

■ ■ ■ *sommaire* ■ ■ ■

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté,
Gérard Chauvat, Michel Clinard,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Georges Le Nezet, Serge Parpay,
Raymond Torrent,

Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition
et maquette**
Graphi'Style - Orléans

Photogravure et impression
Fabrègue-Imprimeur, Limoges

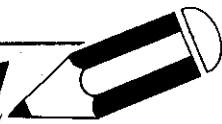
Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans, Tours,
Nantes, Rennes et Rouen
avec le concours du
Ministère de la Coopération

Diffusion
Adécum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).

Images des mathématiques à la Villette Cité des Sciences et de l'Industrie	p. 3 - 4
Un discours sur la méthode Pascal Monsellier - Montargis	p. 5 à 8
Halley, au revoir Frédéric Masset - Limoges	p. 9 - 10
Modèles erronés dans le 1^{er} cycle Maryvonne Aubree - Rennes	p. 11 à 16
Une histoire de mise en boîtes Jean-Paul Delahaye - Lille	p. 17 - 18
Une idée de Pascal (suite) Roland Stowasser - Berlin	p. 19 à 23
Plus de limites pour dériver Jacques Pinaud - Dreux	p. 24 - 25
Sécante et cosécante ont disparu Jacques Regourd - La Roche s/Yon	p. 26
Sur les traces de Pythagore Michel Clinard - Orléans	p. 27 - 28
Nouvelles activités mathématiques en 1^{re} Yves Olivier - Blois	p. 29 - 30
Sainte moyenne Alain Robert - Orléans	p. 31 à 33
La transformation $z \mapsto z^2$ Gérard Chaumeil - Paris	p. 34 - 35
Les nouveaux programmes sixième-cinquième et commentaires	p. 36 à 38
Nombres, codages et algorithmes Suite de l'interview de M. Dumont - Rouen	p. 39 - 40
A-PLOT-STROPHES Des cordes et des chiffres	p. 41 à 43
Problèmes chocs et solutions	p. 44 à 46
L'été au bord des Universités d'été	p. 47

éditorial



Juin 86 : Le PLOT prend du poids et du "relief". 48 pages de textes et photos, ceci grâce ou à cause de l'élargissement de l'audience du journal aux régions de l'Ouest de la France (qui accueille l'exposition "H.M." de Septembre à Janvier) et aux pays africains (l'exposition y reprendra à la rentrée son itinéraire à partir du Cameroun).

Petit à petit, la "maquette" du journal prend forme. Grâce à VOS ARTICLES, des rubriques périodiques apparaissent : problèmes-chocs, plot-méninges, a-plot-strophes, algo-rythmes,...

Et d'autres articles comme les premiers pas de La Villette, les nouvelles dérivées, l'inter-disciplinarité en seconde ou les exercices Minitel en 1^{re} (exclusivités du PLOT !"). Et, aussi, l'actualité, très changeante, des programmes.

Un problème multiplicatif à résoudre :

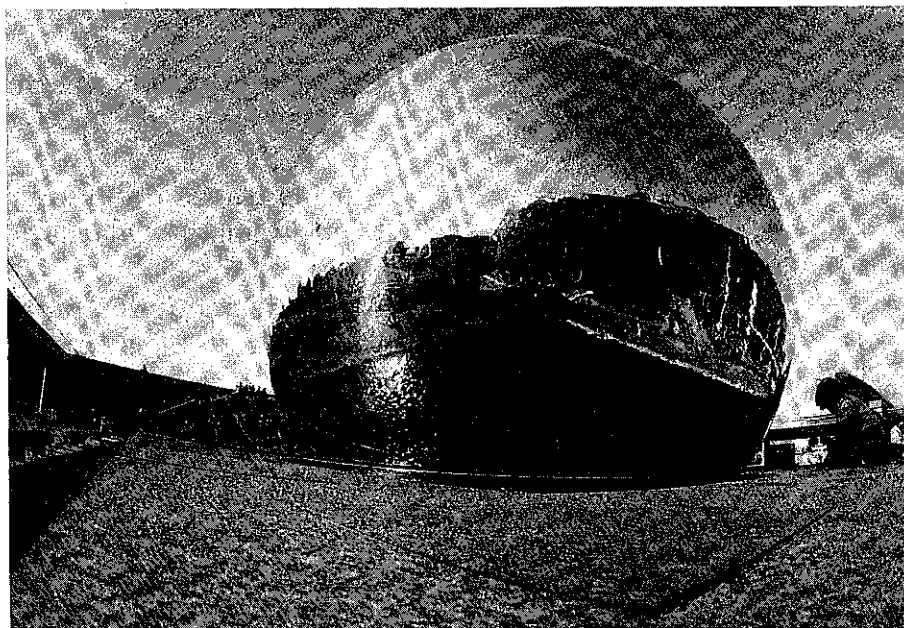
$$48 p = 32 p \times 1,5$$

$$\text{coût (48 p)} = \text{coût (32 p)} \times 1,5$$

$$\text{abonnés (86)} = \text{abonnés (85)} \times 1,5$$

Aidez-nous à vérifier cet isomorphisme ! Abonnez votre établissement, surtout si... vous changez d'établissement d'ici la rentrée et dans ce cas n'oubliez pas de lire le bas de la page 47.

La Géode,
vue de la Cité des Sciences
et de l'Industrie
à Paris



BON DE COMMANDE

Les Dossiers et Matériels du PLOT

NOM : _____

Adresse : _____

	Prix unitaire	Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
30 F	Polyèdres dans l'espace n° 1			
30 F	Polyèdres dans l'espace n° 2			
30 F	Systèmes articulés			
30 F	Papiers accrochés			
30 F	Pliages et mathématiques			
30 F	Espaces, pavages et symétries (à paraître)			
20 F	Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)	n° 1/20 F	n° 2/20 F	
30 F/40 F		n° 3/30 F	n° 4/40 F	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
10 F	Affiches pour la classe : "Horizons Mathématiques"		<input type="checkbox"/>	
	60 x 40 cm - 3 couleurs "Polyèdres dans l'espace"		<input type="checkbox"/>	
	60 x 40 cm - 3 couleurs "l'Univers mathématique"		<input type="checkbox"/>	
	Frais d'envoi forfaitaire	France métropolitaine		10 F
	Pour toute commande	Autres pays		30 F
		TOTAL		

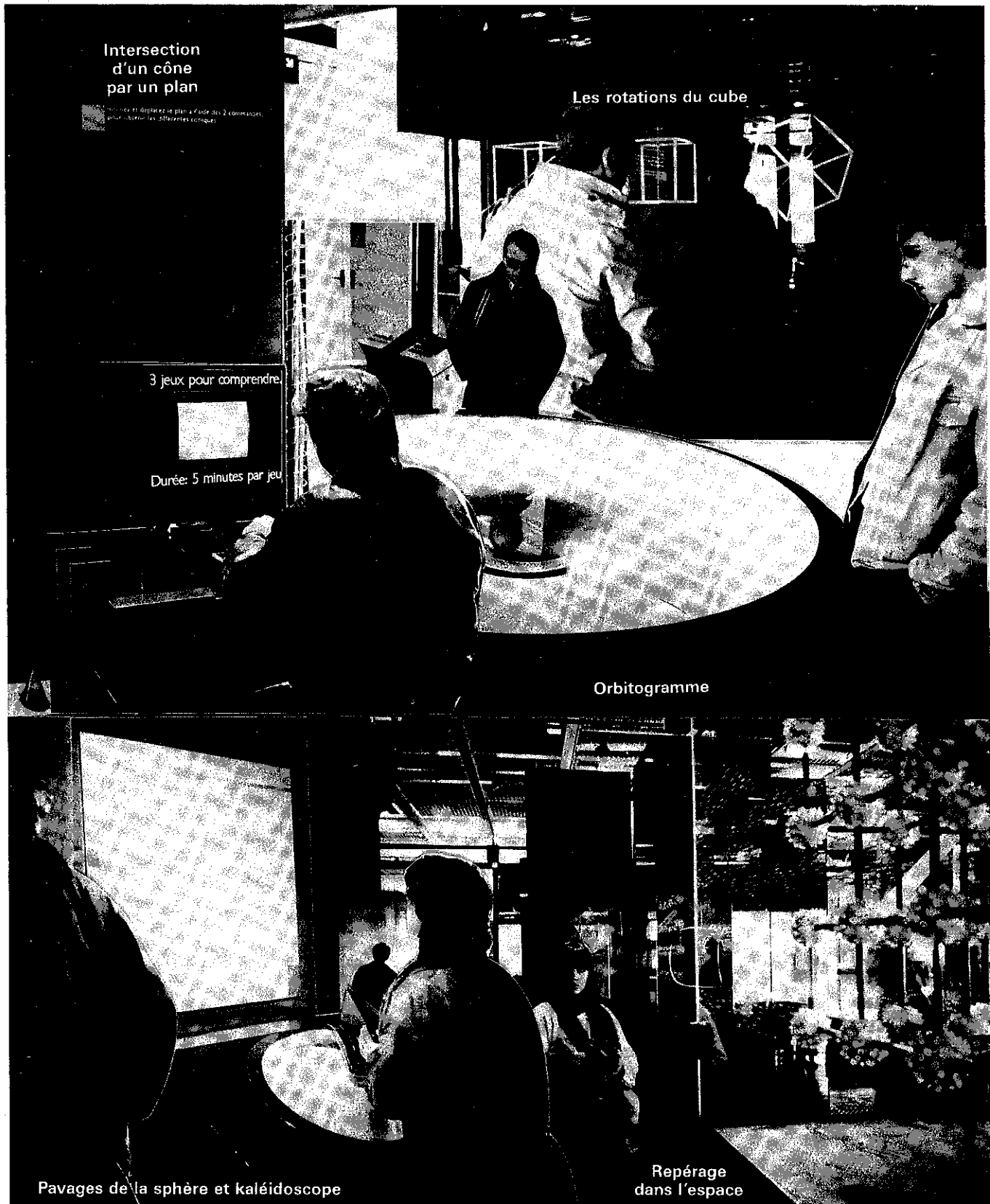
Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 1440 09 X

IMAGES DES MATHÉMATIQUES A LA VILLETTE

Michel DARCHE - Orléans

Depuis le 13 mars 1986 la Cité des Sciences et de l'Industrie de La Villette a ouvert ses portes et présente une première partie des expositions.

Ainsi l'espace mathématique y fait ses premiers pas, présentant une bonne moitié des "manipulations", logiciels et films prévus. En voici quelques éléments photographiés par Marie-Laure De Decker.



La formule
de Pythagore

Mosaïque et
kaléidoscope

Le jeu du Tic-Tac-Toe

Pavages de la
sphère et
kaléidoscope

Intersection d'un cône
par un plan

Surface
minimale

Jeu et stratégie

UN DISCOURS SUR LA METHODE

Pascal Monsellier - Montargis

Depuis la rentrée 1983, les lycées français ont la possibilité de "moduler" le temps scolaire dont ils disposent en fonction des objectifs et des projets qu'ils se sont fixés. Ces nouvelles dispositions, appelées familièrement "horaires-planchers" ont été diversement accueillies.

Certains y ont vu un moyen machiavélique permettant de vêtir d'un habit pédagogique de sordides économies de moyens. L'expérience ne leur a pas toujours donné tort, car certains administrateurs à court de budget en ont profité pour réduire arbitrairement les horaires de certains enseignements en seconde.

Mais d'autres initiatives, plus heureuses celles-là, ont éclos. C'est une de ces tentatives de l'année 1984-1985 que nous relate l'auteur (qui depuis est devenu administrateur...)

Où l'on énonce un constat

Le lycée X est un gros lycée polyvalent (classique, industriel, tertiaire, informatique) de 2100 élèves. Ni pire ni meilleur qu'un autre, son taux d'échec en seconde suit la courbe nationale, c'est à dire qu'il augmente. En réaction à cette situation, un certain nombre de "projets pédagogiques" ont vu le jour, menés par des enseignants soucieux de combler le fossé existant entre le second cycle long et la population qu'il accueille. Parmi ces projets, celui qui nous intéresse fut baptisé pompeusement : **Approche méthodologi-**

que de la Seconde de détermination. Ses promoteurs partaient d'un constat qu'ils résumaient ainsi. Voir encadré.

Pour résumer grossièrement, puisque "*les élèves ne savent pas travailler*", "*qu'ils n'ont pas de méthodes*"... etc, il s'agissait de les aider à "*apprendre à apprendre*". Le postulat de base de ce travail, probablement abominable pour un didacticien, sous-entendait qu'il était possible "*d'apprendre*" aux élèves à avoir plus de méthode de pensée et de travail, cette méthode étant censée pouvoir être plus ou moins déconnectée du contenu des disciplines.

La classe de Seconde indifférenciée (dite "de détermination") pose des problèmes auxquels les lycées étaient mal préparés. L'augmentation du redoublement à l'issue de cette classe (20 % actuellement en France) et les difficultés d'adaptation des élèves en classe de Première, montrent que le fossé entre le Collège et le Lycée s'est probablement accentué ces dernières années.

