (X) $\geqslant$ somme des $(x + AM)$ + somme des $(-x + AN)$

Soit en réorganisant le second membre :

S (X) $\geqslant$ (somme des AM + somme des AN) (ça c'est S (A))
+ x (nombre de M - nombre de N) (ça c'est positif)

D'où S (X) $\geqslant$ S (A) : X ne fait pas mieux que A

On ne gagne rien à prendre un point au milieu d'une crête.

Le centre de distribution est à chercher parmi les sommets.

3. Et en multipliant les solutions ?

On peut espérer diminuer la somme des distances en implantant non plus un mais deux ou plusieurs centres de distribution.

Le problème se généralise donc de la façon suivante : où doit-on situer un nombre donné p de centres de distribution, de façon à minimiser la somme des distances de chaque sommet au centre le plus proche ?

Pour coller de plus près à la réalité économique, on peut tenir compte du coût des implantations (frais fixes) qui s'ajoute aux coûts d'acheminement, et qui conditionnera le nombre p de centres. D'autres contraintes peuvent également être intégrées (par exemple limiter le nombre de sommets desservis par un seul centre, c'est à dire limiter la taille des centres de distributions)...

Quand le problème n'est pas trop gros, la méthode est simple : on examine toutes les façons possibles de choisir p centres parmi les n sommets : pour chacune, on calcule le coût correspondant, et on choisit celle qui a le coût le plus bas.

Pour évaluer la "grosseur" du problème, il faut savoir qu'il y a

$$C^n_P = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

façons de choisir p sommets parmi n.

Dans notre exemple, si p vaut 2, il y a $C^2_5 = 10$ cas à examiner :

pour chacun d'eux, on affecte chaque sommet au centre le plus proche et on calcule la somme des distances : pour aller plus vite, on commence par établir un tableau de proximité : sous chaque sommet, on ordonne les autres sommets, du plus proche au plus lointain : cela permet d'affecter systématiquement chaque sommet au centre le plus proche, et de calculer rapidement la somme.

A		B		C		D		E	
B	3	A	3	E	5	E	2	D	2
D	6	E	4	D	7	A	6	B	4
E	8	D	6	B	8	B	6	C	5
C	11	C	8	A	11	C	7	A	8

Voici les dix couples possibles de centres (encadrés), ainsi que les affectations de chaque sommet et la somme de distances obtenue :

	$\boxed{A}\boxed{B}$ C D E	$\boxed{A}$ B $\boxed{C}$ D E	$\boxed{A}$ B C $\boxed{D}$ E
affectation :	A B B A B	A A C A C	A A D D D
distance :	0 0 8 6 4	0 3 0 6 5	0 3 7 0 2
somme :	18	14	12

	$\boxed{A}$ B C D $\boxed{E}$	A $\boxed{B}\boxed{C}$ D E
affectation :	A A E E E	B B C B B
distance :	0 3 5 2 0	3 0 0 6 4
somme :	10	13

	A $\boxed{B}$ C $\boxed{D}$ E	A $\boxed{B}$ C D $\boxed{E}$	A B $\boxed{C}\boxed{D}$ E
affectation :	B B D D D	B B E E E	D D C D D
distance :	3 0 7 0 2	3 0 5 2 0	6 6 0 0 2
somme :	12	10	14

	A B $\boxed{C}$ D $\boxed{E}$	A B C $\boxed{D}\boxed{E}$
affectation :	E E C E E	D E E D E
distance :	8 4 0 2 0	6 4 5 0 0
somme :	14	15

Il apparait deux solutions : les couples (A, E) et (B, E) pour lesquels la somme vaut 10.

Mais le nombre C^p_n de cas à examiner augmente vite avec n et p : par exemple, pour n = 100 et p = 5, C^p_n vaut 75 287 520. Or pour chacun de ces cas, c'est à dire pour chaque choix de 5 centres, il faut d'abord affecter chacun des 95 autres sommets au centre le plus proche, et calculer la somme des distances : cela prend du temps, même à un ordinateur. Au prix où est la minute d'ordinateur, cela revient cher !

On peut gagner du temps en faisant défiler les cas dans un ordre judicieux, où les affectations ne changent pas beaucoup d'un cas au suivant (méthode de "recherche arborescente"), mais, même ainsi, cette méthode est soit trop chère, soit carrément impossible (dépassement de la capacité de l'ordinateur) pour les "gros" problèmes.

4. Des solutions bon marché ?

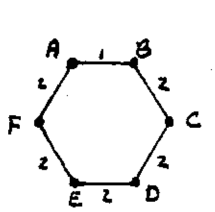
A condition de se contenter de solutions éventuellement approchées, on peut encore gagner du temps de calcul : on met en œuvre un algorithme de résolution dont voici le principe :

on part d'un choix quelconque de p centres : la somme des distances vaut S ; on essaie de diminuer S en remplaçant un seul des p centres par un des n-p autres sommets : à chaque fois qu'on trouve une substitution qui abaisse la valeur de S, on l'effectue et on recommence...

L'ensemble des p centres est modifié petit à petit, et à chaque modification, la somme des distances diminue.
Il arrive donc un moment où aucune des substitutions possibles n'abaisse la somme S : l'ensemble des p centres auquel on a abouti est pris comme solution.

Comme il n'examine a-priori qu'une partie des possibilités (celles qui découlent les unes des autres par substitution d'un sommet et diminution de la somme), cet algorithme est plus rapide que la méthode précédente.

Mais pour la même raison, il peut passer à côté de la solution exacte : en voici un exemple simple (que je laisse le soin au lecteur de détailler !).



Si, dans ce graphe, on cherche un couple de points médians par l'algorithme ci-dessus, on s'arrête à (C, F) pour lequel la somme vaut 8 : on ne peut abaisser cette somme en ne substituant qu'un sommet à la fois.

Pourtant (C, F) n'est pas un couple solution : (A, D) et (B, F) ont une somme égale à 7.

Autrement dit, on gagne en temps de calcul, donc en faisabilité, mais on perd en précision.

Pour un problème plus gros, de recherche de p centres, on peut autoriser les substitutions de deux sommets à la fois : ça allonge le calcul, mais améliore la précision. La solution obtenue sera dite 2-optimale.

Tous les intermédiaires sont possibles entre la solution 1-optimale (obtenue avec des substitutions d'un sommet à la fois) et la solution p-optimale (qui n'est autre que l'examen de tous les C^p_n cas possibles).

Fine dialectique entre le temps de calcul et la précision obtenue...

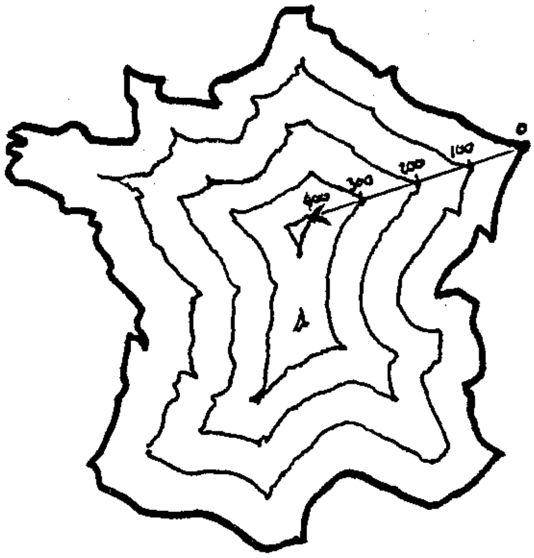
C. CENTRES STRATEGIQUES

1. Centre de défense stratégique

Où situer le centre, le quartier général de la défense territoriale ? C'est un problème purement géométrique ; il suffit de tracer les "lignes de niveau" de la pénétration ennemie, en fonction du temps écoulé.

En supposant, a-priori, l'avance de l'ennemi régulière, cela revient à tracer des courbes "parallèles" à la frontière.

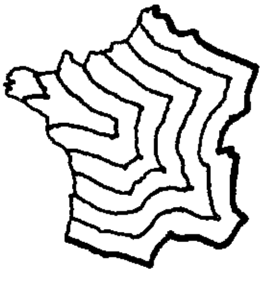
Supposons par exemple une progression de 100 km par jour : on obtient le système de lignes de niveau dessiné ci-contre.



C'est à l'intérieur des lignes de niveau les plus éloignées qu'il faut placer le Q.G.

On n'obtient pas forcément un point unique, mais une région, ou plusieurs, à l'intérieur desquelles il faut choisir.

Si on considère, comme certains, que la menace vient de l'Est, et en tous cas pas de l'océan atlantique, on peut appliquer cette méthode à partir des seules frontières réputées menacées.



Les lignes de niveau ont alors approximativement l'allure suivante.

Le centre de la France se retrouve donc du côté de Brest...

2. Centre d'attaque stratégique

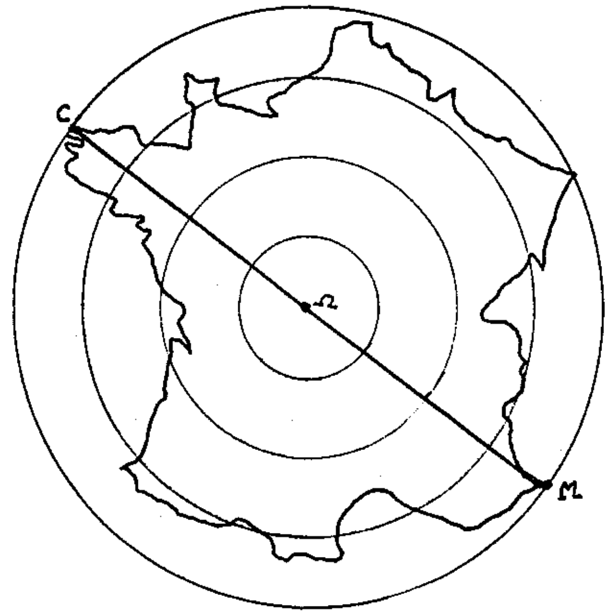
Si on prend en compte, non plus la progression d'une armée ennemie à travers le territoire, mais les rayons d'action des missiles et les rayons d'intervention des avions de chasse, on est amené à placer sur la carte un réseau de cercles concentriques.

La question est : où situer le centre de ces cercles ?

Pour y répondre, il suffit de trouver le plus petit cercle contenant le territoire tout entier : son centre sera le point cherché.

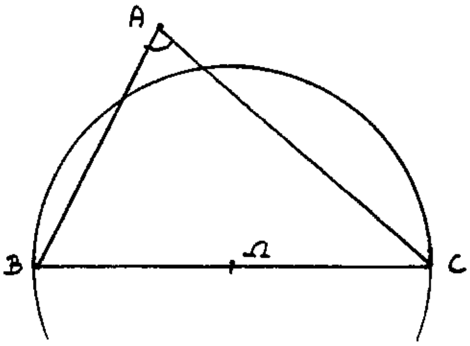
Ce cercle passe au moins par deux points de la frontière : son diamètre est donc supérieur à la plus grande distance possible entre deux points extrêmes du territoire : d'après le "QUID" c'est la diagonale Pte de Corsen-Menton : 1082 km.

Dans notre cas, le milieu Ω de cette diagonale semble convenir.



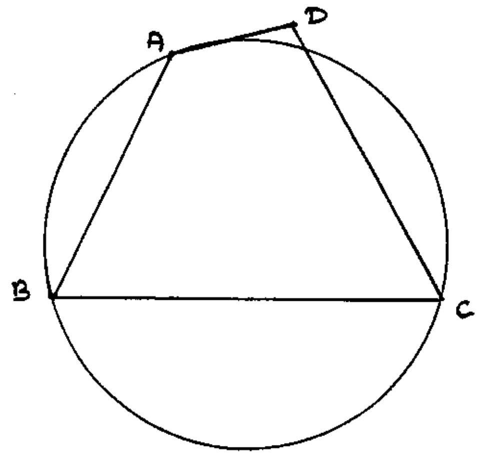
Mais ce n'est pas toujours le cas : prenons l'exemple d'un pays triangulaire, avec un angle aigu en A, dont le plus grand côté est BC : le cercle de diamètre BC ne contient pas le triangle.

Dans ce cas précis, c'est le cercle circonscrit au triangle (c'est à dire passant par A, B et C) qui convient.



Mais pour un contour moins simple, comme ici le quadrilatère ABCD, où BC est encore la plus grande diagonale, ce n'est pas aussi évident.

Le lecteur curieux de géométrie résoudra ce problème...



Pour un contour tout à fait quelconque, je ne connais pas de méthode théorique. Par contre, expérimentalement, il est facile de déplacer une "mire" faite de cercles concentriques sur la carte, pour trouver une solution.

3. Le centre stratégique... du monde !

A en croire l'"Atlas stratégique" de G. Chaliand et J.P. Rageau (page 71), c'est une petite île au fond du pacifique :

« Hawaï, position clef dans le Pacifique

La majorité des îles du Pacifique sont placées sous la tutelle de l'Occident et de ses alliés...
L'hégémonie des Etats-Unis est à peu près totale dans le Pacifique nord. La position centrale de Hawaï, comme base et relais, apparait essentielle dans ce dispositif. »

On retrouve dans la carte ci-contre le réseau de cercles concentriques : cette fois Hawaï apparait comme le centre des terres à contrôler.

Dans ces conditions, on comprend "l'attachement" des USA à Hawaï :

« De surcroît, plaque tournante du trafic aérien, l'archipel abrite l'importante base de Pearl Harbour, qui sert de soutien à la flotte du Pacifique, et Camp Nimitz, siège du Commandement des forces armées pour le Pacifique ».

CONCLUSION

Nous voici au terme de notre longue randonnée autour du centre : la visite d'un seul point peut faire voir du pays...

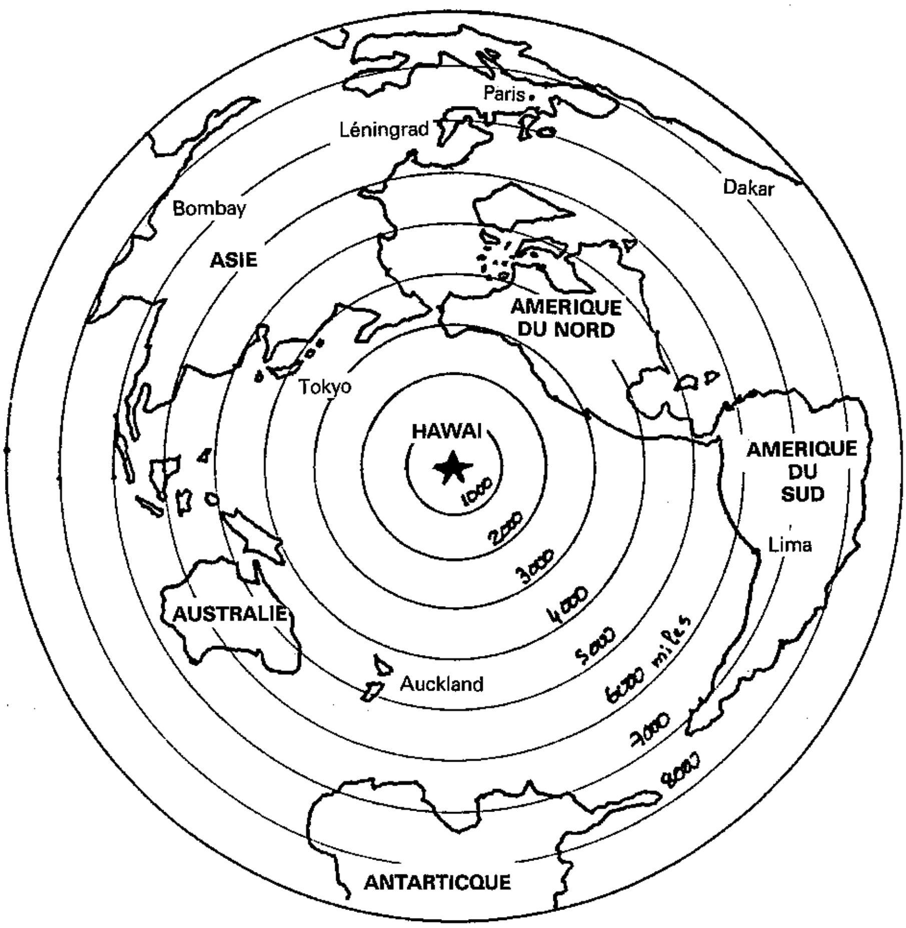
La tête vous tourne-t-elle ?

Pourtant, à chaque étape, des prolongements sont encore possibles, qui sont autant de thèmes d'activités mathématiques.

On a pu observer, comme prévu, que chaque façon de chercher le centre amène une réponse, ou plusieurs : la mathématique est un outil puissant, une démarche féconde, mais qui reste au service du problème posé.

La pertinence du résultat renvoie à l'intérêt de la question posée plus qu'à la manière d'y répondre le **vrai** centre de la France n'est pas celui qui répond vraiment à la question, mais celui qui répond à la **vraie** question.

A chacun sa vérité... ■



BIBLIOGRAPHIE

"Pouvoirs du rêve" - Th. Gaudin - Edité par le Centre de Recherche sur la Culture Technique diffusé par les Editions d'Organisation, Paris 1985.

"Cartes et figures de la terre" - Centre Georges Pompidou, CCI, Paris 1980.

"La perversion mathématique" - A. Upinsky - Editions du Rocher, Paris 1985.

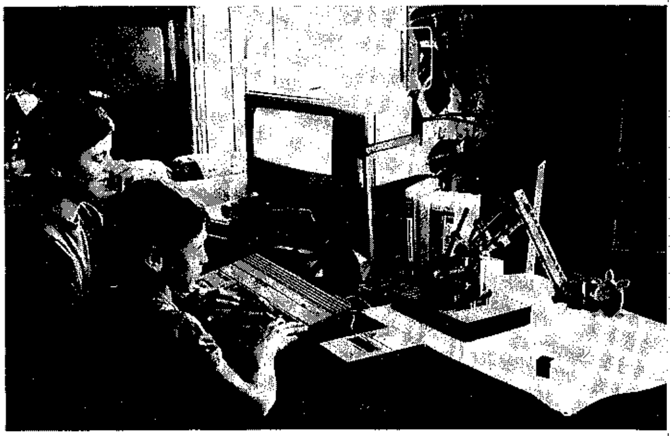
"Atlas Stratégique" - G. Chaliand, J.P. Rageau, Librairie Fayard, 1983.

"Graph Theory : an algorithmic approach" - N. Christofides, Academic Press, 1979.

"Comment réussir le triangle quelconque..." - J. Lubczanski - Cedic/Nathan, 1986.

Je remercie de leur aide documentaire, les mairies de Chazemais, Saulzais le Pothier et Bruère Allichamps ; La "Nouvelle République" ; l'Institut Géographique National (à Paris et à Blois) ; et plus particulièrement M. André Michel.

PILOTAGE DE MICRO-ROBOTS SOUS LOGO
un outil pour sensibiliser les personnels de l'industrie à la robotique



Martial VIVET - Le Mans

Martial Vivet montre ici l'intérêt de la micro-robotique pédagogique, en particulier le rôle qu'elle peut jouer dans le renforcement d'une formation de base. "Une approche pluritechnique intégrée d'objets constructibles par les maîtres et par les élèves est possible, si nous fournissons des ensembles de briques matérielles et logicielles autorisant la construction d'espaces-problèmes riches." Ce texte, présenté à Ottawa en mai 1986 lors du 5ᵉ colloque canadien sur la technologie éducative est le fruit d'un travail d'équipe mené avec le concours en particulier de Jean-Yves Champigneul (pour les stages), Jérôme Bruneau et Jean-Luc Monflier (pour les outils logiciels et les matériels).

L'histoire des usages des ordinateurs fait apparaître nettement plusieurs phases : après avoir d'abord presque exclusivement été dédiés au calcul scientifique, les calculateurs ont été massivement utilisés dans les tâches de gestion. Nous entrons maintenant dans l'ère de l'informatique industrielle, celle où l'ordinateur ne se cantonne plus seulement dans les services administratifs, mais où il entre directement dans les commandes des machines de l'atelier de production.

Il n'y a pas d'exclusives entre ces aspects, et les usages avancés concernant ce qu'il est convenu aujourd'hui d'appeler productique, intègrent complètement les concepts de gestion, de production et de conduite automatique de processus. La généralisation des concepts liés à la logique programmée a également renouvelé l'informatique dite scientifique, pour laquelle le processeur n'assure plus seulement des fonctions de calcul (au sens calcul numérique du terme), mais aussi des fonctions de contrôle de processus (pilotage d'instrumentation de mesure, saisie et traitement d'information en temps réel).

Les usages à des fins éducatives, eux aussi, ont évolué. Les ordinateurs ont d'abord été utilisés comme des outils directement liés à des disciplines d'enseignement mis au service de l'enseignant et des élèves, selon les principes de l'EAO.

Les usages d'outils comme LOGO, touchant aux apprentissages fondamentaux, permis par l'activité de résolution de problèmes faisant appel aux démarches de la programmation, sont très spécifiques et ont représenté une évolution extrêmement importante.

Par contre, le problème de l'adéquation, en termes culturels, de l'individu au monde informatisé et robotisé dans lequel il vit, n'a pas encore été beaucoup pris en compte dans les processus éducatifs de base. Il y a lieu de réfléchir à la façon de transmettre les connaissances fondamentales nécessaires pour que l'homme puisse se situer dans son environnement. En particulier, par rapport aux processus de production automatisée, que pouvons-nous construire pour permettre la constitution d'une culture technique suffisante, même chez ceux qui n'ont pas besoin de devenir des roboticiens professionnels ? La micro-robotique pédagogique recouvre en partie les efforts faits dans cette direction.

Le terme de "micro-robotique pédagogique" désigne pour nous l'activité de création et de mise en œuvre, à des fins pédagogiques, d'objets qui sont des réductions aussi fidèles et significatives que faire se peut, de procédés effectivement utilisés au niveau industriel.

Le pilotage de micro-robots permet une approche pluritechnique et un contact direct de l'apprenant avec les nouvelles technologies (mécanique, physique, électronique, programmation). La tortue de plancher pilotée par ordinateur LOGO était déjà un micro-robot, malheureusement fermé, mais bien adapté aux enfants et à une classe de problèmes relevant de la géométrie plane. La micro-robotique pédagogique permet l'ouverture des espaces de problèmes et la résolution de problèmes dans des micromondes variés (au sens de S. PAPERT). Ces robots, pouvant avoir des aspects moins puérilisants pour des adultes, doivent eux-mêmes être ouverts, si possible constructibles par les maîtres et les élèves. Un champ immense s'ouvre pour montrer que l'informatique pédagogique n'est pas figée, et qu'en tout cas l'informatique ne se réduit pas à des dialogues "communication textuelle ou graphique", par clavier-écran interposé.

QUELS ROBOTS POUR QUELS PUBLICS ?

Quels robots ?

Deux conceptions différentes sont en présence pour aborder les problèmes de formation mettant en œuvre le pilotage de robots. On peut se tourner vers des robots de type professionnel. La mise en œuvre de tels robots est indispensable pour assurer à des professionnels (actuels ou futurs) des formations de spécialistes.

Ces robots ont pour inconvénient majeur d'être généralement fermés, et de rester chers, rendant difficile leur généralisation dans un contexte éducatif.

On peut aussi se tourner vers des dispositifs beaucoup moins sophistiqués, moins coûteux, plus diffusables à grande échelle si l'on n'envisage pas une formation de spécialiste, mais seulement une appropriation, en terme de formation générale, des principes de base. Ces outils peuvent être d'un grand intérêt pédagogique s'ils sont ouverts, modulaires si possibles montables dans un temps raisonnable par l'enseignant et les élèves.

Dans cet esprit, nous créons des dispositifs physiques que nous interfaçons et pilotons sous LOGO en prenant en compte tous les éléments fondamentaux propres à la démarche : création d'outils logiciels propres au micro-monde concerné (introduction de primitives), résolution de problèmes dans l'univers créé.

L'idée de base est de faire travailler sur les fondements de la robotique en faisant voir comment on peut construire un dispositif physique (électronique et mécanique) et surtout comment on peut donner un comportement cohérent à ce dispositif à l'aide des concepts de logique programmée.

Quels publics ?

Ce type de dispositif est utilisable pour satisfaire des besoins de formation générale de base sans objectif professionnel direct. Cela concerne des élèves d'enseignement général (technologie en collège), mais aussi des personnels adultes, salariés, ne disposant que d'un faible niveau de formation générale et concernés par des problèmes de sensibilisation dans ces domaines. Un travail bien conduit avec de tels dispositifs permet une approche des démarches de pensées, des concepts forts dans les domaines technologiques concernés. En particulier, on peut tenter ainsi de casser le verrou du logiciel : le concept de logiciel apparaît encore souvent comme un facteur bloquant par rapport à toute attitude positive face aux machines.

Faire programmer un tant soit peu ce type de public peut s'avérer très positif, si l'on utilise un langage accessible permettant de réaliser rapidement quelque chose de personnel. Ce type d'activité peut être intéressant à mettre en place comme préparation en amont de formations à finalité professionnelle.

On réfléchit

QUELLES DEMARCHES ? AVEC QUELS ROBOTS ?

Démarche pédagogique

La démarche pédagogique que nous retenons est directement inspirée des travaux de S. PAPERT : démarche active de création et de résolution de problèmes dans des micro-mondes adaptés aux objectifs. En ce sens, nous avons choisi de piloter les micro-robots avec le langage LOGO. Un premier intérêt est lié au transfert des acquis méthodologiques acquis antérieurement en conduite de projets. Le deuxième intérêt concerne l'élargissement, l'enrichissement des champs de problèmes abordables avec LOGO. En particulier, avec des adultes, la tortue peut présenter des aspects puérilisants, et il y a lieu de changer ce "robot d'enfants" en dispositif "d'allure plus sérieuse". Le troisième intérêt est lié au fait qu'avec un système type LOGO on atteint très rapidement, malgré une simplicité qui n'est qu'apparente, les vraies difficultés liées au concept essentiel de programmation. En particulier, avec des adultes de "bas niveau", qui n'ont le plus souvent que peu de temps à consacrer à ce type d'activité, on peut aborder rapidement des problèmes difficiles avec un langage simple, parce qu'ayant été conçu pour des enfants.

La possibilité de "définir ses mots", d'utiliser les mots du langage usuel (directement attachés aux concepts manipulés) reste essentielle. Chaque micromonde se trouve facilement et naturellement mis en correspondance avec un vocabulaire bien adapté. En particulier, les adultes peuvent utiliser des mots de vocabulaire familiers au plan professionnel. Pour un ouvrier de Renault, il est important que la procédure qui dessine un train avant de voiture s'appelle TRAIN-AVANT et fasse appel aux objets FOURCHE, SOUFFLET...