Les élèves finissant un second cycle (long ou court) représentent actuellement 65 % de leur classe d'âge. Le Ministre de l'Education (déclaration du 14 février 1984) souhaite porter ce pourcentage à 80 % en dix ans. Le fait que cette proportion soit celle qui existe actuellement aux Etats-Unis et au Japon incite à penser que cet

objectif sera maintenu, indépendamment des majorités politiques françaises. L'adaptation d'un nombre d'élèves plus grand aux objectifs du lycée est aussi indispensable que l'adaptation des objectifs du lycée à cette classe d'âge plus nombreuse.

A entendre les professeurs de Première et de Terminale, il appert que les manques constatés chez les élèves sont certes d'ordre cognitif, mais qu'ils sont surtout de l'ordre des savoir-faire et des méthodes de travail. D'où l'idée que la classe de Seconde est peut-être, au lycée, le meilleur niveau pour aider les élèves à s'organiser, à apprendre des méthodes en partie a-disciplinaires et à acquérir une certaine autonomie vis-à-vis de leur apprentissage.

Où l'on a des principes

Pour réaliser ce projet, nous convînmes de travailler en "ateliers" hebdomadaires, basés sur les principes suivants :

1. Définition, par les équipes pluri-disciplinaires des classes, d'objectifs méthodologiques précis dont la poursuite serait prévue dans toutes les disciplines volontaires. Par exemple : lire un énoncé - prendre des notes - s'auto-documenter - pratiquer et gérer un travail en groupe - constituer un dossier - rédiger une petite synthèse - faire un exposé oral - organiser un ensemble de tâches... etc.

2. "Banalisation" d'un certain nombre d'heures (circulaire sur les assouplissements d'horaires en seconde du 24 mai 1983 et note de service sur ce sujet de mai 1984) et regroupement de ces heures en une après-midi hebdomadaire pour travail en décloisonnement sur des "ateliers" précis, ayant des formes à définir, et concourant à l'atteinte des objectifs précédemment définis.

3. Ce travail en "ateliers" prendrait au moins un trimestre, les participants se réservant le droit de renégocier l'organisation du planning à la rentrée de Janvier (cf. point 6).

4. Dans les "ateliers", il est bien entendu que l'objectif est essentiellement méthodologique, le contenu manipulé en tant qu'élément cognitif, bien qu'important, n'étant pas une fin en lui-même.

5. Si plusieurs classes travaillent en parallèle, il est possible de fixer des objectifs disciplinaires méthodologiques communs à ces classes, certains "ateliers" pouvant y être plus spécifiquement consacrés.

6. Au cours et à la fin du 1^{er} trimestre, évaluation pluridisciplinaire des acquis méthodologiques. Décision, à la fin du 1^{er} trimestre du maintien et/ou de la forme des "ateliers" pour le 2^e trimestre. Idem à la fin du 2^e trimestre.

Après appel d'offre public auprès des enseignants, les équipes constituées sur la base du volontariat permirent de faire fonctionner ainsi quatre classes de seconde (du type "Initiation Economique et Sociale"). Pour chacune d'elles, les professeurs de français, histoire-géographie, maths et anglais * se mirent au travail.

* Qui n'avaient pas la classe entière en langue vivante 1, ce qui ne facilitait pas le travail.

Où l'on constate que les jumelles marchent du même pas

En pratique, chacun abandonne au pot commun, une heure hebdomadaire de son enseignement (une demi-heure pour l'anglais) ; ce temps récupéré était rendu aux élèves dans les ateliers des après-midi banalisées. On veillait à ce que sur un demi-trimestre, chaque enseignant ait bien assuré son compte d'heures.

Les quatre classes de seconde avaient leurs après-midi banalisées deux par deux. Aussi les classes devinrent-elles vite "jumelles".

Les réunions hebdomadaires de concertation se faisant entre classes "jumelles", chaque binôme a fini par suivre sa voie propre et je ne parlerai ici que des deux classes que j'ai été amené à suivre.

A titre d'illustration des démarches que nous souhaitons suivre, on trouvera page suivante quelques-uns des ateliers que nous avons organisés, avec des précisions sur leur contenu.

Et si l'on essayait de faire un bilan sans passion.

Une fois n'est pas coutume : le négatif d'abord

1. Difficile pour les enseignants de "tenir la distance", c'est à dire se réunir régulièrement (toutes les semaines), cerner les besoins, des élèves, proposer des activités didactiques, évaluer l'ensemble avec la classe... OUF ! Nous avons mis les pouces à Pâques.

2. Dire que "Les élèves ne savent pas travailler" est facile. Proposer des aides méthodologiques efficaces à 77 élèves (38 + 39) très différents les uns des autres est une autre affaire. C'est déroutant, quoiqu'excitant, de mettre au point des activités plus méthodologiques que disciplinaires. Les enseignants qui connaissent (un peu) leur discipline ont du mal à enseigner des mécanismes intellectuels ou des méthodes de travail qui leur paraissent évidents.

3. Classes en parallèles et en ateliers. Utilisation du C.D.I... cela veut dire beaucoup d'élèves dans les couloirs, et jamais dans la salle prévue. Mieux vaut s'installer dans un coin tranquille du lycée, et ne pas trop se faire remarquer par l'Administration !

4. La forme "atelier" et l'aspect para-ludique de certaines activités ont fait que certains élèves ont eu du mal à prendre au sérieux ce qui se faisait dans les après-midi banalisées. Certains arrivaient les mains dans les poches, en oubliant leurs affaires... Si jeunes et conditionnés par la note, c'est à dire déconditionnés par l'absence de note immédiate ! Il a fallu s'expliquer longuement, parfois orageusement, avec ceux-là.

5. Pas toujours évident de faire le lien entre "atelier-méthode de travail" de la veille et le cours "normal" où on retrouve 38 élèves ensemble et un semblant de programme.

Nom de l'atelier	profs de	taille du groupe	obligatoire
Initiation à la documentation <i>Aider les élèves à utiliser leurs livres et le CDI, élaborer une bibliographie, en français et en histoire-géographie</i>	français	1/2 classe	oui
Initiation à la documentation <i>Même chose, mais dans le domaine scientifique, là où on a peu l'habitude de parler de documentation</i>	maths	1/2 classe	oui
Prendre des notes <i>Dans de courtes séquences, les élèves prennent des notes sur un exposé. Comparaison de celles-ci. Conseils sur la disposition, les "trucs" usuels.</i>	français hist.-géo langue	1/3 classe	oui
Expression orale <i>Bref exposé par un élève d'un sujet de son choix. Evaluation par le groupe à l'aide d'une grille. Visionnement vidéo pour que l'élève analyse sa manière de prendre la parole</i>	français hist.-géo langue	1/3 classe	oui
Organisation du travail <i>Au bout d'un mois, voir comment chaque élève organise ses classeurs, ses dossiers, son travail dans la semaine... et donner quelques conseils</i>	maths	1/3 classe	oui
Soutien en maths <i>Indispensable pour apaiser les élèves (et les parents !) anxieux de ne pas "finir le programme"</i>	maths	variable	non
Logique par exercices <i>Logique du langage. Ne pas dire une chose puis son contraire. Utiliser correctement les connecteurs dans la langue usuelle</i>	français hist.-géo langue maths	1/2 classe	oui
Méthodes de travail en français <i>Pour commencer en seconde la dissertation et le commentaire composé</i>	français	1/2 classe	oui
Cartographie <i>Une des rares réalisations de ce projet qui soit interdisciplinaire (voir page suivante)</i>	hist.-géo maths	1/2 classe	oui
Méthodes statistiques <i>Découverte des statistiques à partir de documents bruts fournis par les géographes et exploités ensuite en cours par ceux-ci</i>	maths	1/2 classe	oui

Etc...

Et les réussites ?

Sans doute notre évaluation fut-elle insuffisante, mais je serai moins disert sur celles-ci que sur les difficultés !

1. Un très bon vécu des élèves, qui se sont sentis "accueillis" au lycée, qui ont senti des "équipes" d'enseignants s'intéresser à eux et se "donner du mal pour les aider" *.
2. C'est dur de tenir la distance sur de longues semaines, mais qu'est-ce que cela fait du bien de travailler

avec des collègues des autres disciplines autrement que de manière épisodique.

3. Une attitude sans doute plus spontanée des élèves, des blocages décelés très tôt et peut-être des échecs vécus d'une manière moins dramatique.

Difficile de dire si tout ce travail a servi à quelque chose ! Notre modeste expérience n'a pas eu la prétention de régler le problème de l'échec scolaire en seconde, mais de nous faire progresser, tous. Il faudra beaucoup de micro-travaux de ce type pour qu'un nouveau lycée, mieux adapté à la population qui y viendra demain, c'est à dire aujourd'hui, émerge lentement ■

Math + Géographie = Cartographie

Dans le programme de math de la classe de seconde figurent deux lignes séparées par une distance respectable.

L'une est "*Représentation plane de figures dans l'espace*".

L'autre est "*Etude de la sphère*".

Il suffit de se dire que la Terre est une sphère très convenable (nul n'est parfait !), de mélanger énergiquement ces deux phrases dans un shaker approprié pour voir surgir le mot : *cartographie*.

Ma collègue historienne prétendant ne rien connaître à la géographie (c'était évidemment faux, mais nos collègues historiens ou physiciens ont toujours une petite coquetterie vis-à-vis de la discipline qui n'est pas celle dont ils ont tété en priorité le lait, et je fis semblant de la croire), nous nous sommes mis à apprendre des tas de choses au sujet de la cartographie terrestre, et nous découvrîmes que :

- pour les mathéux, la cartographie, au niveau élémentaire qui était le nôtre, n'est pas un sujet qu'ils affectionnent. Conséquence : difficile de trouver un exposé clair, élémentaire et rigoureux.
- les géographes se sentent obligés de parler de cartographie, mais ils racontent souvent n'importe quoi. Par exemple, aucun livre de classe ou encyclopédie traînant dans un C.D.I. moyenne donne une définition correcte de la projection de Mercator !

Après avoir appris quelques brides sur le sujet, nous y lancâmes les élèves. Nous définîmes treize thèmes, rédigeâmes une fiche détaillée pour chacun d'eux, avec références bibliographiques. Cinq thèmes ne contenaient pas trop de maths et furent "pilotes" par l'historien ; les huit autres nécessitaient un peu plus, ou beaucoup, de maths. Les élèves se répartirent librement en groupes de deux à quatre participants, chaque groupe choisissant un thème dans ceux qui étaient proposés. La consigne était de réaliser une affiche sur le thème choisi, de manière à ce qu'un visiteur moyen d'exposition comprenne ce qu'on lui exposait ; des normes de présentation et de rédaction veillaient à l'homogénéité de l'ensemble.

Ce travail déboucha effectivement sur une expo interne au lycée, mais les résultats des groupes furent très inégaux, allant d'affiches très soignées et très "didactiques" à d'autres parfaitement cochonnées. Une anecdote : deux affiches contenaient des erreurs, et les élèves refusaient de les reprendre. Ils furent mortifiés quand ils constatèrent que nous exposâmes toutes les affiches dans la salle de lecture du lycée, y compris les leurs. La réalisation de l'exposition étant l'évaluation de l'activité, il était pour nous fondamental d'aller jusqu'au bout. Et puis ces affiches ne contenaient pas plus de sottises qu'un livre de géographie moyen de seconde...



* Extraits de témoignages d'élèves.

HALLEY ! AU REVOIR !!!