Il est important de travailler ainsi puisque c'est une façon de conduire une réflexion sur les différentes représentations d'un objet, les divers degrés d'abstraction et les raisonnements possibles sur chaque représentation. Par exemple, un axe peut être une pièce de métal, mais aussi une procédure dessinant l'axe, le dessin de l'axe (au sens dessin industriel usuel), une procédure commandant l'usinage de l'axe, une référence catalogue, un codage, un tarif de l'axe...

On sait l'importance, dans un processus de formation de base de cet entraînement à naviguer dans des niveaux variés de représentation d'un même objet. Dans cet ordre d'idées, nous avons pu, avec des ouvriers chez Renault, faire comprendre l'idée de gestion de production avec des "dessins tortue" représentant des synoptiques d'atelier. Ces schémas fonctionnels pouvaient gérer des postes de production, des postes de contrôle de qualité, des boucles de retour de pièces en vérification... On peut trouver là de bons outils pour faire appréhender globalement la marche de l'atelier, voir l'incidence d'une défaillance d'un poste, concevoir globalement l'idée de gestion de production... Nous pouvons faire dépasser ainsi la vision étroite de la machine individuelle.

La démarche pédagogique reste fixe, mais doit être adaptée à l'objectif poursuivi. Pour notre part, nous distinguons deux types d'objectifs complémentaires.

— Le premier objectif peut être la résolution des problèmes en utilisant l'activité de programmation. Dans ce cas, nous fournissons des primitives toutes faites permettant de travailler dans le micro-monde fourni. L'activité correspond à ce que l'on fait avec une tortue de plancher avec laquelle on peu utiliser la commande "AVANCE 10", sans se soucier de ce qui se passe du point de vue électrique et mécanique au sein de la tortue.

— Le deuxième objectif peut être l'acquisition des connaissances sur les technologies utilisées pour fabriquer les objets. D'une certaine façon, cela concerne l'ouverture des primitives citées au point précédent. Avec une écriture bien hiérarchisée de ces primitives, on peut ouvrir les "boîtes" par couches successives, chaque couche faisant appel à des primitives de plus bas niveau. On peut alors faire découvrir que "AVANCE 10" c'est envoyer aux deux moteurs pas à pas actionnant les roues, la même séquence d'impulsions.

Par exemple : REPETE 200 (FORCEO 6 FORCEO 7 FORCE1 6 FORCE 1 7).

(Dans cet exemple, FORCEO : i (resp FORCE1 : i) est une commande qui force à 0 (resp à 1) le bit : i de l'interface, et nous faisons l'hypothèse que les moteurs de roue sont commandés par des trains d'impulsions sur les lignes 6 et 7). Découvrir qu'un train d'impulsions est une répétition de montants et descendants, exprimables de façon itérative ou récursive, est une chose intéressante d'un point de vue programmation de processus. Découvrir comment faire tourner un moteur avec des trains d'impulsions est intéressant du point de vue de la connaissance de la technologie des moteurs. Montrer que l'ordinateur va trop vite et qu'il faut inclure des temporisations pour que les moteurs fonctionnent, est intéressant du point de vue de la comparaison des technologies en présence.

Avec quels robots ?

Notre démarche est de construire des dispositifs physiques et logiciels permettant d'atteindre ces objectifs. Les dispositifs créés diffèrent suivant que nous cherchons à faire résoudre des problèmes ou que nous cherchons à donner des connaissances technologiques.

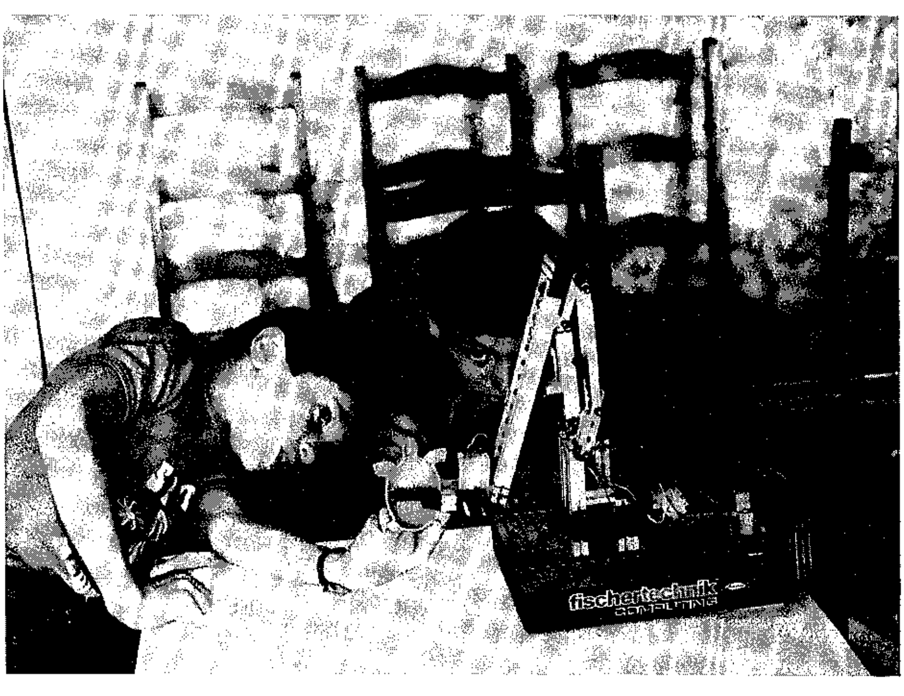
1. Objectifs de résolution de problèmes

Une condition première est que la géométrie sous-jacente doit rester simple, ce qui écarte fortement les géométries sphériques. En particulier, l'individu doit pouvoir se décentrer mentalement, se placer en observateur, et percevoir au plan corporel les effets de commandes. C'est une des idées majeures qui ont permis la naissance de la tortue qui navigue sur un plan en géométrie 2 dimensions.

LE CARISTO

- Pour des adultes, nous avons conçu le CARISTO (cf. VIVET 84a). Le CARISTO est réalisé par une modification de la mécanique et de la carrosserie d'une tortue de plancher permettant la même programmation que celle de la tortue, mais dans un univers de chariot de cariste déplaçant des palettes de caisse (LEVEPALETTE se substituant bien à LEVE-PLUME, etc.). La réalisation de projets consacrés au transport de piles de caisses dans un atelier est alors accessible. L'intérêt pour des travailleurs manuels est de garder, dans un premier temps, un contact avec des objets concrets. Cette phase est indispensable lors de l'appropriation de l'outil, et précède son usage avec des objets simulés à l'écran, beaucoup plus abstraits. Si l'objectif est de permettre à des individus de travailler sur des représentations du monde réel (dessin, procédures...), cette phase de passage de l'objet concret à l'objet abstrait est primordiale.

On met au point



La manipulation est typiquement celle d'une tortue de plancher (géométrie 2D à laquelle on n'adjoint que la cote de la caisse !). Il est ainsi possible d'aborder des problèmes de repérage cartésien, coupler avec une gestion de magasin de stockage, d'amener à l'idée de magasin automatique. Ce type d'idées a pu être utilisé pour de la formation de magasiniers. Cela permet d'aborder des problèmes de codage, de nomenclature, de repérage dans l'espace, tout en levant le "verrou du logiciel". L'idée de gestion et de commande automatisée peut sans doute prendre un sens profond avec de telles manipulations.

En travaillant à la réalisation des outils du niveau 2, on aborde des problèmes liés à la connaissance des capteurs, des moteurs, de l'électronique ; on peut aborder les problèmes de structure de l'ordinateur, d'échange d'information entre un micro-processeur et son environnement, d'écriture en langage d'assemblage.

Chacun de ces aspects peut être traité de façon simple si les difficultés sont bien sériées (sans oublier pour autant la nécessité d'aboutir à la vision globale de l'objet manipulé).

LES GRUES

- Dans le cadre de l'université d'été ("LOGO et enseignement technologique" - LE MANS -), nous avons travaillé à la réalisation d'interfaçage de grues-jouets. La grue est de type "chantier dans le bâtiment". Le support vertical pivotant permet la rotation d'une flèche horizontale sur laquelle se déplace un chariot permettant d'amener le crochet du câble à la verticale de tout point dans le cercle de base.

• Du point de vue géométrique, tout est de nature cylindrique et rapidement accessible.

• Du point de vue partie opérative, le support est commandé par un moteur courant continu, le chariot et le niveau du crochet par un moteur pas à pas, l'ouverture fermeture du crochet par un relais (tout ou rien). Des capteurs (interrupteurs de fin de course, relais reed, infra-rouge) permettent le calage du zéro (initialisation des mouvements) et la détection d'un objet sous la flèche de grue.

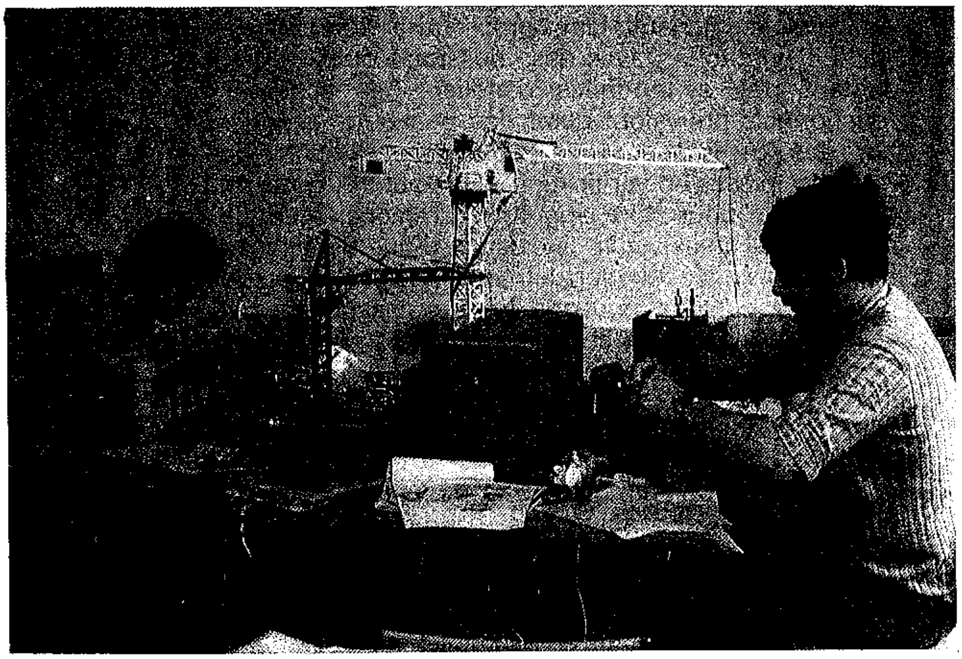
• Du point de vue électronique, une carte d'interfaçage a été complètement conçue et réalisée par les participants (professeurs de collèges, LEP...). Le trajet de l'information des capteurs/effecteurs jusqu'aux instructions de programme, a été vu.

• Du point de vue informatique, des outils ont été définis en LOGO pour piloter des interfaces. Des piles de boîtes et de plaques ont pu être déplacées suivant des objectifs fixés. La résolution de problèmes dans ce type d'univers se place à différents niveaux :

- au niveau de l'environnement créé (déplacement d'une pile de plaques) ;

- au niveau (2) des outils nécessaires pour aborder mieux les problèmes de niveau (1). Définition d'un ensemble de mots (procédures) permettant de parler du problème. La réalisation de commande comme METENROUTE (moteur 1) PENDANT (5s) entre dans ce cadre. L'appel à des procédures écrites en assembleur est, à ce niveau, possible mais pas obligatoire.

Nous voyons bien comment la richesse de l'environnement est hiérarchisée. En travaillant au niveau 1, en supposant les outils du niveau 2 fournis, on résoud des problèmes où ce sont la stratégie, la géométrie, la mécanique qui sont essentielles.



Un chantier de grues !

2. Objectifs d'acquisition de connaissances technologiques

Dans ce cas, l'objectif est d'aborder des problèmes liés à la mécanique, à l'électronique, à la mise en œuvre de capteurs et d'effecteurs divers. Une caractéristique importante pour nous est qu'à ce stade l'objet doit être entièrement modulaire et montable par l'apprenant. Nous retenons volontiers, pour des raisons économiques (grande diffusion), des jouets comme les robots FISCHER-TECHNIK. Nous y trouvons, du point de vue mécanique, des pièces intéressantes (par exemple des modules de transformation rotation-translation par vis d'Archimède, des engrenages divers...), du point de vue capteurs-effecteurs des capteurs de positionnement numérique (compteurs d'impulsions pour calculer une rotation), des interrupteurs de fin de course, des moteurs divers... Du point de vue électronique, l'information est visible, le chemin suivi entre le capteur (ou l'effecteur) et le programme est transparent : la carte d'interface est simple et il est possible d'expliquer tout ce qui se passe.

Du point de vue informatique et programmation, un jeu de primitives, écrites de façon complètement transparente, est fourni. C'est dans leur écriture que l'on peut découvrir (et faire découvrir !) que faire tourner un moteur pas à pas se ramène à l'émission d'un train d'impulsions exprimable par la répétition de l'emission de niveaux 0 et 1 sur une ligne.

Dans cet objectif, l'idée essentielle est de fournir un ensemble de briques matérielles et logicielles. Les briques ont des fonctions bien précises et compréhensibles facilement, que ce soit au niveau de leur conception mécanique, géométrique, électrique, logique. L'intention est alors de permettre une appropriation profonde des concepts essentiels, par une manipulation effective, des constructions personnelles par l'apprenant, tant du point de vue logiciel que matériel.

CE QUE NOUS FAISONS AVEC DES ADULTES

Nous avons expérimenté ce type de pratique avec des élèves de collège, mais aussi avec un public d'adultes de bas niveau (agent de production à Renault). Un autre texte (VIVET 84b) a décrit une première expérience faite en ce sens. Rappelons seulement notre démarche globale.

L'objectif de la première expérience a été d'amener des personnels de production à conceptualiser l'idée de logiciel en créant les conditions effectives d'une activité de programmation (l'idée de logiciel reste hermétique à ceux qui n'ont jamais écrit et exécuté la moindre instruction avec un processeur. Le langage LOGO avait été choisi car il permet d'aborder rapidement des démarches effectives avec des choses concrètes.

Notre intention était de vérifier que LOGO est utilisable avec des populations d'adultes, en particulier si l'objectif n'est pas de former des programmeurs professionnels.

Avec des personnels habitués quotidiennement à manipuler des outils ou des pièces, il est indispensable de partir d'objets concrets. Ainsi, nous sommes partis de la tortue de plancher (qui a fait naître l'idée de CARISTO), et nous avons progressivement été amenés à travailler avec la tortue-écran (représentation déjà très abstraite de l'objet physique).

Ce travail nous a convaincu qu'il est effectivement possible d'amener un tel public d'adultes (à peine le certificat d'études primaires) à conceptualiser l'idée de logiciel. Cela nous a convaincu également qu'il était nécessaire de se doter d'univers techniques qui, pilotés avec la même philosophie, soient des réductions pédagogiques raisonnables d'objets techniques réels. Le travail de conception de ces objets a ainsi démarré, et nous a conduit aux CARISTO, aux grues, aux bras manipulateurs. Les outils nécessaires sont maintenant prêts, et nous entrons dans une phase où l'expérimentation va être à nouveau nécessaire.

CONCLUSION

Le travail que nous faisons montre clairement qu'il est possible d'étendre largement les micro-mondes matériels pilotables sous LOGO. Ceux-ci peuvent être utilisés avec des adolescents, mais aussi avec des adultes pour lesquels une sensibilisation approfondie est souhaitée.

La démarche reste fixe pour nous : il s'agit d'imaginer et de réaliser des maquettes simples modélisant des situations réelles. Ces matériels permettent de construire des univers problèmes variés, pouvant s'adapter à un public donné. La contrainte de base est que toutes ces maquettes doivent être une bonne étape dans la modélisation d'un phénomène physique, et permettre une appropriation rapide quant aux mécanismes mis en jeu. Ces maquettes doivent supporter une programmation "propre" avec un langage comme LOGO et autoriser une transparence maximale allant du bit que l'on voit venir du capteur, à la super-procédure permettant un "beau" mouvement en utilisant "efficacement" ce bit. ■

BIBLIOGRAPHIE

(BASTIDE 82) P. BASTIDE-F. ROBERT : "Initiation et familiarisation à l'informatique à partir d'un dispositif technique simple programmable : l'ascenceur" - Actes du 1er colloque LOGO -Clermont-Ferrand - Décembre 1982 -Distribué par l'IREM d'Orléans.

(BENARROSH 84) Y. BENARROSH : "Robotique Pédagogique" - Journée d'étude organisée par le CESTA - 27 avril 1984 - (texte disponible à la robothèque du CESTA - 1, rue Descartes - 75005 PARIS).

(BRUNEAU 85) J. BRUNEAU - J.L. MONFLIER : Brochure CDDP -LE MANS - Université d'Eté 1985.

(BERTIN 85) D. BERTIN : "Le chenillard jeu de lampes pour le CM" - Revue Education et informatique". (Nathan) - n° 39 - Nov./Déc. 85 - p. 32/35.

(HAIRIE 86) A. HAIRIE : "Un robot qui joue au RUBIK'S CUBE" - A paraître dans "Education et informatique".

(MEYER 83) C. MEYER : "Langage applicatif pédagogique : pour quel domaine industriel" - Actes du 2e colloque national LOGO - LE MANS - Novembre 1983 - CNRS/LISH - Collection ETI n° 3 - p. 21-42.

(PAPERT 81) S. PAPERT : "Jaillissement de l'esprit" - Flammarion - 1981.

(PORQUET 86) C. PORQUET : "Un robot qui joue au TANGRAM" - A paraître dans "Education et Informatique".

(ROBERT 83) F. ROBERT : "Définitions de primitives pour la programmation et le contrôle de processus". Actes du 2e colloque national LOGO - LE MANS - Novembre 1983 - CNRS/LISH - Collection ETI n° 3 p. 57/66.

(SIMON 83) J.C. SIMON : "Rapport sur l'éducation et l'informatisation de la société". Documentation Française. 1980. En particulier annexe I : Compte-rendu du groupe "apprentissage autonome" p. 175/226.

(SUBTIL 85) P. SUBTIL : "Piloter un chariot l'approche LOGO" - Revue Education et informatique (Nathan) - n° 29 - Nov./Déc. 1985 - p. 26/30.

(TANGUY 86) R. TANGUY : "Micro-ordinateurs et robotiques" - A paraître dans Education et informatique".

(TEXIER 85) A. TEXIER : "Des ailes pour la tortue - Simulation de mouvements en LOGO". CNDP - 1985.

(VIVET 81 b) M. VIVET : "Apprentissage autonome type de pédagogie mise en œuvre" - annexe 1 du rapport SIMON sur "l'éducation et l'informatisation de la société" - Documentation française - 1981 - p. 201/211.

(VIVET 82) M. VIVET : "LOGO : un environnement informatique pour la formation d'adultes. Notes du colloque national LOGO - Clermont-Ferrand - Déc. 82 - Disponible : IREM Université d'Orléans.

(VIVET 83) M. VIVET : "LOGO : un outil pour une formation de base à la robotique - Actes du Colloque national "LOGO et enseignements technologiques" - Le Mans - Novembre 1983 - CNRS/LISH - Collection ETI n° 3 - p. 5/19.

(VIVET 84a) M. VIVET : "suggestion pour aborder une formation professionnelle avec LOGO" - Colloque ANTEM II - CESTA - PARIS - 27/29 mars 1984.

(VIVET 84 b) M. VIVET : "LOGO et le monde du travail : une expérience chez Renault - Texte présenté lors du colloque national "LOGO et handicaps" - CIEP - Sèvres - 17/19 décembre 1984.

(VIVET 85) M. VIVET : "robotique pédagogique - des pistes pour un travail concret" - Revue "OPTIONS INFORMATIQUES" - Direction des Lycées - Ministère de l'éducation n° 7 - Janvier 1986 - p. 18/22 - Publié par le CRDP Poitiers - 6, rue Ste Catherine - 86034 Poitiers.

(VIVET 86) M. VIVET : "Technologies de l'information dans la production : des dimensions humaines face aux dimensions techniques" - A paraître - Nouvelle encyclopédie - Commission DIDEROT.

LA ROSACE DU TEMPLE DE DIANE

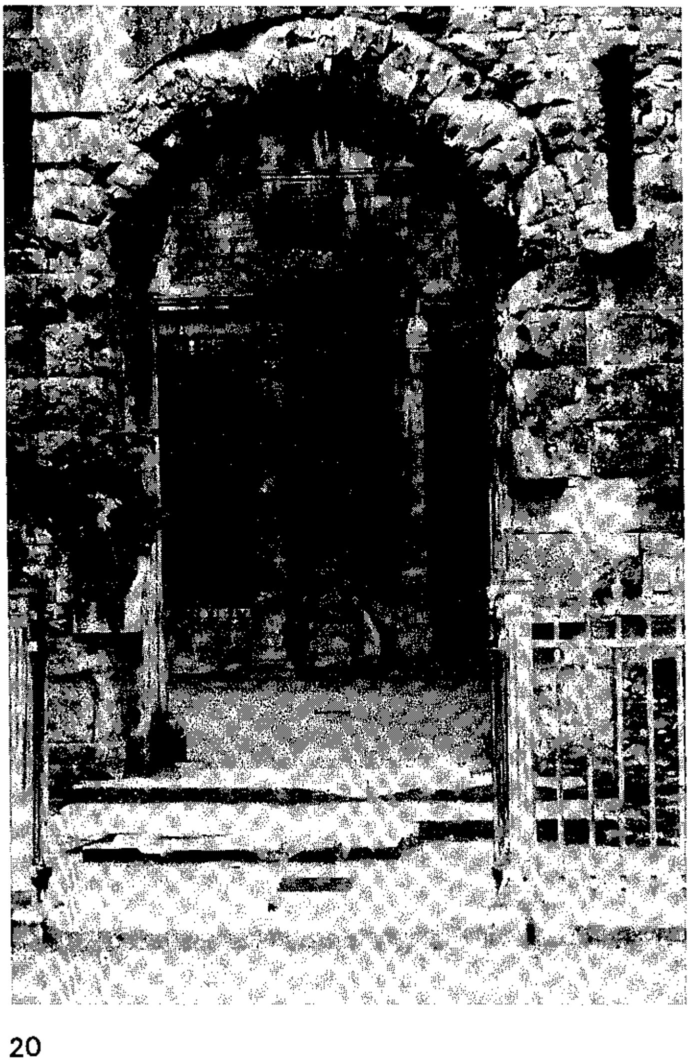
Michel CLINARD - Orléans

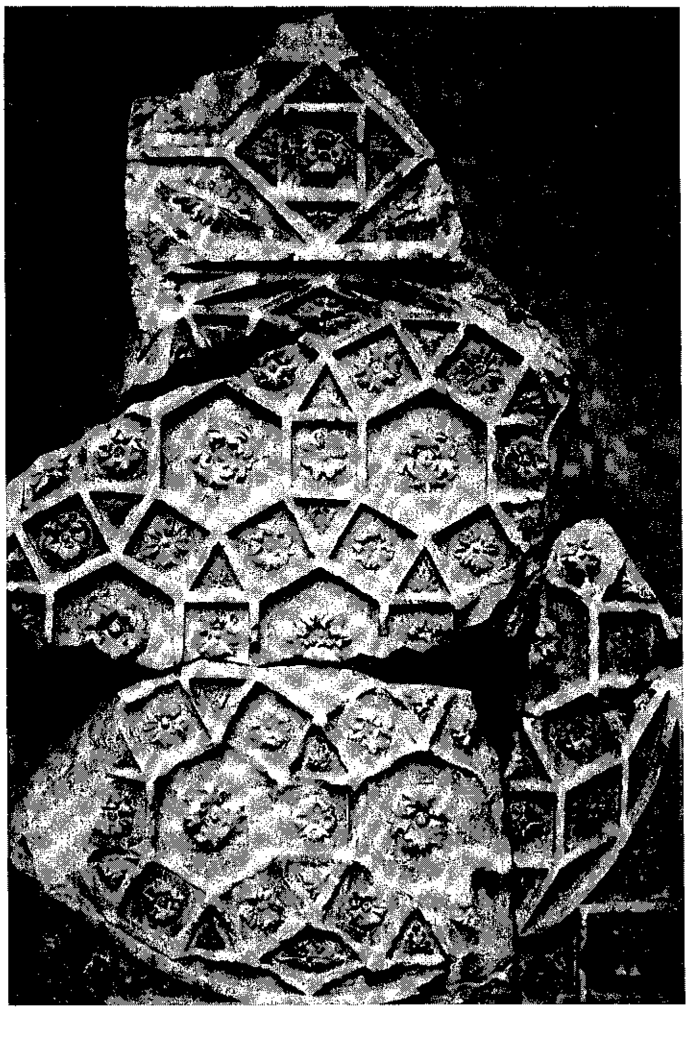
L'auteur de cet article vous invite à une double lecture :
- lecture illustrée des nouveaux programmes des collèges
- lecture commentée des activités proposées et des ouvertures qu'elles appellent.
Le lecteur attentif pourra reconnaître certains passages des textes officiels utilisés ici autant par jeu que pour illustrer le propos.
Les activités proposées ont été réalisées en 1983-1984 dans des classes de 6^e, 5^e et 3^e du Collège d'Olivet (Loiret).

LE THEME DE LA ROSACE

La rosace du temple de Diane se situe dans les Jardins de la Fontaine à Nîmes, au milieu des ruines d'un therme romain. De dimension modeste (environ un mètre de diamètre), elle daterait d'avant J.-C., mais ses origines sont mal connues.

Elle présente pour l'enseignement une source d'intérêts et d'activités tant géométriques que numériques. Elle permet d'engager des travaux sur les méthodes, sans négliger les problèmes de langage et de notations.





Les activités qui suivent peuvent être réinvesties de diverses manières selon les intérêts et les objectifs de chacun :

- point de départ d'une leçon-introduction d'une notion nouvelle,
- travail de synthèse,
- thème d'une évaluation,
- travail autonome - productions écrites (tracé, compte-rendu...),
- situation-problème.

Ce dernier point semble le plus susceptible d'enrichir la vie de classe en fournissant des exemples portant sur des notions en cours d'acquisition et visant à développer des savoir-faire sans mise en forme de connaissances générales. Ces situations-problèmes permettent aussi de développer des activités d'initiation mettant en jeu des notions "non exigibles", mais qui sont néanmoins indispensables aux élèves (voir aussi "schéma d'action").