Frédéric MASSET - Limoges
Elève en 4^e

*Depuis cinq ans, chaque année deux fois par an, je me suis retrouvé
- en général au château de Ligoure - en Haute-Vienne avec une trentaine d'amis
- des élèves du Collège Donzelot pour la plupart -*

*Cette année, la dernière ? (c'est chaque fois la dernière fois !!!) la Comète de Halley,
bien faible, pouvait-être au rendez-vous. Personne n'y croyait vraiment.*

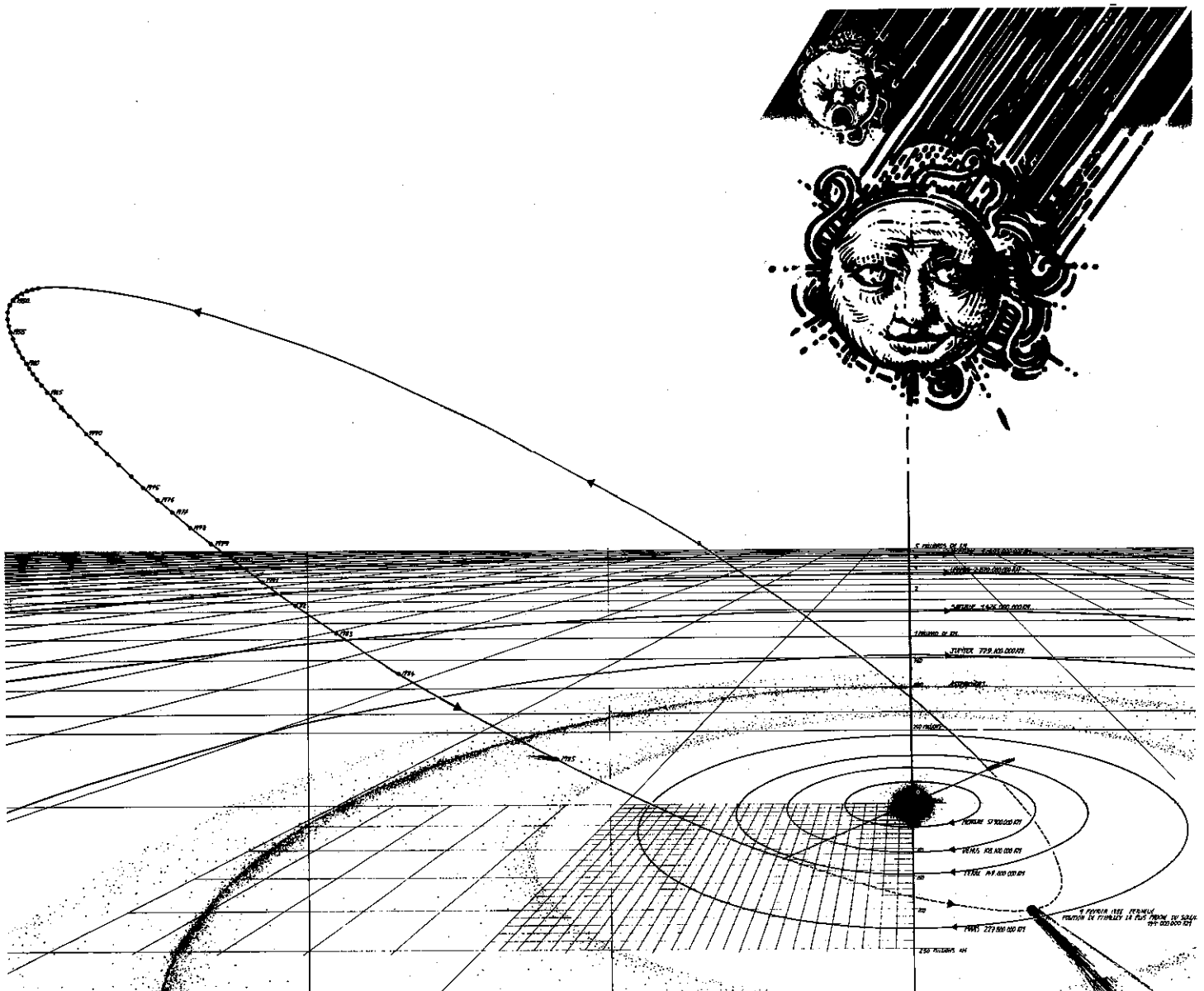
Magnitude 8 ! pour une tâche floue... et puis la météorologie, difficile !

*Et pourtant nous avons fait du bon travail. Tous y avons mis un peu de cœur,
beaucoup de patience. L'organisation ? Comme toujours c'est à la fois simple et infaisable,
comme toute sortie parascolaire.*

*Mais alors là, entre l'ami médecin, la maman plus que sympa et la petite fille
de cours moyen... les professeurs de Mathématiques ou de Physique (Merci les amis)
font figure de grand méchant loup.*

Allez, collègues, à la prochaine Comète.

Pierre Batier - Limoges



La journée, cours théorique et manipulations (informatique, photo, matériel...)

Le soir, préparation des observations (souvent ratées évidemment...) et si possible observations avant, pendant, après le repas... A 30 c'est une agréable pagaille.

Voici le compte-rendu des observations réalisées par F. Masset au 5^e Symposium de la Thiasse Andromède au Château de Ligoure (87) en novembre 85.

la Comète de Halley

Cette comète a été repérée dès le vendredi soir 8 novembre, aux jumelles 50 x 7 et 50 x 10, ainsi qu'au télescope de 115 mm, entre deux nuages.

Aucune photographie ou mesure précise (diamètre apparent, magnitude, coordonnées, morphologie, couleur, contraste, etc...) n'a pu être entreprise. J'ai seulement pu noter qu'elle avait un diamètre apparent d'environ 10' et que son éclat était sensiblement supérieur à l'éclat prévu.

Notons au passage qu'une "nébulosité", NGC 1647, mentionnée sur les atlas de Tirion et S.A.O., se trouvait non loin de l'étoile repère tau Tauri, proche de notre comète Halley. Cette "nébulosité" s'est plus tard révélée être un amas ouvert de 6^e magnitude et contenant des étoiles éparses et brillantes, ce qui levait tout doute sur l'identité de l'objet censé être Halley (une autre remarque, concernant la distance angulaire à tau Tauri venait confirmer ce fait).

Plus intéressante a été l'observation du dimanche soir 10 novembre, qui a permis de prendre de nombreuses photos, mais pas de faire de mesures sur P/Halley : les observations ont été arrêtées par l'arrivée des nuages.

- La première photo a été prise sur Ektachrome 400 avec un objectif de 29 mm ouvert à F/2,8. La pose (en suivi !!!) a duré deux minutes, seulement, pour permettre un repérage global de la région de Halley, qui ne sera malheureusement pas visible sur ce cliché, ou juste perceptible (mag. 7 environ).

- La seconde sera déjà beaucoup plus intéressante et esthétique (si la buée n'a pas trop altéré la qualité de l'image !) car, contrairement à la précédente, l'horizon n'est pas dans le champ, et pour cause : l'objectif était un 200 mm, ouvert à F/3,5, pour une pose de 15 mm, (en suivi, - avec un grossissement de 450 sur le T 115 obtenu avec un oculaire SR 4 + Barlow x 2). La taille prévue pour la comète est de l'ordre de 0,7 mm sur le négatif 24 x 36, ce qui vaudrait 3 mm sur un tirage 10 x 15 ; ce qui est loin d'être négligeable, et plusieurs centimètres puisque le film utilisé était là encore de l'Ektachrome 400. La magnitude limite sera, elle, de l'ordre de 11 à 12.

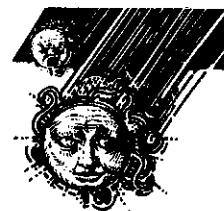
- La troisième photographie concerne la même région, mais cette fois le film utilisé était du Fuji 400, et la pose (toujours en suivi au 450 X) n'a duré que 5 minutes. La magnitude sera de 9 à 10, mais les effets de buée seront moins importants... l'objectif ayant été essuyé soigneusement entre chaque pose !

- La dernière photo a exactement les mêmes paramètres que la troisième, mais elle concerne M 42, Nébuleuse d'Orion, ce qui permettra de comparer.

A partir de ce moment, 23 h TU, le Taureau a été occulté par les nuages, et le retour vers Halley impossible.

La Comète de Thiele

Cette autre comète a été repérée en catastrophe, avant le repas dimanche 10 au soir. Elle avait une forte magnitude, contrastant beaucoup avec Halley. Les dimensions apparentes étaient également plus réduites, mais à cause de son faible éclat, l'observation pu être considérée comme douteuse. Certains observateurs l'ont décrite comme étant extrêmement brillante, allongée, aux jumelles 50. Il est fort probable qu'ils ont, eux, observé en réalité M 31, proche de la région de Thiele.



La Comète Hartley-Good

Située dans la constellation d'Ophiuchus, proche de l'horizon Ouest, elle n'a pu être observée.

J'ai par contre pris deux clichés du "SPECTRE SOLAIRE", l'un sur Fuji 400, l'autre sur Ekta 400, avec un objectif de 200 mm (pose 1/1000^e de seconde). Caractéristiques : boîtier 24 x 36, télé ouvert à F/3,5 ; réseau de 528 traits/mm. Pas d'oculaire, chercheur protégé, fente à l'ouverture du télescope avec lames de cutter décalées par rapport à l'araignée. L'appareil était tenu à la main. Spectre d'ordre 1 plus spectre d'ordre 2 avec une bonne centaine de raies sombres. (le doublet du sodium est facilement séparé), merci P. Batier.

Éléments de réponses aux Problèmes Chocs du n° 34.

Pourquoi fait-il froid l'hiver ?

(loin de l'équateur bien sur). Non ce n'est pas parce que la Terre est plus éloignée du Soleil. En fait, c'est le contraire, la Terre est plus proche du Soleil l'hiver mais, et c'est la "bonne réponse", son axe de rotation est plus incliné sur le plan de l'écliptique et de ce fait "vos" jours sont plus courts que vos nuits, le Soleil chauffe moins la surface où vous êtes, la température du sol et de l'atmosphère diminue (avec un mois de retard sur la diminution de la durée du jour).



La queue de la comète

Le vent solaire, courant de particules électriquement chargées, repousse les gaz qui entourent la tête de la comète et forme une queue ionique rectiligne pouvant s'étendre sur plusieurs millions de kilomètres. Les particules solides, subissant l'attraction du soleil et le mouvement du noyau, se dégagent le long d'une queue de poussières incurvée. Halley, à l'an 2062! ■

EN ALGEBRE, LES MODELES ERRONES DE NOS ELEVES DE COLLEGES, ESSAI THERAPEUTIQUE

Maryvonne AUBREE - Combourg

Une initiative locale : quelques collègues de la régionale APMEP de Rennes (Régis Gras, Léone le Freut, Madeleine Michard, Maryvonne Aubree) décident de réfléchir ensemble, sans moyen spécifique et institutionnel, sur l'enseignement des mathématiques au collège. Voici le compte-rendu par M. Aubree de ces rencontres (quatre demi-journées par an entre 80 et 82 !).*

Notre première préoccupation était la suivante : nous intéresser à des erreurs très souvent rencontrées et difficiles à corriger, par exemple :

1. $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$	1' $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{a+b}{c+d}$
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$	
3. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	
4. $ a+b = a + b $	
5. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	5' $a^2 - b^2 = (a-b)^2$
6. $(2x)^2 = 2x^2$	
7. $a^2 = 2a$	
8. $a - b \times c = a \times c - b \times c$	
9. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times (a \times c)$ ou $a \times (b \times c) = a \times b + a \times c$	
10. $ax = b$ donc $x = \frac{b}{-a}$ $ax = b$ donc $x = \frac{a}{b}$ $ax = b$ donc $x = b - a$	
11. Par analogie avec : si $A.B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$, on trouve : si $ax^2 + bx + c = 0$ alors $ax^2 = 0$, $bx = 0$, $c = 0$.	

Nous nous sommes ensuite limités à quelques points de ce tableau. Nous avons choisi de déceler, à partir de 2 contrôles, l'un portant sur la simplification des fractions, l'autre sur le second degré, les erreurs importantes commises par nos élèves. Nous avons voulu, en créant des situations, répertorier les modèles implicites faux utilisés par les élèves. Puis, après avoir mesuré la fréquence avec laquelle on les rencontrait, nous avons essayé d'établir entre eux des liens et d'y apporter des remèdes. Nous remarquons ici une démarche et des objectifs que l'on retrouve dans l'article « Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire de « petit x » n° 5 » qui s'intéresse à deux types de difficultés : signification des lettres et compréhension des notations et des conventions.

* Cet article est déjà paru dans le n° 8 de Petit x.

I. SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

1. Présentation de l'épreuve.

Voici l'épreuve telle qu'elle a été donnée aux élèves de 3 classes (soit 66 élèves) de 3^e au premier trimestre, sans préparation particulière si ce n'est quelques révisions classiques de calcul numérique en début d'année (addition, soustraction, multiplication, division, puissances de nombres rationnels). Cette épreuve reprend, sous plusieurs formes quelquefois, les obstacles relatifs aux fractions évoqués plus haut.

Les expressions suivantes sont-elles irréductibles ?			
- Si oui, les recopier dans la colonne de droite sans les modifier.			
- Sinon, écrire dans la colonne centrale les calculs de simplification et à droite la fraction simplifiée.			
N°	expression à étudier	calculs éventuels	fraction simplifiée
1	$\frac{6+2}{6+4}$		
2	$\frac{2a \times 4}{2}$		
3	$\frac{3+5}{7+5}$		
4	$\frac{4b+20c}{16b+12c}$		
5	$\frac{2+7x}{7x}$		
6	$\frac{4+a}{6+a}$		
7	$\frac{2a+4}{2}$		
8	$\frac{91+1\ 259}{91+3\ 452}$		
9	$\frac{3(x-1)}{3x}$		
10	$\frac{5+10a}{15-10a}$		

Pour cette épreuve, il nous a semblé important de préciser à l'élève que certaines expressions pouvaient être irréductibles. Nous avons choisi cette présentation en 3 colonnes pour identifier la reconnaissance d'une expression irréductible de la non-réponse à un exercice. Les élèves disposaient d'une demi-heure avec une éventuelle prolongation pour qu'ils parcourent tous toute l'épreuve.