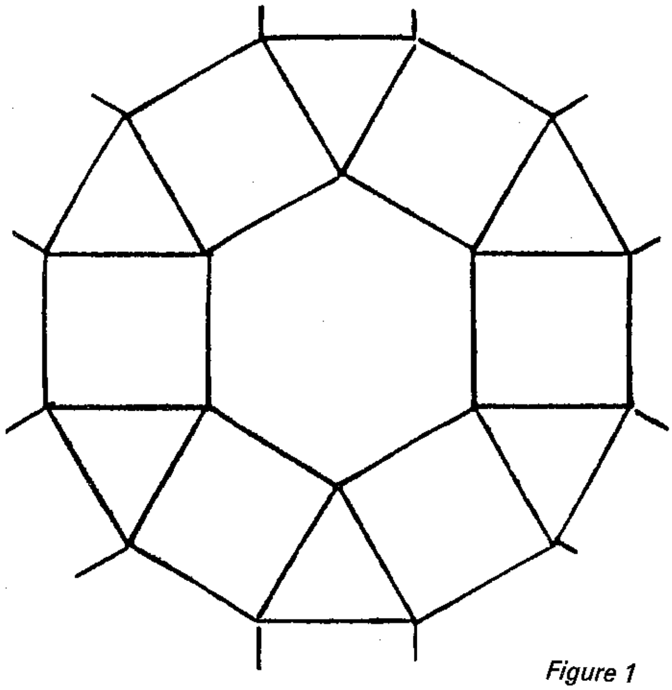


Figure 1

ASPECTS GEOMETRIQUES

Première approche :

Tracé de la rosace présentée en diapositive (ou en photo), à main-levée (sans instrument).

Objectifs :

Comprendre la structure générale, l'organisation des triangles, carrés, hexagones, losanges ; mettre en place le vocabulaire ; travail d'observation et de déduction (analogies, déplacements...) car des parties détruites n'apparaissent pas.

Ce travail, fondamental pour la suite, n'est pas immédiat pour tous les élèves de 6ᵉ : problèmes de latéralisation, difficultés pour obtenir des hexagones "à 6 côtés", hésitations pour mettre en place un modèle régulier complétant les parties manquantes ; certains élèves refusent même de combler les parties détruites non apparentes, il est alors nécessaire de leur montrer qu'il est permis d'imaginer, cette autorisation passe souvent pour une obligation.

L'usage du crayon et de la gomme, l'absence d'instruments (fixant l'action) permettent d'obtenir assez rapidement des résultats satisfaisants pour l'organisation des figures de base.

On peut aussi imaginer une construction avec des allumettes pour des élèves en difficulté.

Tracé géométrique (règle, compas, équerre, calque)

Une construction analytique

Faire dégager *le motif de base* - Fig. 1 - (calque, symétries), puis la structure des carrés, triangles, hexagones qui entrent dans sa composition.

La reproduction du motif (calque) permet de construire toute la rosace. Si on peut séparer la classe en deux groupes, ce travail peut être mené conjointement avec une construction Logo.

Une construction synthétique

Il peut être intéressant et formateur d'amener les élèves, maîtrisant bien la première construction (car il est nécessaire de casser l'image du motif de base) à en concevoir une nouvelle, basée sur l'alignement des côtés, le parallélisme, le centre de la rosace, le "développement concentrique."

Si au départ la construction est bien précise, comme le suggère l'esquisse de la figure 2, la mise en place des centres des hexagones périphériques peut faire appel aux médianes de l'hexagone de départ, au triangle équilatéral, aux diagonales du rectangle, à l'hexagone des 6 centres à construire... les élèves peuvent alors mettre en place de nombreuses stratégies pour terminer la rosace.

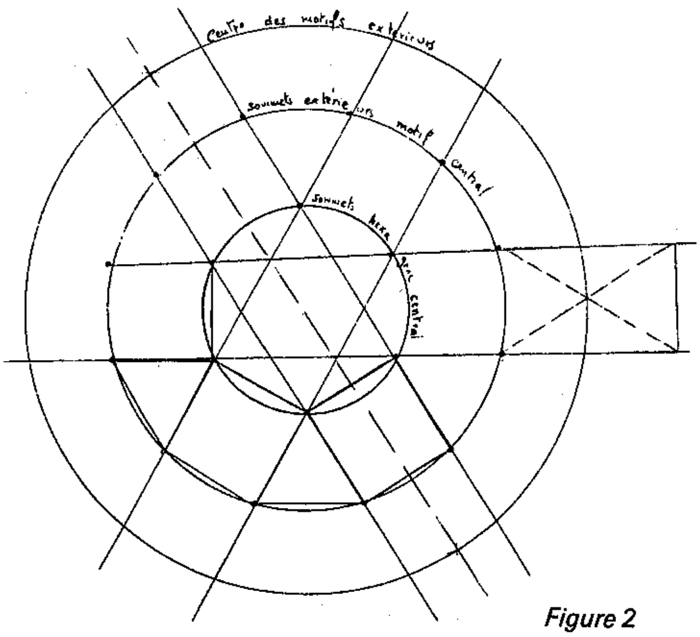


Figure 2

Ils constateront aussi qu'il est nécessaire d'apporter beaucoup de soin et de précision pour obtenir des figures régulières avec des côtés de même mesure et des sommets qui coïncident.

Cette construction, contrairement à la précédente qui privilégie les figures géométriques en tant que surface, met ici en évidence un point de vue ponctuel et segmentaire avec l'alignement des sommets, leur détermination comme intersections de cercles concentriques et de droites parallèles, le tracé de cordes.

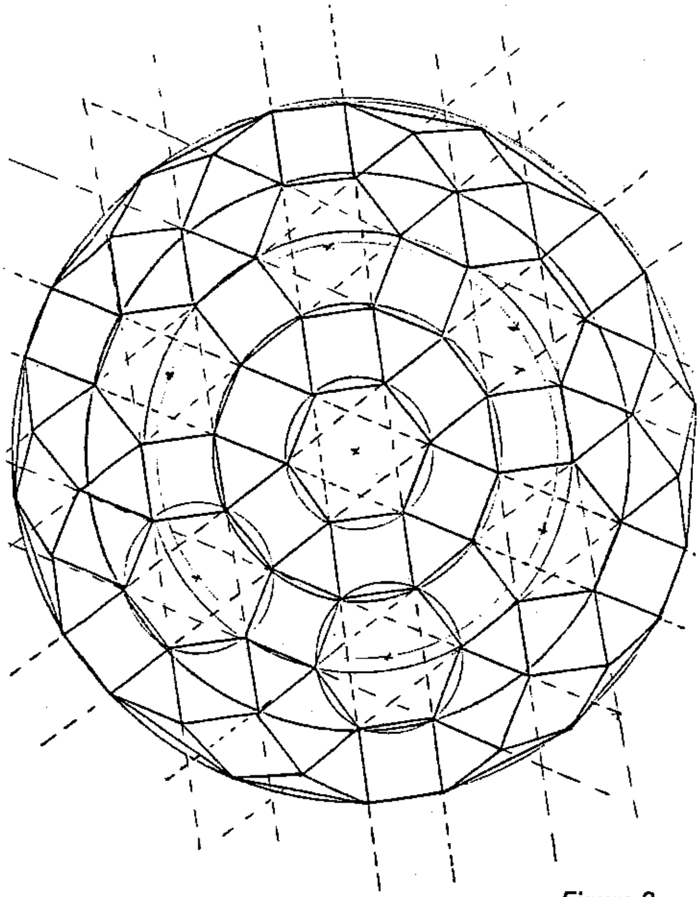


Figure 3

Avec la tortue Logo

La dimension apportée par la tortue Logo ne peut être ignorée aujourd'hui.

On peut partir d'une même consigne : "Dessiner la rosace (sans les losanges et les triangles isocèles du bord) ou le motif de base (fig. 1)." Les exigences quant aux pratiques mises en jeu par les élèves restent liées à leur niveau de connaissance et leurs expériences en Logo.

On peut graduer les difficultés :

1) Pilotage direct et procédure élémentaire considérée comme un regroupement d'ordres pour faciliter la correction, économiser le temps de frappe, refaire le tracé de la figure.
2) Modularité de niveau 1 : un seul niveau d'appel de sous-procédures.
   Création d'une procédure *motif* et appel dans la procédure *rosace*
   ou
   Création des procédures *carré* et *triangle* et appel dans une troisième procédure.
3) Modularité de niveau supérieur.
   Rosace appelle *motif* qui appelle *maison* qui appelle *carré* et *triangle.*
4) Paramétrage des procédures. (Travaux d'échelle).

```
Pour ROSACE :C
    REPETE 6 [MOTIF :C TG 150 AV :C TD 90 ]
    FIN

Pour MOTIF :C
    REPETE 6 [MAISON :C AV :C TD 30 AV :C TD 90 ]
    FIN

Pour MAISON :C
    CARRE :C TG 60 TRIANGLE :C
    FIN

Pour CARRE :C
    REPETE 4 [AV :C TD 90 ]
    FIN

Pour TRIANGLE :C
    REPETE 3 [AV :C TD 120 ]
    FIN
```

Les exemples de procédures reprennent les points 3 et 4.

L'utilisation de Logo dans le cadre d'un travail ouvert comme celui-ci, présente plusieurs avantages :

- travaux géométriques : la règle et le compas privilégient les notions d'équidistance, la tortue Logo met en évidence les propriétés angulaires des figures (*), leurs aspect itératif (répète...).

On peut espérer un renforcement des connaissances avec la confrontation de ces deux modes de travail appliquées à une même construction.

- Mise en place d'une démarche d'essais avec validation immédiate prenant en compte les erreurs comme éléments constructifs.

- Développement de la pensée logique avec l'incitation à mettre en place des démarches structurées (modularité des programmes) tant du point de vue de l'efficacité (production-correction) que de la communication des productions et du réinvestissement éventuel dans d'autres travaux à venir.

Pour les élèves les plus rapides, on peut mettre en avant le principe d'économie d'actions (ne pas passer plusieurs fois sur le même segment).

**Le point de vue angulaire est parfois négligé. "Un quadrilatère non croisé dont les angles sont égaux..." est une phrase qui n'évoque pas grand-chose pour les élèves de Collège. Il est vrai qu'elle apparaît rarement dans les manuels.*

Programmes de construction de figure

Là encore il peut être intéressant de lier le travail Logo avec la production en français des consignes de construction (papier-crayon-compas-règle) du motif de base, par exemple.

L'algorithme de construction étant acquis, une part importante de l'activité est d'amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de communiquer clairement et sans ambiguité :

vocabulaire - introduction et utilisation de notations géométriques - désignation de points de la figure par des lettres (on sait l'importance et les difficultés soulevées par ce dernier point avec la thèse de C. Laborde (Université de Grenoble) "langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques").

Les élèves considèrent souvent cet exercice fondamental comme un travail inutile et fastidieux (contrat honoré mais travail baclé), sauf s'il conduit à un échange entre eux (ouf !), il faut alors prévoir plusieurs figures distinctes.

ASPECTS NUMERIQUES

Trouver une valeur approchée de π en considérant que la rosace se confond avec un disque.

Une telle situation-problème met en jeu de nombreux aspects mathématiques qui peuvent être plus ou moins développés (voire ignorés) selon le niveau de la classe ou les capacités des élèves.

- Formulation de l'énoncé : vocabulaire-implicite (le calcul de l'aire du disque est-il connu ?), présence de la notation π (s'agit-il d'une vérification ou d'une découverte (ou redécouverte) de la valeur du quotient aire disque/carré du rayon ?).
- Calculs d'aire (triangle, parallélogramme, hexagone régulier...).
- Quotient de deux décimaux.
- Organisation des calculs (utilisation d'un tableau par exemple).
- Hauteur du triangle équilatéral.
- Nombres rationnels - irrationnels.
- Usage des calculettes.
- Ecriture littérale : formule d'aire, expression en fonction du côté commun des figures de base.
- Agrandissement ou réduction des longueurs. Conséquences sur les aires et le quotient considéré.
- Preuve-vérification-démarche expérimentale : les expériences de classe ou un programme Logo donnant en plus du tracé de la rosace son aire et son rayon (éventuellement le quotient considéré) permettent une approche expérimentale de la formule aire du disque = $\pi \times (\text{rayon})^2$.

Reste à poser le problème de sa généralisation, de sa validité. D'autres points de vue peuvent être développés pour institutionnaliser cette formule : autres vérifications, esquisse de preuve.

On peut renvoyer aux travaux de Serge LANG (Des jeunes et des maths, S. Lang fait des maths en public. Belin) ou au Petit Archimède numéro spécial π.

En sixième

On fixe à 2 cm le côté commun des figures de base et on donne :

- aire du triangle équilatéral : 1,73 cm²,
- aire du triangle isocèle : 1 cm².

Voici les conclusions d'une élève :

III Surfaces et aires:

figure	aire	nombre de figures	aire totale
carré	4 cm²	30	120 cm²
triangle équilatéral	1,73 cm²	24	41,6 cm²
hexagone	10,38 cm²	4	41,52 cm²
losange	3,46 cm²	6	20,76 cm²
triangle isocèle	1 cm²	12	12 cm²

avec un rayon de 3,2 cm on a : $\frac{\text{aire}}{(\text{rayon})^2} = 3{,}15$

on obtient une approximation satisfaisante de π (la Rosace se confondant presque avec un disque)

On appelle la formule

aire du disque = $\pi \times (\text{rayon})^2$

En troisième :

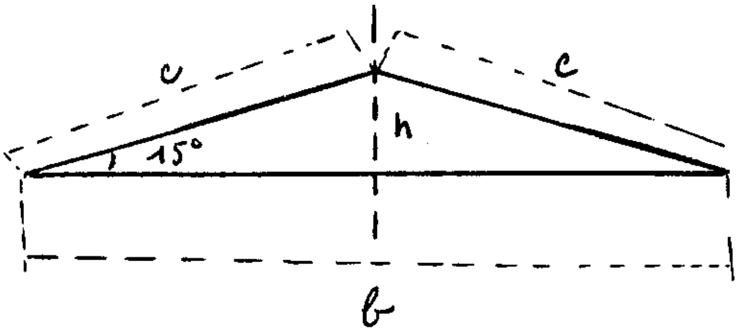
On note C la mesure du côté commun :

Aire-pythagore

Figures	Aires
carré	C^2
triangle équilatéral	$\frac{C^2\sqrt{3}}{4}$
losange	$\frac{C^2\sqrt{3}}{2}$
hexagone	$\frac{3C^2\sqrt{3}}{2}$
triangle rectangle isocèle	$\frac{C^2}{4}$

Trigonométrie :

Le dernier calcul peut donner lieu à un travail trigonométrique.



aire du triangle = $\frac{b \times h}{2}$

$= \frac{2 \times C \times \cos 15° \times C \sin 15°}{2}$

c'est-à-dire :
aire = $C^2 \sin 15° \times \cos 15°$

Les calculettes donnent $\sin 15° \times \cos 15° = 0{,}25$.

Avec les tables on obtient 0,24997492.

On peut faire remarquer aux élèves que :
$2 \times \sin 15° \times \cos 15° = \sin 30°$.

Calcul algébrique :
Si on note AR l'aire de la rosace on a alors :

$$AR = C^2 (30 \times 1 + 24 \times \frac{\sqrt{3}}{4} + 6 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + 7 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + 12 \times \frac{1}{4}$$

$$AR = C^2 \left(\frac{66 + 39\sqrt{3}}{2}\right)$$

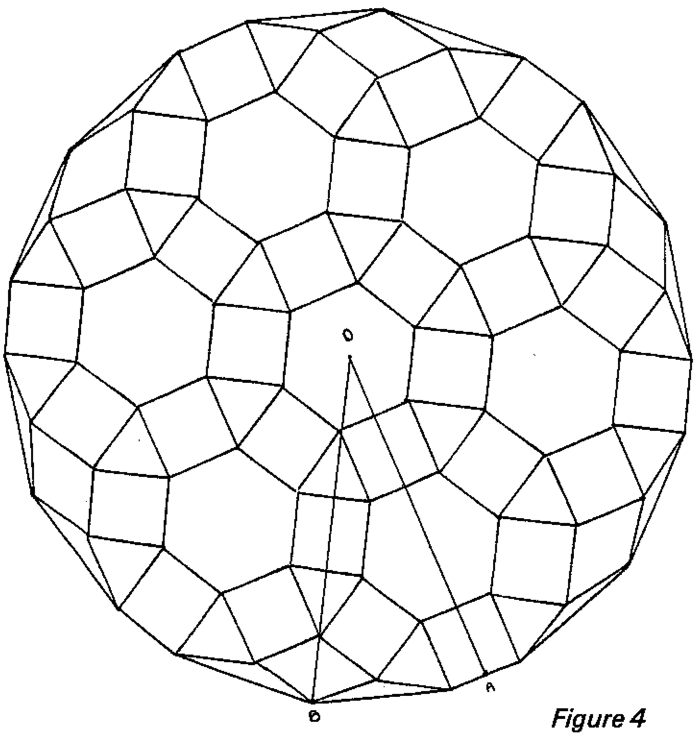


Figure 4

La figure 4 permet de considérer les rayons OA et OB des disques D (O,OA) contenus dans la rosace et D (O,OB) contenant la rosace :

$$OA = C \times \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } OB = C (3 + \sqrt{3})$$

Ordre et racine carrée
On peut demander de vérifier algébriquement que $OA < OB$.

Encadrement
La relation aire D (O,OA) < AR < aire D (O,OB) permet d'obtenir :

$$\frac{\text{aire D (O,OA)}}{OA^2} < \frac{AR}{OA^2} \text{ et } \frac{AR}{OB^2} < \frac{\text{aire D (O,OB)}}{OB^2}$$

en tenant compte de la formule de l'aire du disque :

$$\frac{AR}{OB^2} < \pi < \frac{AR}{OA^2}$$

Calcul algébrique
Un peu long et délicat mais du niveau de 3e.

$$\frac{5}{4} + \sqrt{3} < \pi < \frac{60 + 186\sqrt{3}}{121}$$

Calcul numérique
(Approximation à partir de l'encadrement précédent ou utilisation de la calculette à partir de la formule littérale).
$2{,}9820 < \pi < 3{,}1583$

POUR TERMINER

Les travaux autour de la rosace permettent de développer deux principes :

- choix des méthodes pédagogiques et diversité des approches didactiques,
- prise en compte de la diversité des élèves (divers niveaux d'approfondissement pour une même question).

Ils permettent aussi une évaluation qui vise à identifier, à côté des réussites, les difficultés rencontrées par certains élèves dans une perspective moins réductrice que les contrôles traditionnels.

La rosace du temple de Diane, comme tous les objets riches et profonds sous des aspects simples et discrets, permet sans doute d'autres approches. Selon les intérêts et la culture de chacun, de nouveaux éclairages, de nouvelles activités ou illustrations peuvent être proposées (faites en partie à l'IREM d'Orléans).

L'intelligence des choses vient par la sympathie. ■

(Le Corbusier)

GRILLE D'ANALYSE D'ACTIVITE OU DE SITUATION-PROBLEME*

0) Fonctions de l'activité : (situation-problème ayant quelles visées : découverte ? réinvestissement ? évaluation ?).

1) Prérequis

- définition des prérequis nécessaires et leur liste
- évaluation des prérequis (par un test ou l'utilisation de tests antérieurs)
- activité préparatoire pour que chacun atteigne les prérequis nécessaires
- conformité au programme

2) Objectifs visés

- connaissances exigibles (voir programme)
- méthodes
- niveau des exigences
- perception de l'espace ?
- relations dans le groupe-classe ?
- utilisation des instruments ?

3) Gestion de l'activité en classe

- forme de travail (groupes, équipes, ...)
- lieu
- matériels nécessaires
- temps à consacrer
- contenu et forme de la trace écrite
- diversification possible des méthodes de travail en fonction de la connaissance que le maître peut avoir des possibilités des élèves.

4) Evaluation

a) évaluation des niveaux exigibles

- évaluation formative
  - en cours ou en fin d'activité
  - sous quelle forme :
    - sous forme d'objectifs atteints ou non
    - avec grille d'analyse d'erreurs et reprise d'objectifs
    - avec autocorrection ou pas
  - niveau de difficulté
  - à quel rythme

évaluation sommative ?
Est-ce que tous les moyens ont été mis en œuvre (à travers d'autres activités) pour atteindre les objectifs testés ?

b) - évaluation de l'activité

le professeur a-t-il atteint ses propres objectifs ?

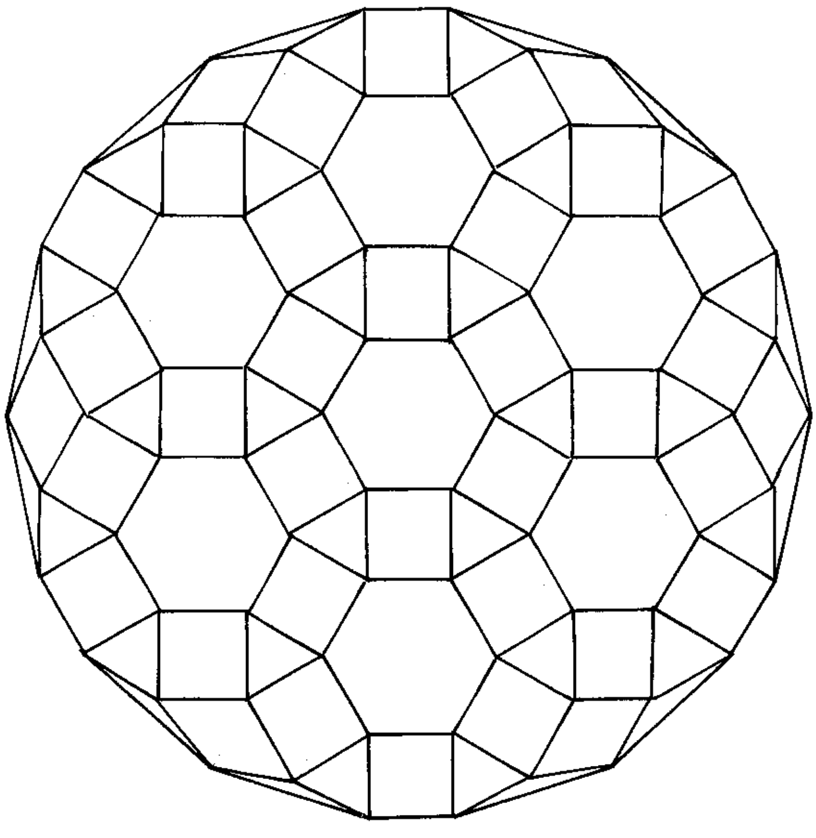
l'élève a-t-il l'impression d'avoir atteint les objectifs qu'on lui a définis ?

5) Suggestions pour une amélioration ou un enrichissement de la situation étudiée.

**Mise en place lors de la préparation des journées "nouveaux programmes de 6e", à Orléans.*

BIBLIOGRAPHIE

- Ministère de l'Education Nationale.
  Programmes et instructions des Collèges. BO. CNDP et Livre de Poche.
- Martin GARDNER : Nouveaux divertissements mathématiques. Dunod.
- André WARUSFEL : Les nombres et leur mystère. Seuil.
- Serge LANG : • Fait des maths en public, BELIN.
  • Des jeunes et des maths, BELIN.
- Revue du palais de la découverte. Numéro spécial 12. Janvier 1978.
- Gérard AUDIBERT : Démarche de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Publication APMEP.
- Colette LABORDE : Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques. Université de Grenoble.
- François BOULE : Espace et géométrie. Cedic.
- Numéro spécial π. Petit Archiméde n° 64-65. Mai 1980.
- "Le livre du problème". IREM de Strasbourg.



à suivre...

NOUVELLE RUBRIQUE ITERATIVE

AU RYTHME DES ALGORITHMES
Premier épisode : initialisation des données

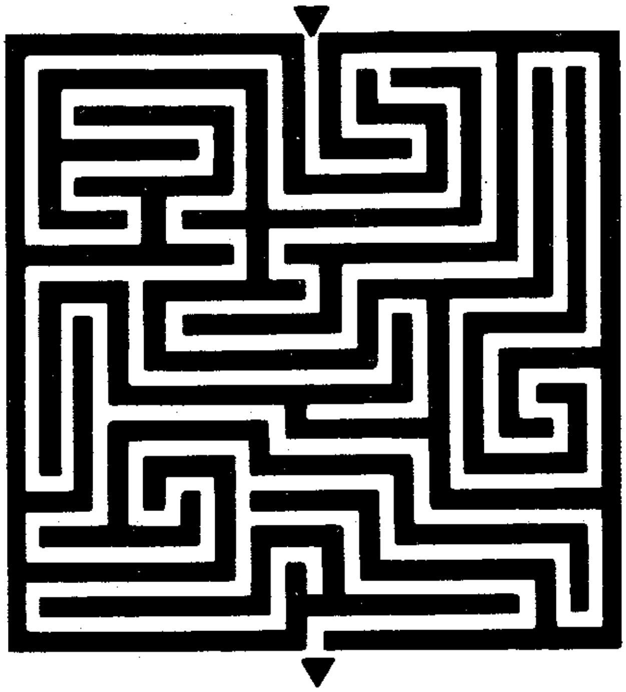
L'équipe d'animation me demande de tenir une rubrique "Algorithme" qui alimenterait les prochains numéros du PLOT. Demande flatteuse mais qui montre que son choix est sans doute plus motivé par mes difficultés à refuser une collaboration à la revue que par mes compétences algorithmiques : c'est pourquoi, je m'empresse d'ouvrir cette nouvelle rubrique à tous ceux qui voudraient bien communiquer leur savoir, savoir-faire et expériences en adressant leur article au journal.

M. C.

Je serais tenté d'arrêter là ce premier article, court, synthétique, bel appel de sous-procédures. *

Une question s'impose toutefois : pourquoi ouvrir une telle rubrique ? Est-il nécessaire d'évoquer régulièrement l'algorithmique ? Quels besoins, quelles demandes existe t-il en ce domaine ?

Voici une réponse qui appelle une autre question : l'informatique a beaucoup modifié l'environnement (bureautique, télématique, ...et autres mots en "tique" comme... banque de données) et cela pose un problème de culture et en particulier de culture mathématique. Les mathématiques auront-elles à être "discipline d'accueil" pour une partie de cette nouvelle culture ? Quel sera l'effet de l'informatique sur les mathématiques elles-mêmes et sur la façon de les enseigner ?