Nous avons choisi des exercices cherchant à révéler les modèles, implicites ou non, que les élèves utilisent dans les simplifications de fractions et nous souhaitons savoir si les erreurs seraient les mêmes dans les expressions numériques ou littérales. Les exercices choisis peuvent évidemment susciter des critiques : aurions-nous obtenu les mêmes réponses en proposant

$$\frac{4+a}{a+6} \text{ au lieu de } \frac{4+a}{6+a} \text{ ou } \frac{3+5}{5+7} \text{ au lieu de } \frac{3+5}{7+5} ?$$

N'avons-nous pas mis trop d'éléments dans

$$\frac{4b+20c}{16b+12c} ?$$

Ils ont tout de même donné de bonnes indications quant aux mauvaises conceptions de nos élèves.

2. Analyse de l'épreuve

Pour l'ensemble des 3 classes, cette épreuve nous a semblé peu réussie, peut-être en raison d'une présentation nouvelle, sous forme de tableau où le travail demandé est le même pour tous les exercices, bien que les difficultés rencontrées ne soient pas toutes de même nature.

a) L'analyse des réponses, très variées, suggère que les élèves utilisent essentiellement **3 modèles** :

— **Le modèle (1)**, révélé par les réponses groupées dans le tableau ci-dessous, le plus primitif, est un modèle de suppression analogique où les attracteurs principaux sont la concomitance et la forme.

expressions proposées	réponses obtenues
$\frac{3+5}{7+5}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{91+1259}{91+3452}$	$\frac{1259}{3452}$ ou $\frac{1+1259}{1+3452} = \frac{1260}{3453}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{1+5}{4+3}$ ou $\frac{5}{4+3}$ ou $\frac{24bc}{28bc}$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{9x}{7x} = \frac{9}{7}$ ou $\frac{2+7x}{7x} = 2$ ou $\frac{2+7x}{7x} = \frac{9}{7}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{6a}{2} = 3a$ ou $\frac{2a+4}{2} = a+4$ ou $\frac{2a+2 \times 2}{2} = 2a+2$

Les élèves simplifient, par division (mais aussi parfois par soustraction) les valeurs numériques et par simple suppression ou « gommage » ou encore par contraction les expressions littérales.

Le modèle (1) est renforcé par une recherche obstinée de la forme considérée par l'élève comme la plus simple. Ce « simplificationnisme » correspond à l'utilisation des mathématiques comme outil de réduction. Les opérations de simplification sont instables et liées aux circonstances où le coût de son engagement est le moins fort. Quelquefois elles conduisent à l'usage du modèle (2).

— **Le modèle (2)**, révélé par les réponses groupées dans le tableau ci-dessous :

expressions proposées	réponses obtenues
$\frac{6+2}{4+2}$	$\frac{6}{4} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4b}{16b} + \frac{20c}{12c} = \frac{1}{4} + \frac{5}{3} = \frac{23}{12}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2a}{2} + \frac{4}{2} = a+2$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{2}{7x} + \frac{7x}{7x} = \frac{2}{7x} + 1$

Le modèle (2) est un modèle linéaire ou d'homomorphisme des lois : « une fraction de sommes est égale à une somme de fractions » soit $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$. Ce modèle

peut fonctionner de façon réversible, soit $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$ mais on l'a plus rarement observé. En faisant agir ce modèle dans les 2 sens, certains élèves ont obtenu la bonne réponse, par exemple :

$$\frac{4b+20c}{16b+12c} = \frac{4b}{16b} + \frac{20c}{12c} = \frac{b}{4b} + \frac{5c}{3c} = \frac{b+5c}{4b+3c}$$

Il faut noter que ce modèle est efficace et exact dans $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Autrement dit, ce modèle (2) inexact peut fonctionner en fournissant des réponses justes à mauvais ou bon titre. Il n'est donc pas étonnant qu'il résiste longtemps.

— **Le modèle (3)** est le modèle exact définitif que chacun connaît bien.

Remarque.

Nous avons aussi remarqué, mais assez rarement, l'homomorphisme : « une fraction de produit est un produit de fractions ». Cette utilisation est presque toujours associée au modèle (2) et donne

$$\frac{2a \times 4}{2} = \frac{2a}{2} \times \frac{4}{2} = a \times 2 = 2a.$$

b) La réussite dans des exercices tels que $\frac{2a \times 4}{2}$

ou même $\frac{3(x \times 1)}{3x}$ n'est pas révélatrice d'une

bonne maîtrise de la technique de simplification des fractions car ces bonnes réponses ont pu être obtenues par des élèves qui utilisaient partout ailleurs le modèle (1). Nous n'avons pas d'indice de la procédure utilisée par ces élèves mais nous pouvons penser qu'ils utilisent le modèle (1) et non pas la division par 2 ou par 3.

De même le fonctionnement généralisé en modèle (2), peut donner de bons résultats dans les

situations telles que $\frac{2a+4}{2}$; ces bonnes réponses ne

sont donc pas suffisantes pour affirmer que la simplification des fractions est acquise par les élèves. Ce qui montre la nécessité de combiner différents types d'exercices pour vérifier l'acquisition d'une notion. Ces exercices doivent être choisis de façon à déséquilibrer les modèles (1) et (2).

Pour certains, la connaissance du modèle (3) est en voie de constitution ; ils réussissent localement dans les exercices $\frac{6+2}{6+4} = \frac{8}{10} = \frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{5}$ ou bien $\frac{3(x-1)}{3x} = \frac{x-1}{x}$ ou même $\frac{2a+4}{2} = \frac{2(a+2)}{2} = a+2$ mais échouent dans $\frac{2+7x}{7x}$ en écrivant $\frac{(2+7)x}{7x} = \frac{9}{7}$ ou dans $\frac{4b+20c}{16b+12c}$ en ne simplifiant pas cette expression. Ils peuvent échouer aussi dans $\frac{91+1\ 259}{91+3\ 452}$ car la taille des nombres élève la complexité des opérations à faire et en diminue la fiabilité : par suite, la « simplification » radicale semble plus efficace et surtout moins coûteuse. Par exemple, dans une classe, les 4 élèves réussissant l'item 8 sont parmi les 8 élèves ayant réussi les items 1 et 3.

Etant donné les comportements habituels des élèves et leur performances, l'utilisation du modèle (2) n'apparaît pas comme symptôme de difficultés généralisées en mathématiques. Par contre, une utilisation systématique du modèle (1) en est un bon révélateur. Ceci conforte donc notre hypothèse que le modèle (1) soit le plus primitif, alors que le modèle (2), par ses lois stables, serait plus élaboré.

Voici pour les 5 premiers items, la répartition des comportements de réponses des 66 élèves de 3^e.

	modèle 3	modèle 2	modèle 1	divers
1	réponse $\frac{4}{5}$ 46%	réponse $\frac{3}{2}$ 26%	réponse $\frac{1}{2}$ 25%	réponse 0,25 ou 1 3%
2	réponse 4a 90%	réponse 2a 7%		réponse 4a ² ou a 3%
3	réponse $\frac{2}{3}$ 44%	réponse $\frac{10}{7}$ 28%	réponse $\frac{3}{7}$ 19%	réponse recopiée sans réduire 9%
4	réponse $\frac{b+5c}{4b+3c}$ 22%	réponse $\frac{23}{12}$ 18%	réponse $\frac{6}{7}$ ou $\frac{5}{7}$ 32%	réponse recopiée 19% ou autre 9%
5	réponse recopiée 42%	réponse $\frac{2}{7x} + 1$ ou $\frac{2}{7x}$ 10%	réponse 2 (29%) ou $\frac{9}{7}$ (13%)	non réponse 8%

II - CALCULS FAISANT INTERVENIR LE SECOND DEGRE

1. Présentation de l'épreuve.

effectuer les calculs suivants			
n°	expressions à transformer	calculs	résultats
①	$(3+y)^2$		
②	$17^2 - 3^2$		
③	$15^2 + 2^2$		
④	$(2x-5)^2$		
⑤	$13^2 + 7^2$		
⑥	$(x+0,5)^2$		
⑦	$(11+8)^2$		
⑧	$14^2 - 4^2$		
⑨	$(3a+4a)^2$		
⑩	$(10\ 000-1)^2$		

Voici le deuxième test proposé aux mêmes élèves, soit 66 élèves de 3^e, dans pratiquement les mêmes conditions matérielles que le premier et construit encore à partir des obstacles cités dans l'introduction. Nous pouvons dire immédiatement qu'il est mieux réussi dans l'ensemble que le premier.

Nous avons donné pour seule consigne : effectuer ; mais nous avons gardé la présentation en 3 colonnes pour voir apparaître la méthode utilisée par l'élève. Le temps imparti à ce test était impérativement une demi-heure pour inciter les élèves à utiliser les méthodes les plus rapides ; mais les nombres choisis étaient peut-être trop simples car, mis à part le dernier exercice, les élèves ont réussi à parcourir tout le test quelle que soit la méthode employée.

2. Analyse de l'épreuve.

L'ensemble des 10 questions est décomposé en 48 modalités de réponses dont 10 correspondent aux réponses justes, les 38 autres étant des modalités erronées.

Le but de l'analyse des réponses des 3 classes constituant un ensemble E, a été d'essayer de découvrir des implications entre les modalités de réponses. A cette fin, Régis Gras, dans sa thèse, considère qu'une modalité « a implique presque une modalité b » si l'ensemble E_a des élèves ayant adopté la modalité est « presque inclus » dans l'ensemble E_b des élèves ayant adopté la modalité b. Un test statistique associé permet de quantifier cette quasi-implication. Celle-ci est d'autant plus proche de l'implication que l'indice, mesurant les rapports statistiques entre l'effectif faible des élèves la contredisant et les effectifs des élèves E, E_a et E_b, est proche de 1.

L'analyse statistique des réponses des élèves par un micro-ordinateur a conduit à mettre en évidence 3 modèles principaux où les procédures utilisées restent stables d'un exercice à l'autre.

— Un modèle M₁ « compensatoire » pour lequel la somme a² + b² est perçue presque systématiquement comme étant égale à (a + b) (a - b). Par exemple :

$$15^2 + 2^2 = (15 + 2) (15 - 2) = \dots$$

$$\text{ou } 13^2 + 7^2 = (13 + 7) (13 - 7) = \dots$$

— Un modèle M₂ « linéaire » pour lequel la somme a² + b² (respectivement a² - b²) est perçue presque systématiquement comme étant égale à (a + b)² (respectivement (a - b)²). Par exemple dans (1) et (4) : $(3+y)^2 = 9 + y^2$ ou $(2x-5)^2 = 4x^2 - 25 \dots$

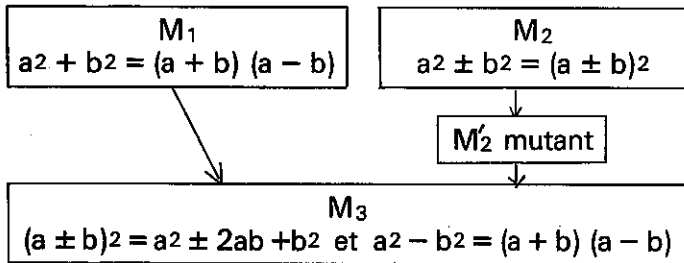
Une procédure M₂, mutante de M₂, caractérise les comportements des élèves qui, suivant les exercices proposés, utilisent le modèle juste M₃ et, de façon instable, dans d'autres cas, le modèle M₂.

— Le modèle juste M₃ utilisé pratiquement dans tous les exercices.

3. Représentation de l'analyse.

Un même élève peut, bien entendu, utiliser de façon régulière, M_1 ou M_2 (mais jamais M_1 et M_2) et dans certaines circonstances, M_3 (cas plus fréquent que la conjonction $M_2 - M_3$).

Ceci rend plausible l'hypothèse de la genèse suivante du « bon » modèle M_3 .



Répartition des modèles utilisés selon les questions :

numéro de l'exercice	modèle M_1	Modèle M_2	modèle M_3	total expliqué
1		9%	83%	92%
2		9%	88%	97%
3	6%	27%	67%	100%
4		12%	68%	80%
5	3%	26%	71%	100%
6		9%	71%	80%
7		6%	94%	100%
8		8%	88%	96%
9		8%	59%	67%
10		8%	41%	49%

On remarque que dans les 8 premiers exercices, les 3 modèles sont explicatifs de plus de 80 % des comportements des élèves ce qui est performant. Par contre, dans les 2 derniers exercices, ils sont moins explicatifs en raison d'erreurs d'autre nature venues se greffer ici, par exemple :

pour le n° 9 : $3a + 4a = 7a^2$
 ou $2a$ au lieu de a^2
 ou $3a^2$ au lieu de $(3a)^2$

pour le n° 10 : $10\ 000\ 2 = 1\ 000\ 000$
 ou $(a - b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$
 ou $10\ 000 - 1 = 99\ 999$

III - AIDES ENVISAGEES

Un professeur du groupe a donné ces 2 mêmes tests à ses élèves de 3^e l'année suivante. Les résultats ont été meilleurs dans l'ensemble avec moins de réponses aberrantes que l'année précédente. Ce qui nous a amené à penser qu'il ne faut pas se laisser de prévenir les élèves contre ces erreurs qui constituent même de véritables obstacles attracteurs.

1. Aides envisagées contre les erreurs rencontrées dans le 1^{er} test sur les fractions. (Ces exercices n'ont pas été présentés sous forme de tests).

a) Pour faire assimiler et différencier les techniques de l'addition ou de la multiplication des fractions, ne pas se contenter de calculs isolés les uns des autres mais donner en parallèle des calculs faisant intervenir des opérations différentes en utilisant les mêmes nombres.

Par exemple calculer

$$\frac{3+5}{3+4} \text{ et } \frac{3 \times 5}{3 \times 4} \qquad \frac{7+5}{5} \text{ et } \frac{7 \times 5}{5}$$

$$\frac{3}{3} + \frac{5}{4} \text{ et } \frac{3}{3} \times \frac{5}{4} \qquad \frac{7}{5} + \frac{5}{5} \text{ et } \frac{7}{5} \times \frac{5}{5}$$

$$\frac{5}{4} + \frac{5}{3} \text{ et } \frac{5}{4} \times \frac{5}{3} \qquad \frac{7}{5+5} \text{ et } \frac{7}{5+5}$$

b) Présentation un peu différente de ce type d'exercices sous forme de tableaux à remplir du genre suivant

a	b	c	$\frac{a+b}{c} + \frac{b}{c}$	$\frac{a+b}{c}$	$\frac{a+b}{c+c}$	$\frac{a}{c} \times \frac{b}{c}$	$\frac{a \times b}{c}$	$\frac{a \times b}{c \times c}$
---	---	---	-------------------------------	-----------------	-------------------	----------------------------------	------------------------	---------------------------------

ou

a	b	c	d	$\frac{a+c}{b+d}$	$\frac{a+c}{b+d}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	$\frac{a \times c}{b \times d}$
---	---	---	---	-------------------	-------------------	----------------------------------	---------------------------------

Pour remplir ces tableaux, on a pensé proposer aux élèves la **calculette**. A ce moment là, ils seraient peut-être moins tentés par des simplifications « réductions » qui deviennent alors inutiles. Par contre, l'utilisation de la calculette devrait les amener à réfléchir sur l'ordre des différentes opérations, les priorités ; cet écueil pourrait être aussi évité par l'utilisation d'organigrammes. Il faut remarquer qu'on a volontairement dépouillé ces exercices de tout support concret momentanément pour se consacrer à l'apprentissage des calculs numériques d'abord, peut-être littéraux ensuite ; mais il serait certainement souhaitable, ponctuellement, de revenir à des exercices concrets (partages) en particulier pour l'assimilation de la technique d'addition des fractions.

2. Aides envisagées contre les erreurs rencontrées dans le 2^e test sur les carrés.

a) Faire remplir les 2 types de tableaux suivants

x	2	3	5	4	-4	0						
x ²							16	9	25	36	64	100

éventuellement plusieurs possibilités

Comparer $(2+3)^2$ et 2^2+3^2 ...

x	2	3	6	4	-4	-16						
x ²							0,01	100	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$

éventuellement trouver plusieurs possibilités

Comparer $(2 \times 3)^2$ et $2^2 \times 3^2$...
 $0,12 \times (-10)^2$ et $(-1)^2$
 $(-0,1)^2 \times (-10)^2$ et 12 ...

- b) Utiliser une table de carrés (n, n^2) pour répondre aux questions suivantes :
- Dans la colonne n , choisir 3 nombres a, b, c tels que $a + b = c$. Comparer $a^2 + b^2$ et c^2 , c'est-à-dire $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$.
 - Dans la colonne n , choisir 3 nombres a, b, c tels que $a \times b = c$. Comparer $a^2 \times b^2$ et c^2 , c'est-à-dire $a^2 \times b^2$ et $(a \times b)^2$.
 - Dans la colonne n^2 , choisir 3 nombres a^2, b^2, c^2 tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Comparer $a + b$ et c , c'est-à-dire $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$.
 - Dans la colonne n^2 , choisir 3 nombres a^2, b^2, c^2 tels que $a^2 \times b^2 = c^2$. Comparer $a \times b$ et c , c'est-à-dire $\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$ et $\sqrt{a^2 \times b^2}$.
- c) Faire une figure qui met en évidence 2 méthodes pour calculer l'aire d'un carré où la longueur d'un côté est $a + b$. Qu'en déduire ? Dans toute la suite, avec l'unité carreau, x désigne la longueur du côté d'un carré.
- On augmente x de 2 ; trouvez, à l'aide d'une figure, de combien augmente l'aire du carré ?
 - On sait que si x augmente de 5, l'aire du carré augmente de 40. A l'aide d'un figure, trouvez une équation que vous résoudrez pour déterminer x .
 - On multiplie x par 3. A l'aide d'une figure, trouvez par combien est multipliée l'aire du carré. Hachurez en 2 couleurs différentes $(3x)^2$ et $3x^2$ de façon à établir une relation entre les deux.

Nos observations mettent en évidence les difficultés importantes rencontrées par les élèves du 1^{er} cycle qui doivent commencer à formaliser leur pensées, difficultés accrues par la tendance qu'ont certains, dans ce genre d'épreuves qui met en jeu des notions diverses plus ou moins lointaines, à désorganiser leurs premiers apprentissages.

Aussi, nous pensons que les types d'exercices cités présentent un grans intérêt didactique car ils sont à la fois analyseurs et révélateurs. Même s'ils amènent les élèves à commettre des erreurs, si importantes soient-elles, pourvu qu'elles soient explicitées et corrigées, c'est sans doute un moyen efficace pour mettre en place le concept sous-jacent. Nous rejoignons ici Piaget qui considère que « les théories fausses des jeunes enfants » ne sont pas à rejeter par les enseignants, bien au contraire, puisqu'elles leur permettent « d'assouplir leurs facultés cognitives, de développer leur aptitude à la construction de théories plus orthodoxes ».

IV. CONCLUSIONS

En comparant les deux champs conceptuels abordés ici, contrairement aux apparences, on s'aperçoit qu'une fonction qui est linéaire comme la fonction

« partage en c parties » ($\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; $\frac{ka}{a} = k \cdot \frac{a}{c}$)

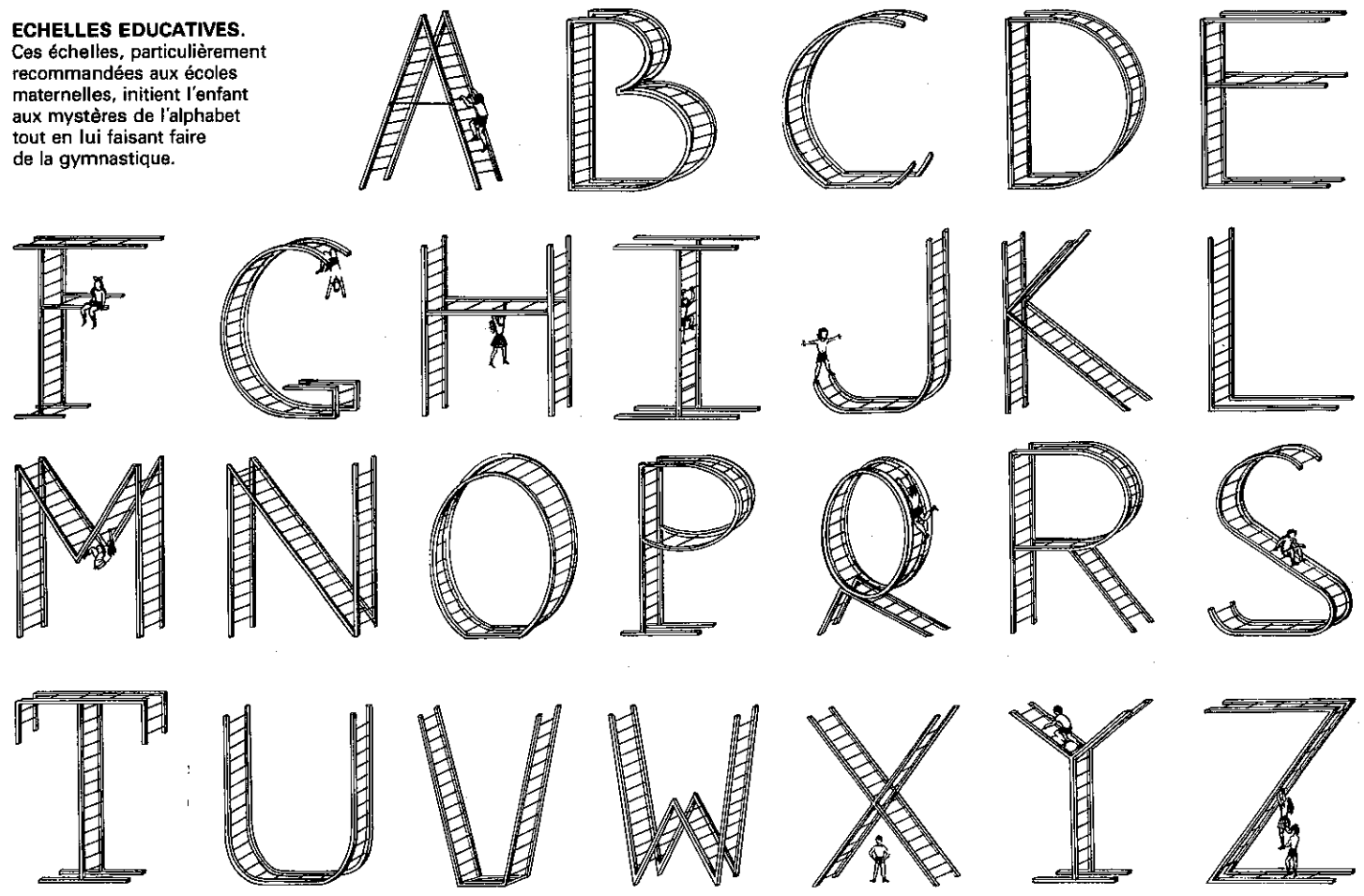
est tout autant source d'erreurs qu'une fonction qui ne l'est pas comme celle du second degré

$[(a + b)^2 \neq a^2 + b^2 \text{ et } (ka)^2 \neq ka^2]$.

REFERENCES

L. BOOTH, 1984, Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, petit x n° 5, IREM de Grenoble.
 R. GRAS, 1979, contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certains objectifs didactiques en mathématiques, thèse Université de Rennes.

ECHELLES EDUCATIVES.
 Ces échelles, particulièrement recommandées aux écoles maternelles, initient l'enfant aux mystères de l'alphabet tout en lui faisant faire de la gymnastique.



Effectuez les calculs suivants. Modèle M₁

Expressions à transformer	Inutile Calculs	Resultats
$(3+y)^2$	$(3+y)(3+y) = 9 + 2(3y) + y^2 =$	
$17^2 - 3^2$	$(17-3)(17+3) = 289 - 9 = 280$	$9 + 64 + y^2$
$15^2 + 2^2$	$(15+2)(15+2) = 225 + 30 + 4 = 259$	185
$(2x-5)^2$	$(2x-5)(2x-5) = 4x^2 - 10x - 10x + 25 = 4x^2 - 20x + 25$	139
$13^2 + 7^2$	$(13+7)(13+7) = 169 + 91 + 49 = 309$	$4x^2 - 20x + 25$
$(x+0,5)^2$	$(x+0,5)(x+0,5) = x^2 + 0,5x + 0,5x + 0,25 = x^2 + x + 0,25$	$13 + 49 = 36$
$(11+8)^2$	Inutile $(11+8)(11+8) = 121 + 2 \times 88 + 64 = 297$	$x^2 + x + 0,25$
$14^2 - 4^2$	$(14-4)(14+4) = 10 \times 18 = 180$	$181 + 176 + 64 = 421$
$(3a+4a)^2$	$(3a+4a)(3a+4a) = 9a^2 + 12a^2 + 12a^2 + 16a^2 = 47a^2$	erreur
$(10000-1)^2$	$(10000-1)(10000-1) = 10000^2 - 20000 + 1 = 99999999$	99

Les expressions suivantes sont-elles irréductibles ?
 - Si oui, les recopier dans la colonne de droite sans modification.
 - Si non, écrire dans la colonne centrale les calculs de simplification et dans la colonne de droite la fraction simplifiée.