* NDLR : Après avoir mis en doute la clairvoyance de l'équipe de rédaction, Michel Clinard traite les auteurs potentiels d'articles de sous-procédures. Est-ce bien supportable ?

Extrait du Bulletin APM n° 352 p 56 - Févr. 86

Prenons l'exemple des algorithmes : ils apparaissent de plus en plus, pourtant ils existent dans les mathématiques depuis fort longtemps ! Mais ils deviennent mode de pensée et de raisonnement. On trouve des algorithmes de calcul et de construction géométrique mais aussi des définitions algorithmiques, des preuves de type algorithmique. La "preuve d'algorithmes" se développe, non pas pour démontrer après coup que tel algorithme convient, mais dans la construction même des algorithmes. Ainsi, au lieu de "démontrer par récurrence" une propriété, on peut la "penser récursivement", la preuve venant alors en même temps que l'énoncé.

Les **contenus** *eux-mêmes vont être influencés par l'informatique (automates, mathématiques discrètes, logique...). Les chapitres vont être rééquilibrés. On peut se demander par exemple si l'algèbre deviendra moins formelle et plus manipulatoire, outil pour résoudre des problèmes, alors que la géométrie serait plutôt le lieu de la formation à l'esprit algorithmique. La technologie aussi joue un rôle et notamment la disponibilité sur calculatrices de logiciels puissants : elle va changer l'importance d'un certain type d'exercices de calcul symbolique formel plutôt fastidieux : recherche de primitives, trigonométrie...*

*On connaît encore très peu les effets de l'utilisation de l'informatique sur l'*apprentissage *lui-même. Nous sommes tous des "Gaston Lagaffe" de l'informatique, notamment avec les logiciels plus ou moins bricolés dont nous ne maîtrisons pas le fonctionnement du point de vue de l'acquisition des connaissances. L'avancée des travaux en didactique devrait permettre de construire de façon plus scientifique et donc plus fiable des outils d'aide à l'enseignement.*

Bernard CORNU

On sera donc amené par la suite à développer plus particulièrement trois aspects de l'algorithmique (qui ne sont ni exhaustifs, ni indépendants) :

Les aspects techniques :

Restons toutefois critique devant les progrès des instruments, des nouvelles technologies qui deviennent parfois leur propre objet d'étude.

Les aspects pédagogiques :

Plusieurs directions peuvent être envisagées :

- Apprendre la programmation aux élèves (pour elle-même, comme outil permettant de résoudre des problèmes, pour développer logique, méthode et rigueur...).
- Utiliser des programmes existants pour aborder des notions "classiques", renforcer leur apprentissage ; utiliser des logiciels puissants (Multiplan - Mumath), afin de dépasser le stade calculatoire.
- Permettre les simulations favorisant la mise en place de démarches expérimentales (situations physiques, calculatoires, géométriques...).
- Directions nouvelles : analyse récurrente des problèmes ; preuve d'algorithme ; traitement arborescent...

Les aspects théoriques :

Maîtriser les algorithmes, c'est plus qu'apprendre à programmer (car programmer n'est pas en soi plus exaltant que d'apprendre la grammaire ou les règles du calcul algébrique). C'est être capable de résoudre des problèmes, de gérer des données d'une manière structurée, économique et certaine. Une bonne connaissance de l'algorithmique (et de l'informatique en général) nécessite un contact suffisamment intime avec des notions théoriques précises (itération, récursivité, modes applicatif ou/et déclaratif, file, pile...) pour que programmer (avec ou sans machine !) soit aussi aisé et agréable que lire, écrire ou calculer.
Intégrer ces notions théoriques est aussi une source de richesse pour notre enseignement et pour notre culture en permettant une vision élargie des choses. (Cette dernière remarque fait référence à l'ouvrage de Douglas Hofstadter : Gödell - Bach - Escher (Inter-édition) qui développe de superbe façon la notion de système auto-référant).

Mais à-propos, je fais partie de l'équipe de rédaction du PLOT qui m'a demandé d'être "responsable" de cette rubrique. Demande auto-référante ou non ? Le traitement récursif suivant convient-il ?

DEMANDE équipe rédaction (liste des 15 membres de l'équipe : voir 1[re] page) → (nom du responsable "rubrique algorithme")

Choix liste : liste vide : → pas de responsable, pas de rubrique

liste non vide : → choix réponse

Réponse premier élément liste : OUI : → nom du responsable

Réponse premier élément liste : NON : → DEMANDE équipe animation*

Fin choix réponse

Fin demande équipe animation

**La procédure DEMANDE s'appelle elle-même : première approche de la récursivité.*

Si maintenant on demande la collaboration de personnes extérieures à l'équipe d'animation (on change donc la liste de départ), la procédure "DEMANDE" reste-elle récursive ? La demande reste-elle auto-référante ? La procédure "DEMANDE" est-elle auto-référante ?

C'est tout pour cette fois !

à suivre

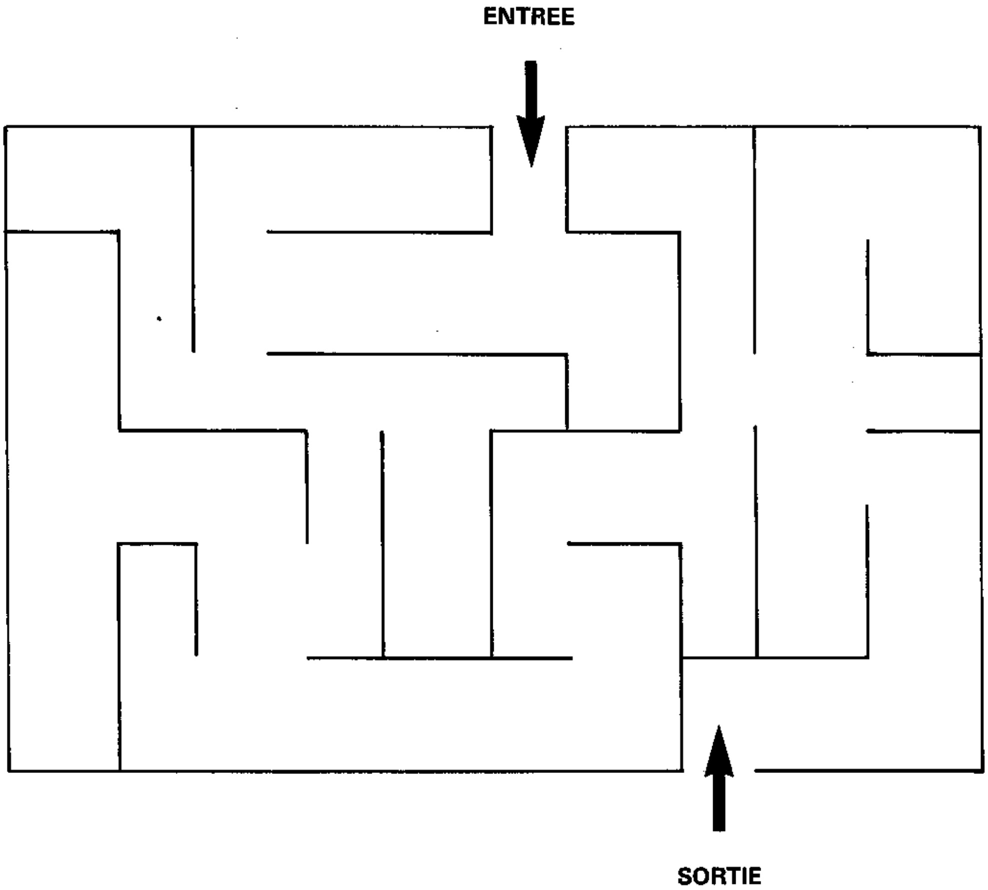
PETIT PROBLEME POUR LA SUITE

1. Prendre un labyrinthe :

La figure ci-dessous facilite l'étude mais il existe de "beaux" problèmes dans le livre de France de Ranchin (Plaisir des jeux - Hatier) : labyrinthes.

3. Trouver un algorithme :

Qui permette de sortir de n'importe quel labyrinthe.



2. Ecrire un algorithme :

pour parcourir le labyrinthe ci-dessus en n'utilisant que les actions élémentaires suivantes :

TG : (pivoter à gauche, on reste dans la même case)
TD : (pivoter à droite...)
AV : (avancer d'une case dans la direction où on regarde...)
OB : test rendant **vrai** : s'il y a un mur devant soi.
faux : sinon
SOR : test rendant **vrai** : si on est en S
faux : sinon

Aides :

- Logiciel AGD sur nano-réseau (valise IPT des stages de l'été 1985).
- Théorie d'Euler.
- Minotaure : logiciel 3 dimensions en Logo (nano-réseau) : moins intéressant pour la recherche algorithmique mais très formateur pour le repérage dans l'espace et les représentations 3 dimensions. ■

A-P$_L$OT-STROPHE

SPECIAL BREVET DES COLLEGES

L'événement étant d'importance et les résultats n'étant pas restés sans écho, nous vous proposons en avant première des annales, trois sujets du cru 86 avec commentaires à chaud d'un collègue de la régionale de Nantes. Sachez encore que l'Apmep nationale coordonne une évaluation de tous ces sujets afin de mesurer l'adéquation aux nouveaux programmes, l'évolution et les répercussions sur la pratique enseignante au cours des années à venir.

RENNES

1er EXERCICE

1° Calculer les nombres suivants. On demande les valeurs exactes les plus simples possibles et non des valeurs approchées.

$25 - 5 \times 9 =$

$\dfrac{10+5}{10-5} =$

$\dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{6} \times \dfrac{1}{3} =$

$\dfrac{7}{4} : \dfrac{1}{6} =$

$\dfrac{3}{16}\left(\dfrac{7}{3} - 1\right) =$

$\left(7 - \dfrac{35}{5}\right)\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{11}\right) =$

$\dfrac{7^5}{7^3} =$

$-5^2 + 5 =$

$\sqrt{\dfrac{64}{25}} =$

$|\ 2{,}5 - 3\ | + |\ -5\ | =$

$7\sqrt{3} + 2\sqrt{27} =$

$\sqrt{100-36} =$

$\dfrac{18}{3} + 6{,}1 =$

$(5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) =$

2° Les quatre droites d'équations : $y = 3 - x$, $y = \dfrac{x}{2} - 1$, $y = 3$, $y = 2x$ sont représentées dans le graphique ci-dessous.

Complétez les phrases suivantes :

La droite (D_1) a pour équation :
La droite (D_2) a pour équation :
La droite (D_3) a pour équation :
La droite (D_4) a pour équation :

2e EXERCICE

I L'unité de longueur est le cm.

1° Construire un triangle (ABC) avec $AC = 8$ $AB = 6{,}5$ $BC = 6$
Placer le point I du segment [AB] tel que $AI = 2$.

2° Construire le point H projection orthogonale de I sur la droite (AC).
Construire le point P projection orthogonale de I sur la droite (BC).

3° Construire le cercle circonscrit au triangle (PIC).
Le point H appartient-t-il à ce cercle ? Justifier la réponse.

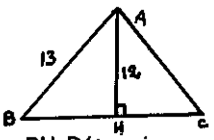
4° Construire le point F symétrique de B par rapport à I.

5° Construire le point E tel que (BEFH) soit un parallélogramme.

II Dans la figure ci-dessous, on donne :

$AB = 13$ $AH = 12$ $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{4}{5}$

(AH) perpendiculaire à (BC)



1° Calculer BH. Déterminer un encadrement de l'angle $\widehat{ABC}$ à un degré près.
On donne l'extrait de table ci-dessous :
$\sin 66° = 0{,}914$ $\sin 68° = 0{,}927$
$\sin 67° = 0{,}921$ $\sin 69° = 0{,}934$

2° Calculer AC et CH

3° La parallèle à la droite (AB) passant par H coupe la droite (AC) en K. Calculer CK.

3e EXERCICE

On considère les applications f et g définies dans R par :

$f(x) = (2x - 3)^2 - (x - 1)^2$.

$g(x) = (3x - 4)(x - 2) - (6x - 8)(x - 3)$.

1° Factoriser f(x) et g(x).

2° Développer et réduire f(x).

3° En utilisant les expressions de f(x) et g(x) qui vous semblent les mieux adaptées, résoudre dans R les équations :

$g(x) = 0$,

$f(x) = g(x)$,

$f(x) = 3x^2$.

4° Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives :

$(D_1) : y = -x + 4$

$(D_2) : y = 3x - 4$

a) Construire (D_1) et (D_2)

b) (D_1) coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B ; (D_2) coupe l'axe des abscisses en G et l'axe des ordonnées en F. Les droites (D_1) et (D_2) se coupent en K.
Calculer les coordonnées des points K, A, B, F et G.

c) Démontrer que $\overrightarrow{FG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FK}$ et que la droite (BG) coupe le segment [AF] en son milieu.

ORLEANS-TOURS

1re partie : EXERCICES NUMERIQUES

Les exercices I et II sont indépendants.

I - Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

1) $A = 2 - \frac{21}{14} + \frac{1}{12}$

2) $B = - \frac{11}{5} \times \frac{15}{44}$

3) $C = \dfrac{\frac{5}{11}}{-\frac{35}{22}}$

II - On considère l'application f de IR dans IR définie par :
$f(x) = (x+3)^2 - (2x-7)^2$

1) Développer f(x) ; réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de x.

2) Mettre f(x) sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

3) Calculer f(10).

4) Résoudre dans IR l'équation f(x) = 0.

2e partie : EXERCICES GEOMETRIQUES

Les deux exercices I et II sont indépendants.

On ne donnera pas de résultats numériques sous forme approchée.

I - L'unité étant le cm, construire un triangle A B C rectangle en B tel que BA = BC = 4.

Sur la demi-droite d'origine A contenant B, placer le point D tel que AD = 12.

1) Montrer que $AC = 4\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{32}$).

2) On appelle E le projeté de B sur (AC) parallèlement à (DC). En utilisant l'énoncé de Thalès, calculer AE.

3) Calculer CD puis le sinus de l'angle géométrique $\widehat{CDB}$.

II - Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On considère les points A, B, C définis par A (- 6 ; 3), B (- 1 ; 5), C (3 ; -5).

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CA}$.

2) Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

3) Démontrer que les points A, B, C appartiennent à un cercle dont on calculera les coordonnées du centre I.

3e partie : QUESTIONS ENCHAINEES

Pour effectuer le transport de marchandises, on a la possibilité de s'adresser à deux entreprises A et B qui proposent les conditions suivantes :

Tarif entreprise A : 2 F par kilomètre parcouru.

Tarif entreprise B : Prise en charge de 210 F **indépendante du kilométrage, à laquelle on doit ajouter 1,70 F par kilomètre parcouru.**

1 - Combien paie-t-on dans chaque cas pour parcourir 100 kilomètres ? 1000 kilomètres ?

2 - x étant le nombre de kilomètres parcourus,
on note f(x) le prix demandé par l'entreprise A.
on note g(x) le prix demandé par l'entreprise B.
Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.

3 - Représenter avec soin (sur papier millimétré), dans un même repère, les fonctions obtenues précédemment pour $x \in [0, 1000]$ (abscisses : 1 cm pour 100 km ; ordonnées : 1 cm pour 100 F).

4 - Calculer pour quel kilométrage les deux **factures sont les mêmes.** Quel est alors le prix **à payer ?**
Expliquer comment retrouver ce résultat sur le graphique.

NANTES

1er EXERCICE

A) Effectuer les calculs en faisant apparaître les différentes étapes.

1) $-234,67 - (-678,6)$.

2) $\frac{3}{7} \times \frac{28}{15} \times \frac{25}{12}$

3) $1 - \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}}$

B) Calculer les dimensions d'un rectangle dont la longueur est triple de la largeur et dont l'aire est 2700 m^2.

C) Résoudre l'équation $6(x^2 + 8)(3x - 4) = 0$.

D) Résoudre **graphiquement** sur un même dessin les deux systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ Vérifier le résultat. (pour le système 1).

2) $\begin{cases} x - 2y + 2 \leqslant 0 \\ 2x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

2e EXERCICE

Dans cet exercice prendre comme unité de longueur le centimètre.
Les figures seront faites avec le plus grand soin.

A) ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD]. $\hat{A}$ est droit. On a AB = 5, AD = 12 et CD = 16. Calculer la longueur du côté [BC] et celles des diagonales [AC] et [BD].

B) ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 et AC = 6.
Soit C' le point de la demi-droite (AC) tel que AC' = 7. B' est le point d'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C'.
Calculer les longueurs AB' et BC.
Calculer la mesure en degrés, de $\widehat{BAC}$.

C) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ placer les points A et J définis par leurs coordonnées :

A (– 3, 4) J (– 2, 1)

1) Déterminer les coordonnées du point B, image du point A par la translation de vecteur $6\vec{i} + 2\vec{j}$.

2) Déterminer les coordonnées du point C, symétrique du point A par rapport à J.

3) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3e EXERCICE

Le dessin doit être réalisé avec le plus grand soin. L'unité choisie est le centimètre.

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5 et [AB] un diamètre de ce cercle. La médiatrice de [OA] coupe $\mathcal{C}$ en E et D et (OA) en H.

1) Démontrer que AEOD est un losange. Préciser la nature du triangle AEB (justifier la réponse). Calculer EH. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{EBA}$.

2) Soit F le symétrique de O par rapport à D. Démontrer que AOF est un triangle rectangle et que AEDF est un parallélogramme.

3) Soit J le milieu de [AF]. Montrer que les points A, J, D, H appartiennent à un cercle dont le centre est le milieu du segment [EF].

Enquête Apmep et commentaires
Roger PERROT - Rezé

Je viens de surveiller l'épreuve de maths du brevet des collèges mais je n'en serai pas correcteur. Je trouve aussitôt au courrier l'enquête de l'A.P.M.E.P. auprès de ses adhérents.

J'en approuve tout à fait le principe comme d'ailleurs - pour l'essentiel - l'orientation et tout le travail de l'association depuis bien des années.
Je ne sais si je remplirai cette grille. Ce sera peut-être fait par quelque(s) autre(s) collègue(s). Pour le moment et avant même de connaître tout résultat, je préfère donner quelques observations à chaud.

J'avais des craintes. Quand on voit ce que deviennent dans les manuels - y compris ceux rédigés par d'anciens responsables nationaux de l'A.P.M.E.P. - certaines orientations nouvelles et à mon sens fondamentales, *explicitées* malgré toutes les altérations et coupures du projet initial de la COPREM, dans les instructions officielles et leurs compléments, on doit encore s'attendre à tout.

En ***très gros*** j'ai été plutôt favorablement surpris. Je pourrai peut-être échapper en partie l'an prochain, à l'unique obsession des élèves et de leurs parents de refaire cinquante trois fois ces mêmes exercices pour réussir ceux de juin 87. Cela dit, dans les détails, et pas seulement à mon avis, à propos de la longueur du texte, j'aurai beaucoup à ajouter. Mais justement la grille de l'enquête le permettra sans doute.

Ce dont je veux faire part tout de suite ce sont des symptômes.

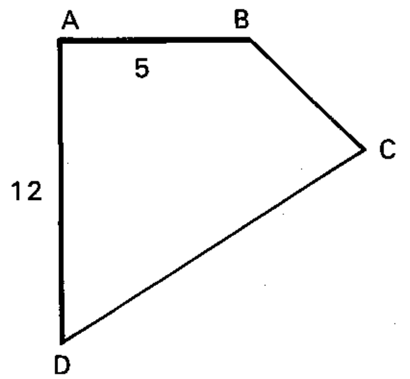
Dans ma salle, un seul candidat est sorti 20 mn avant la fin de l'épreuve. J'ai eu ainsi la possibilité de jeter un œil sur sa copie.

1) Voici - in extenso - sa rédaction de la démonstration 3/3 :

"Soit J milieu de [AF] et (AF) // à (HD) et (AH) // (JD) et que les diagonales se coupent en leur milieu ce quadrilatère et un carré et le milieu de ce carré étant le milieu du cercle alors ce cercle passe par AHDJ et que E étant diagonale passant par AHJD et que le rectangle faisant partie du parallélogramme alors ces diagonales sont les mêmes et se coupe au même milieu le centre du cercle E'."

Il n'est pas utile d'avoir quelque référence que ce soit au sujet ni même quelque savoir géométrique que ce soit pour se rendre compte immédiatement que cet écrit est dénué de toute signification. Cet écrit n'est que du papier noirci. Panique. (Autre chose est de penser que l'auteur a cependant quelque chose à dire. Certes, mais alors pourquoi ne peut-il le dire ?)

2) Sur la même copie, pour le 2/A :
Un trapèze :



D(AD) − D(AB) = 12 − 5 = 7

Un trapèze ? Combien de fois a-t-il "eu un cours" sur le trapèze ? Cinq fois du CM2 à la 3[e]. Peut-être seulement quatre fois parce qu'en 4[e] c'est la géométrie de l'espace qui est au programme.

La notion de distance ? Aucun doute ici n'est possible. Il a bien "reçu un cours" cette année. Il l'a tellement bien "reçu" qu'il "sait" qu'on doit se jeter tout de suite sur d(A ; B) - d(A ; C). Pour faire quoi ? mystère. Pour obtenir quoi ? mystère. Pour répondre à quelle question que pose la situation ? mystère. Pour répondre à quelle question que pose le texte même de l'épreuve ? A aucune. Simplement noircir / bleuir / rougir du papier. Comme d'habitude.

On peut se débarasser de tout cela en le renvoyant dans le passé et dans la fatalité : il y a toujours eu des cancres et leurs perles.
On peut aussi - sauf à ne plus pouvoir exercer ce métier - chercher d'autres explications que l'idiotie - gentille ou profonde - et vouloir construire d'autres réponses qui naturellement vont mettre en cause la globalité des mécanismes entre mêlés - scolaires et non/scolaires - qui ont conduit là ce garçon-là.

En attendant on peut parier sans gros risque qu'il n'ira pas en seconde. Respiration.

Par contre ces deux autres - au vu très rapide de leur copie - iront sans doute en seconde.
La première écrit le système d'équations devant permettre de trouver la longueur du rectangle dont la longueur est le triple de la largeur et qui a pour aire 2700 m². 1/B

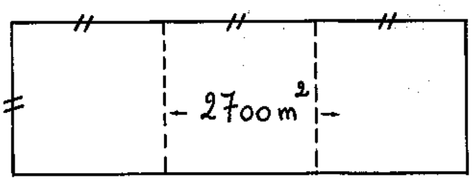
$$\begin{cases} L = 3\,l \\ 2700 = 3\,l \times l \end{cases}$$

Il faut résoudre le système par la méthode de substitution.

Ah ! quel magnifique savoir !

Sauf qu'elle s'arrête là. Elle ne trouve pas 30 m pour la longueur de ce rectangle.

Pari. :



Présenter ces trois carrés à 10 personnes ordinaires : hommes - femmes - enfants - paysans - ingénieurs - et *ne pas leur demander* la largeur du champ.

Le deuxième est un très jeune garçon au visage poupon et je l'ai un peu observé là au premier rang, peut-être même un surdoué. Il va son chemin avec assurance. Il a presque tout fait. Il efface, rectifie ses calculs après confrontation avec son tracé. Cela ne l'empêche pas de résoudre : $x^2 + 8 = 0$ en proposant $x = \sqrt{8}$. Il "sait" probablement résoudre de "belles équations". Il "sait" aussi très bien qu'un carré n'est jamais négatif. Et si en fait il ne savait pas en VRAI ce qu'est une équation ? Si ce n'était qu'un peu de musique et des bonnes notes qu'il a eu pendant l'année ?

Tout cela pour revenir à l'enquête.

Elle prend - et ne peut que prendre - l'allure d'une taxonomie d'objectifs.

Il me semble que ce faisant - et quelqu'en soit le réel intérêt - elle passe à côté de l'essentiel, c'est à dire d'une réflexion qui doit se situer en amont d'un tel décortiquage et qui pose ou repose aujourd'hui, *ouvertement*, la question de *la signification même* -personnelle *et* sociale - du métier de prof (de maths ou pas). ■

ABONNEMENTS au journal PLOT pour 86-87 et après

Jusqu'à 50 % de réduction
si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom
ou établissement ______________________
Adresse complète ______________________
Code postal et ville ______________________

Pour les 4 numéros :
de 1986 ☐
de 1987 ☐
de 1988 ☐

	Tarif normal et établissement	Membre Apmep	Pays étrangers et avion	Règlement
Pour un an	**100 F**	**80 F**	**120 F**	
Par année supplémentaire	**+ 50 F**	**+ 40 F**	**+ 80 F**	

BON DE COMMANDE

Des Dossiers et Matériels du PLOT

Prix unitaire		Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
30 F	Polyèdres dans l'espace n° 1			
30 F	Polyèdres dans l'espace n° 2			
30 F	Systèmes articulés			
30 F	Papiers accrochés			
30 F	Pliages et mathématiques			
30 F	Espaces, pavages et symétries (à paraître)			
20 F	Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)	n° 1/20 F	n° 2/20 F	
30 F/40 F		n° 3/30 F	n° 4/40 F	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
10 F	Affiches pour la classe : "Horizons Mathématiques"		☐	
	"Polyèdres dans l'espace"		☐	
	60 x 40 cm - 3 couleurs "l'Univers mathématique"		☐	
Nouveautés 40 F	Pochettes pour retroprojecteur		n°	
40 F	Pochettes de diapositives		n°	
	Frais d'envoi forfaitaire Pour toute commande	France métropolitaine		10 F
		Autres pays		30 F
			TOTAL	

NOM : ______________________

Adresse ______________________

____

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 1440 09 X
ou à votre correspondant régional.

Poitiers : APMEP-IREM - 40, av. du Recteur Pineau - 86022 Poitiers (Serge Parpay)
Limoges : APMEP-IREM - 123, rue Albert Thomas - 87060 Limoges (Roger Crépin)
Nantes : APMEP-IREM - 38, bd Michelet - BP 1044 - 44037 Nantes (Raymond Torrent)
Rennes : APMEP - Collège La Harpe - BP 1325 - 35016 Rennes (Georges Le Nazet)
Rouen : APMEP-IREM - BP 27 - 76130 Mont-Saint-Aignan (Jacqueline Collet)

Enseignants en Afrique : Ce journal vous parvient avec 3 mois de retard. Si vous désirez le recevoir dès sa parution, il vous suffit de nous renvoyer le bulletin d'abonnement avec votre adresse personnelle, accompagné d'un règlement de 40 FF par année d'abonnement pour les frais d'envoi par avion.