Expression à étudier	Calculs éventuels	Fraction simplifiée
$\frac{6+2}{6+4}$	$\frac{6+2}{6+4} = \frac{(2 \times 3) + 2}{(2 \times 3) + (2 \times 2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2a \times 4}{2}$	$\frac{2a \times 4}{2} = \frac{2 \times 2 \times a \times 2}{2} = \frac{4a \times 2}{1} = 8a$	$\frac{2a \times 4}{2}$
$\frac{3+5}{7+5}$	$\frac{3+5}{7+5} = \frac{8}{12} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4b+20c}{16b+12c} = \frac{4 \times b + 4 \times 5c}{4 \times 4b + 4 \times 3c} = \frac{4(b+5c)}{4(4b+3c)} = \frac{b+5c}{4b+3c}$	$\frac{b+5c}{4b+3c}$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{2+7x}{7x} = \frac{2}{7x} + \frac{7x}{7x} = \frac{2}{7x} + 1$	$\frac{2}{7x}$
$\frac{4+a}{6+a}$	$\frac{4+a}{6+a} = \frac{4+a}{6+a}$	$\frac{4+a}{6+a}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2a+4}{2} = \frac{2(a+2)}{2} = a+2$	$\frac{4a}{4}$
$\frac{91+1259}{91+3452}$	$\frac{91+1259}{91+3452} = \frac{1350}{3543} = \frac{450}{1181}$	$\frac{1350}{3543}$
$\frac{3(x-1)}{3x}$	$\frac{3(x-1)}{3x} = \frac{3(x-1)}{3 \times x} = \frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{5+10a}{15-10a}$	$\frac{5+10a}{15-10a} = \frac{5(1+2a)}{5(3-2a)} = \frac{1+2a}{3-2a}$	$\frac{1}{3}$

Modèle (1)

UNE HISTOIRE MISE EN BOITES

Jean-Paul DELAHAYE - Lille

Nous continuons ici la rubrique itérative

"Dis, papa, tu m'racontes une histoire !" (cf. PLOT n°s 30 et 32).

Aujourd'hui nous vous proposons une nouvelle histoire fractalisante de J.-P. Delahaye. Ceux qui aiment ce genre d'histoires trouveront détails, compléments et autres histoires de l'auteur dans

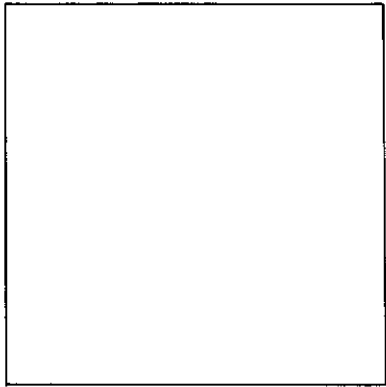
"Dessins géométriques et artistiques avec votre micro-ordinateur"

- 2 tomes - parus chez Eyrolles - Paris 1985 ;

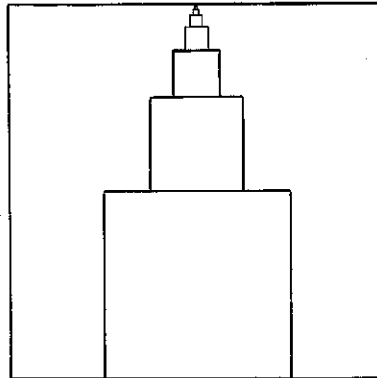
ainsi que dans une publication de l'IREM de Toulouse (1986) :

"La recursivité en géométrie : les fractals" de Roger Cuppens.

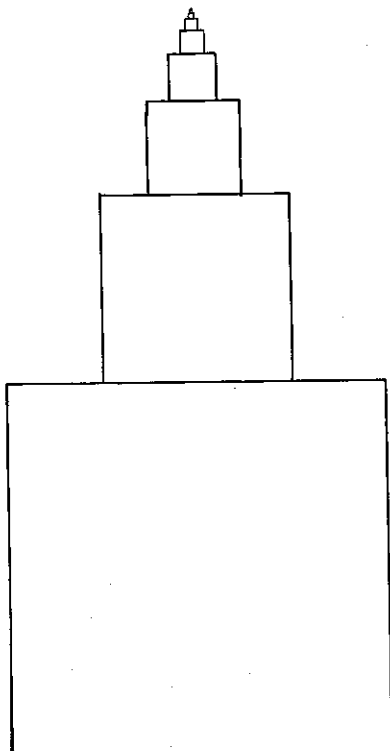
Au départ j'avais une boîte :



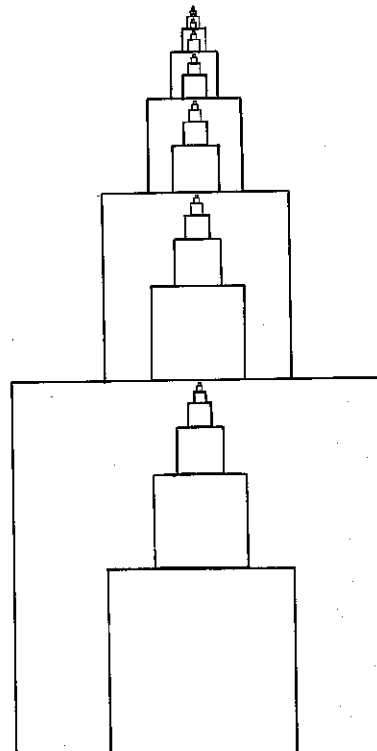
Ensuite je me suis dit : il leur faut une boîte. Alors je les ai toutes rapetissées et je les ai rangées dans une boîte que j'ai appelée super-boîte :



J'ai pensé qu'une seule boîte c'était trop peu alors j'en ai acheté une infinité d'autres, mais de plus en plus petites pour pouvoir les empiler :

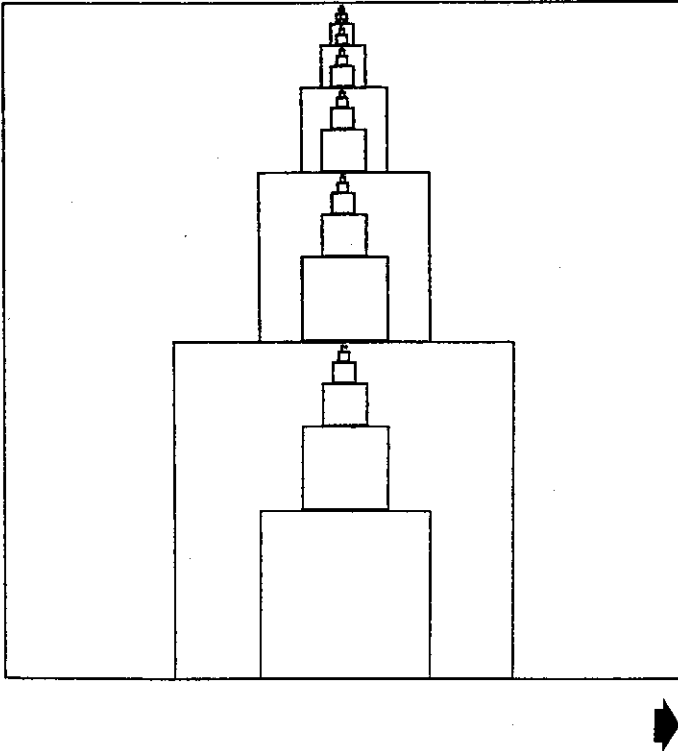


J'ai pensé qu'une seule super-boîte c'était trop peu alors j'en ai achetée une infinité d'autres, mais de plus en plus petites pour pouvoir les empiler :

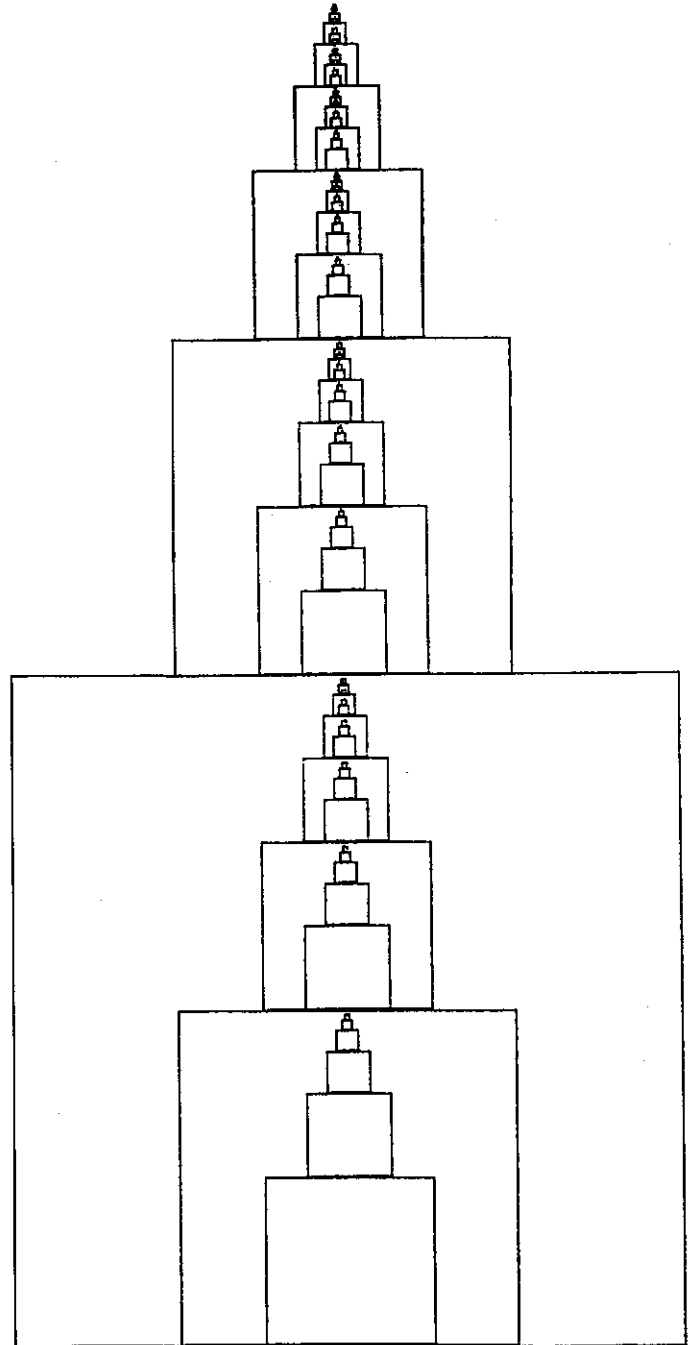


...

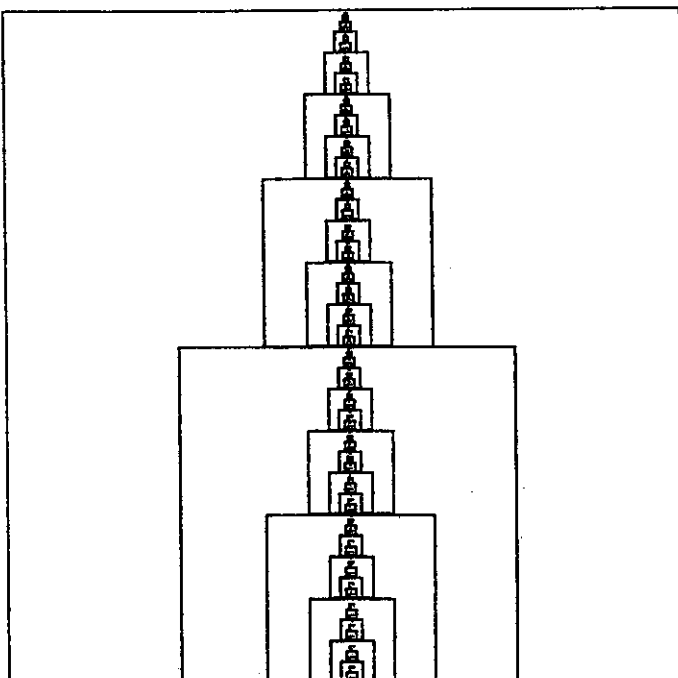
Ensuite je me suis dit : il leur faut une boîte. Alors je les ai toutes rapetissées et je les ai rangées dans une boîte que j'ai appelée super²-boîte.



J'ai pensé qu'une seule super²-boîte c'était trop peu alors j'en ai achetée une infinité d'autres, mais de plus en plus petites pour pouvoir les empiler :



Au bout d'un temps infini voilà ce que j'avais :



etc. etc.



Exercice : Pouvez-vous, sur cet exemple, trouver une procédure récursive décrivant les différentes étapes de l'histoire.

(Coup de pouce : commencez l'histoire par la... fin !)



... à suivre bien sûr. ■

UNE IDÉE DE PASCAL A EXPLOITER DANS LES CLASSES (suite)

Roland STOWASSER - (RFA)

L'histoire des mathématiques fourmille d'idées d'excursions pour vos élèves, exploitables à plusieurs niveaux.

Dans cet article, traduit par Colette Bloch (Poitiers), vous trouverez des idées d'application anciennes et nouvelles des congruences aux calculs des restes.

Ou : de Pascal à Rivest en passant par Gauss, Fermat et les autres, comment actualiser l'histoire des mathématiques et son enseignement.

Jeu d'allumettes

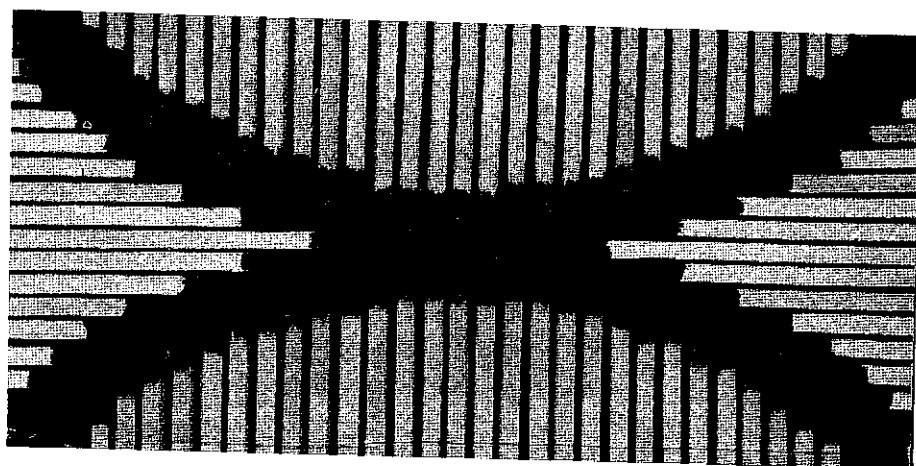
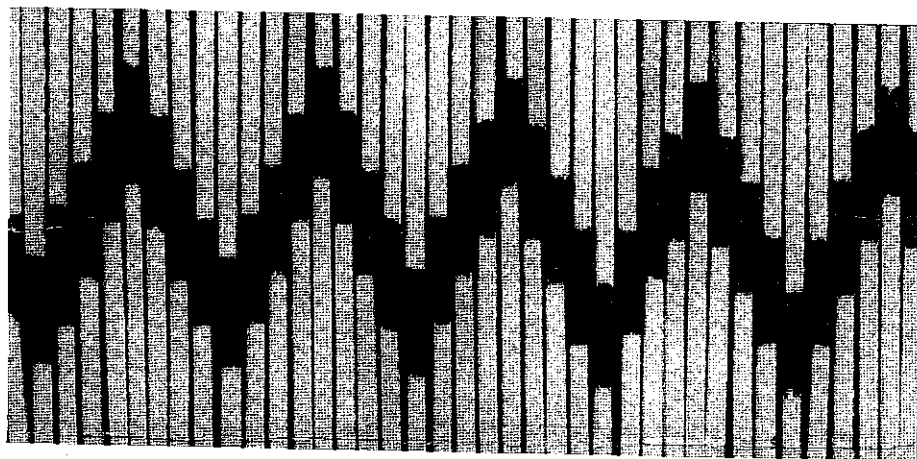
Fatigués des horloges, nous allons jouer avec des allumettes. Un élève en met un certain nombre dans une petite boîte d'allumettes ordinaires. Ce nombre est connu de lui seul.

Je secoue la boîte près de mon oreille puis je fais retirer un nombre d'allumettes égal à la somme des chiffres

du nombre. Je secoue encore une fois et je puis alors dire sans me tromper combien il y avait d'allumettes dans la boîte.

Les élèves font des essais et remarquent : quand on retranche la somme des chiffres, il reste toujours un nombre d'allumettes multiple de 9.

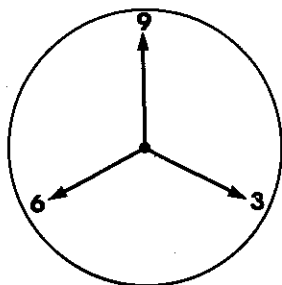
Il n'y a donc pas beaucoup de résultats possibles et une oreille exercée les départage facilement.



Reste la question de la validité du théorème : 9 divise $n - S(n)$. Les élèves formulent ce théorème après avoir essayé - sans allumettes - de "grands" nombres.

Sortons toutes les allumettes de la boîte et formons des paquets de 10. Cela donne quelques paquets de 10 (au plus 5) et il reste quelques allumettes isolées (au plus 9). Pour retrancher la somme des chiffres nous procédons ainsi : enlever une allumette à chaque paquet de 10 et supprimer toutes les allumettes isolées. On voit qu'il reste des paquets de 9 - ou rien. Pour des nombres plus grands, on regarde de nouveau les restes des puissances de 10, cette fois dans la division par 9. Voici le ruban des restes :

9	...	1	1	1
---	-----	---	---	---



Dans ce cas la somme des chiffres pondérés S_9 est identique à la somme des chiffres ordinaire S . Manipuler "l'horloge de 9 heures" est donc un jeu d'enfant des plus faciles.

Rubans de restes

Les élèves ont compris depuis longtemps qu'à tout nombre b correspond un ruban de restes, les restes des puissances de 10 divisé par b . Avec ce ruban on peut calculer la somme pondérée des chiffres d'un nombre n . $S_b(n)$ a le même reste que n dans la division par b .

Nous laissons les enfants travailler à leur guise. Ils trouvent de beaux rubans compliqués ; il y a toujours une période et la période est toujours plus petite que b . Tout cela est facile à comprendre : il n'y a que $b - 1$ restes différents). Les beaux rubans ont des périodes courtes.

12	...	4	4	4	4	10	1
----	-----	---	---	---	---	----	---

60	...	40	40	40	40	10	1
----	-----	----	----	----	----	----	---

3	...	1	1	1	1
---	-----	---	---	---	---

9 et 3 ont des rubans identiques. Le ruban ne détermine donc pas de manière univoque le nombre b , taille des "paquets". Il n'est pas vrai que toute suite de naturels, commençant par 1 et de période finie, représente un ruban de restes (pourquoi ?).

L'individu 37, bien connu en théorie des nombres, a un beau ruban de restes :

37	...	26	10	1	26	10	1
----	-----	----	----	---	----	----	---

Si le nombre b divise une puissance de 10, le reste est 0 pour cette puissance et pour toutes les puissances supérieures. Si le début n'est pas trop long, le calcul de la somme pondérée des chiffres est donc particulièrement simple. Plus tard le théorème d'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers montrera que b est nécessairement de la forme $2^m \cdot 5^n$.

16	...	0	0	8	4	10	1
----	-----	---	---	---	---	----	---

40	...	0	0	20	10	1
----	-----	---	---	----	----	---

Le ruban des restes relatifs à 7 est moins joli. Sa période a pour longueur 6, elle est donc maximale.

La règle de divisibilité de Pascal

Rappelons que n et $S_b(n)$ ont même reste par b , ce reste commun peut être nul ou différent de zéro. Autrement dit : si (et seulement si) b divise n , alors b divise la somme pondérée (relativement à b) des chiffres de n .

C'est ce qu'énonce la règle de divisibilité de Pascal.



Mes élèves de onze ans l'ont parfaitement assimilée quant ils manient correctement les rubans de restes et ont compris le procédé des "paquets" qui est à la base de cette méthode.

Dans les livres de classe on trouve quelques règles pour les derniers chiffres (rubans à zéros) et les règles de la somme des chiffres pour 3, 9 et 11. Ce sont des conséquences particulières de la règle de divisibilité de Pascal.

Suites de restes et règles de divisibilité dans d'autres bases de numération de position

Les plus futés de la classe remarquent qu'il n'y a aucune raison de privilégier la numération décimale. On peut appliquer la méthode de Pascal dans d'autres bases que 10.

(Pascal le signale explicitement dans son texte). Impossible d'empêcher ces élèves de formuler des règles de divisibilité dans un système non décimal et de découvrir des analogies frappantes. Ils s'aperçoivent vite que, par exemple, la règle de divisibilité par 4 en base 5 est la même que la règle de divisibilité par 9 en base 10.

Il faut bien voir tout ce que ces suites de restes permettent comme travail préparatoire pour l'étude des structures algébriques fondamentales (groupes, anneaux, corps, groupes cycliques, homomorphismes, etc.). Le "petit théorème de Fermat" est à portée de la main.*

Algorithme de la scie

Le lecteur comprendra vite, sans autre commentaire, sur les exemples donnés, le pourquoi de ces applications originales, et pourtant immédiates, de l'idée de Pascal.

J'ai un très grand nombre ; j'en voudrais bien un plus petit qui donne le même reste, par exemple par 37.

Comme $R_{37}(10^6) = 1$, je "scie" à droite un morceau de 6 chiffres et j'ajoute ce nombre au morceau de gauche :

$$a = 403342028376 \boxed{253102}$$

$$+ \quad 253102 \leftarrow$$

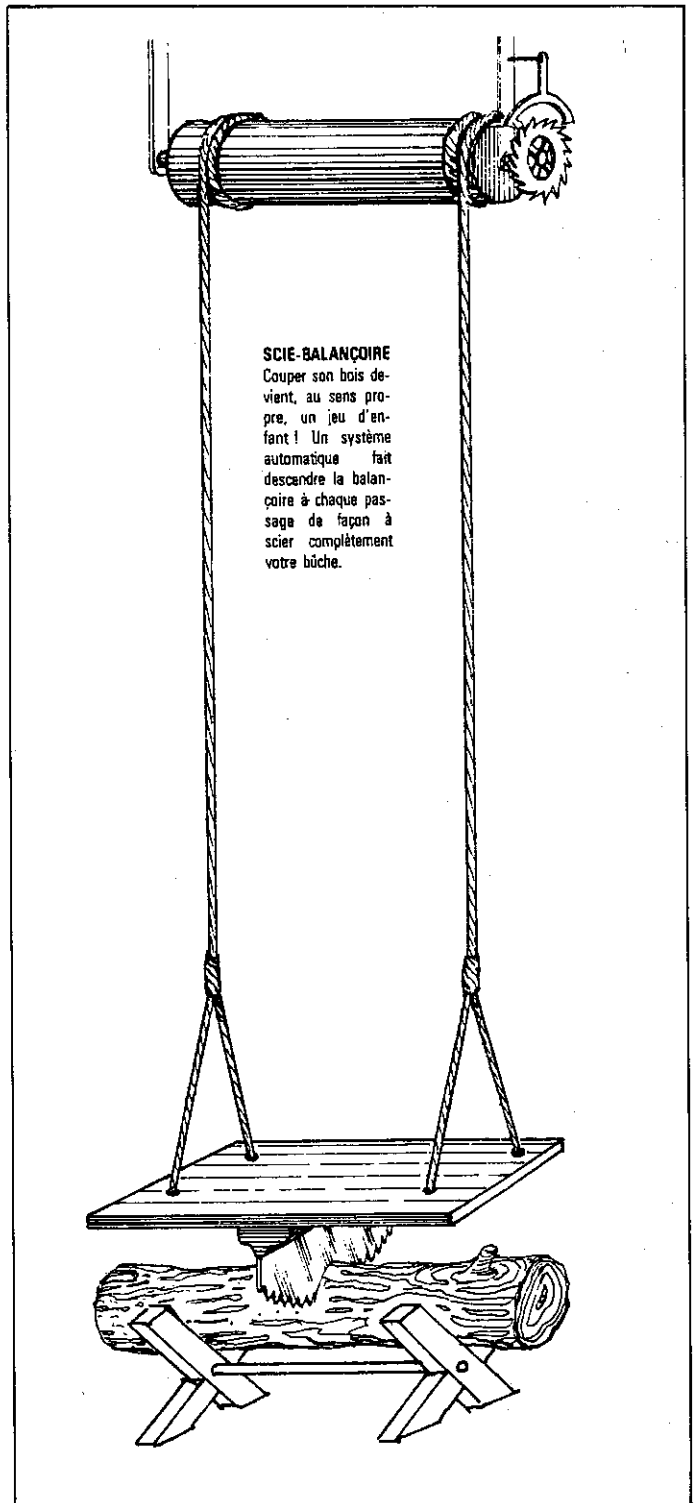
$$a_{37} = 403342281478$$

Justement on a souvent besoin de "scier" les grands nombres.

Si p est un nombre premier différent de 2 ou 5, le petit théorème de Fermat assure que :

$$R_p(10^{p-1}) = 1.$$

Les nombre 14 ne donne le reste 1 pour aucune puissance de 10. Mais, comme $R_{14}(10^8) = 2$, nous allons



ajouter au morceau de 8 chiffres scié à droite, le double du morceau restant à gauche :

$$a = \boxed{234820123502} 42640218$$

$$x 2 \rightarrow 469640247004$$

$$a_{14} = 469682887222$$

Le "petit théorème de Fermat" et le calcul des congruences de Gauss :

Calculer en congruences :

Nos élèves de onze ans "spécialistes des horloges" ont grandi. Ils ont maintenant seize ans et ils ont appris consciencieusement la **formule du binôme** :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

Ils ont eu aussi mainte occasion d'appliquer l'idée fondamentale de la récurrence, aussi bien pour résoudre des problèmes que pour faire des démonstrations (par exemple : dans les "problèmes plaisants" de BACHET DE MEZIRIAC, problèmes de poids, de pesées, de pondération, les découpages de Steiner, la suite de Fibonacci, les lettres d'Euler, etc.

Ils sont assez mûrs pour lire et comprendre la première section du livre de Gauss : "Recherches arithmétiques".

Quand il parut en 1889, en latin, ce livre qui fit époque, son auteur avait tout juste 22 ans. Dans les quatre premières pages il a créé un outil inestimable pour la théorie des nombres : le calcul des congruences, une technique qui permet de découvrir des vérités cachées et fournit des démonstrations courtes, claires et rigoureuses.

Par exemple, avec cet outil l'algorithme de Pascal pour le reste d'une division tient en trois lignes. Mais lisons d'abord le § 12, correspondant, dans les "Recherches...".

Puis rappelons-nous comment Pascal calcule de proche en proche les plus petits restes positifs des puissances successives de 10 : $R_m(a)$ désigne le reste de la division de a par m .

$$R_m(10^{i+1}) = \min_x \{10 \cdot R_m(10^i) - x m\}$$

et finalement :

$$\sum_{i=0}^N a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^N a_i \cdot R_m(10^i) \pmod{m}$$

A l'aide des congruences, on écrit :

$$10^{i+1} = 10 \cdot 10^i$$

$$\text{d'où } R_m(10^{i+1}) \equiv 10 \cdot R_m(10^i) \pmod{m}$$

$$\text{d'où } \sum_{i=0}^N a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^N a_i \cdot R_m(10^i) \pmod{m}$$

(Nous verrons des exemples encore plus frappants de la puissance du calcul des congruences.)

Un exercice de programmation qui mène au petit théorème de Fermat

Le professeur essaye d'allécher les élèves. Il leur promet une bonne récompense pour la tâche aride qui consiste à calculer tous les rubans de restes pour les nombres inférieurs à 200.

La calculatrice crache les résultats qui permettent de retrouver une propriété fondamentale en théorie des nombres. Plus de 300 ans après sa découverte par

Pierre de Fermat (1601 - 1665) elle a reçu récemment (1977) une application pratique dans le codage des communications (cf. prochain numéro du PLOT sur la cryptologie).

Fermat écrivait, dans une lettre du 18 octobre 1640 à Frenicle.

XLIV. — 18 OCTOBRE 1640.

4. Il me semble après cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuie les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions géométriques, qui est tel :

Tout nombre premier ⁽¹⁾ mesure infailliblement une des puissances -1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier donné -1 ; et, après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont multiples de l'exposant de la première satisfont tout de même à la question.

Exemple : soit la progression donnée

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \text{ etc.} \end{array}$$

avec ses exposants en dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. Il mesure la troisième puissance -1 , de laquelle 3, exposant, est sous-multiple de 12, qui est moindre de l'unité que le nombre 13, et parce que l'exposant de 729, qui est 6, est multiple du premier exposant, qui est 3, il s'en suit que 13 mesure aussi la dite puissance $729 - 1$.

Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers; de quoi je vous envoie la démonstration, si je n'appréhendois d'être trop long.

⁽¹⁾ C'est de cet énoncé qu'a été tirée la proposition connue sous le nom de *Théorème de Fermat*, à savoir que si p est premier et ne divise pas a , il divise $a^{p-1} - 1$.

Extrait des Œuvres de Fermat

Et Fermat s'en tient là ! (cf. Œuvres de Fermat (4 vol.) Gauthier-Villars, Paris 1891-1912.

Nous pouvons comprendre sa fascination devant la possibilité qui s'offrait à lui de déterminer en un tour-nemain les restes de divisions de nombres inexprimablement grands. Ainsi par exemple :

$$x = 5^{999\,999} \equiv 6 \pmod{7}$$

en effet :

$$5^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$5^{10} \equiv 4^5 \equiv 2^{10} \equiv 2$$

$$5^{10^2} \equiv (5^{10})^{10} \equiv 2^{10} \equiv 2$$

$$5^x \equiv 5^{10^6} \equiv 2$$

donc

$$(7 - 2)x \equiv 2$$

$$\text{soit } x \equiv -1$$

Finalement :

$$x = 5^{10^6 - 1} \equiv 6 \pmod{7}$$

Fermat lance le bouchon un peu loin. Son affirmation ne veut naturellement que peu les suites géométriques a^1, a^2, a^3, \dots telles que a ne soit pas divisible par le nombre premier choisi.

Ainsi par exemple, aucune puissance de 10 diminuée de 1 n'est divisible par 5...

Pour notre prochain chapitre, consacré aux codages raffinés des messages, nous n'avons besoin que d'une partie du théorème fondamental trouvé par Fermat.

Le "petit théorème de Fermat"* : **Quelque soit le nombre premier p , pour tout naturel z premier avec p on a :**

$$z^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

On peut énoncer le "petit théorème de Fermat" sans restriction sur z , sous la forme suivante :

Quelque soit le nombre premier p , pour tout naturel z on a :

$$z^p - z \equiv 0 \pmod{p}.$$

* Les Lecteurs du PLOT (n° 27) se rappelleront que le "grand théorème de Fermat" désigne une conjoncture non encore "totalement" démontrée à ce jour : $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entière pour $n \geq 3$.

Démonstration d'Euler pour le "petit théorème" de Fermat :

Dans son écrit sur la règle générale de divisibilité Pascal a calculé la suite des restes de quelques suites géométriques et s'en est servi pour son propos. Le "petit théorème de Fermat" était énoncé depuis quelques années et Pascal en avait eu connaissance. Mais évidemment sa signification profonde lui avait échappé car il n'en souffle mot. L'intérêt des contemporains était tout entier dirigé vers le développement du calcul infinitésimal, l'outil adéquat pour la physique. Il n'est donc pas étonnant que Léonhard Euler (1707-1753) ait été le premier à démontrer directement le "petit théorème de Fermat" (par induction complète). Nous utiliserons bien sûr pour cela le calcul des congruences de Gauss :

$$\begin{aligned} (z+1)^p &= (z+1) \\ &= z^p + \frac{p}{1} z^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z^{p-2} + \dots + \frac{p(p-1) \dots 2}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} z \\ &\equiv z^p - z \pmod{p} \\ &\equiv 0 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Les coefficients binomiaux sont des naturels ; p ne peut disparaître par simplification.

(à suivre) ■



Pythagore - Diophante - Fermat - Faldings ...

PROCHAIN ARTICLE :

*Rivest
et les codes secrets
à clés publiques*

Jacques PINAUD - Dreux

Enfin un article sur ce sujet sans limites.

C'est un canevas de réflexions que nous propose ici Jacques Pinaud qui, depuis 4 ans, s'occupe des lycées au bureau national de l'APMEP.

Nous vous le livrons tel que (l'article), vous laissant les vacances d'été pour l'étudier et lire les livres cités en bibliographie.

ANALYSE dans le Second Cycle les dérivés sans limites...

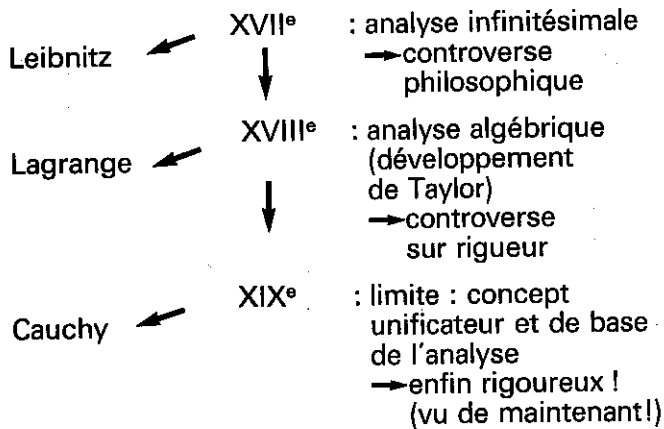
Plutôt un apprentissage sur les dérivées, au départ sans limites, pour aboutir à une définition (par limites) générale - la plus utile actuellement.

Pourquoi ? L'expérience prouve que la notion de limite est difficile, amenée - en dehors du problème du nombre dérivé - par des problématiques peu convaincantes.

La définition formelle n'est d'aucun secours. Exit donc les limites !

Quelle autre démarche pédagogique ?

L'HISTOIRE



Puis XX^e : fondement mathématique de l'analyse infinitésimale (analyse non standard).

Donc : la manipulation des infiniment petits ou grands des physiciens n'est pas si critiquable...

En outre le formalisme des limites est insoutenable pour l'apprentissage et la recherche.

Cet exposé fera sûrement bondir certains.

L'enseignant du 2^e type !

A propos de l'analyse se confrontent 2 "types" d'enseignants :

- l'enseignant s'appuyant sur des acquis et des vérités remis en cause en permanence en élaguant les erreurs, précisant les conditions de validité des théorèmes, utilisant les définitions et les remettant au "goût" des connaissances et des problèmes rencontrés.

- l'enseignant s'appuyant sur une belle définition au cours de laquelle "on" s'émerveillera petit à petit, au fur et à mesure... des découvertes, des finesses qu'elle renferme.

Notre pratique, nos expériences

Nous avons donc familiarisé les élèves aux dérivées dès le début de l'année par des problèmes de **contact** d'ordre 1 (tangente à une courbe) évacuant tout problème de limite de fonction en un point pendant plus d'un trimestre.

Par contre les limites de suites sont abordées simultanément (ce n'est pas du tout le même problème et la motivation est toute différente).

C'est au troisième trimestre avec par exemple les problèmes de vitesse (cf. Newton - bibliographie) que l'on retrouvera la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement.

On aura ainsi une définition efficace pour les nouvelles fonctions de terminales, avec d'autre part une vision permanente géométrique et un moyen d'observation numérique.

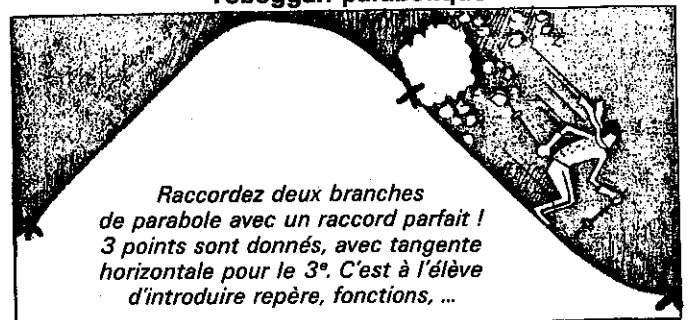
Les prérequis (fin de seconde - début de première)

— Représentation graphique de fonctions variées pour résoudre :

- **des problèmes du type $f(x) = m$**
Approche par dichotomie par exemple (si le résultat est "simple" on aura une preuve par calcul si $f(x)$ algébrique)

- **des problèmes d'extremum**
L'approche est délicate. Mais on peut faire remarquer que la précision n'a pas besoin d'être très grande car au voisinage du maxi l'image varie peu (grande tolérance, ex : problème de la boîte).

Toboggan parabolique



Cependant si la valeur est simple on peut avoir une preuve par calcul si $f(x)$ algébrique.

— L'étude "complète" de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ a pu être vue.

— Les variations sont lues sur graphique.

PAS D'ETUDE DE TAUX DE VARIATION aucun avenir !

Problèmes de tangentes en première

Parabole.

$$C : y = x^2 \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

(peut-être vu en seconde)

Tracé - Problème des tangentes

Les élèves placent une tangente sans problème (acquis sur le cercle certainement).

Recherche du coefficient directeur en $A \left(\frac{1}{1} \right)$

Il faut une définition du type "droite qui coupe la courbe en 1 seul point".

Soit m son coefficient directeur :

$$D : y - 1 = m(x - 1).$$

L'équation $x^2 = m(x - 1) + 1$ doit donc avoir une seule solution qui s'obtient simplement :

$$x^2 - 1 - m(x - 1) = 0; (x - 1)(x - m + 1) = 0.$$

Donc $m = 2$ cqfd !

Remarque :

Peut être abordé que l'on ait déjà vu ou non la résolution du problème du second degré.

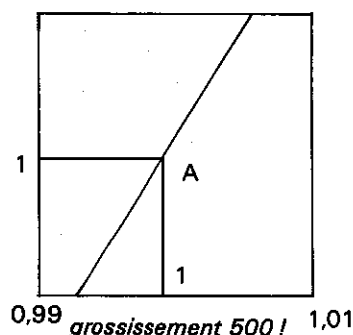
Au point $\left(\frac{a}{a^2} \right)$ le même raisonnement aboutit à :

La tangente à la parabole $y = x^2$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $2a$.

Ceci permet alors accessoirement d'obtenir de nombreuses propriétés géométriques classiques sur la parabole.

Revenons à $A \left(\frac{1}{1} \right)$ et $(T) : y = 2x - 1$.

Que se passe-t'il près du point A ?



x	x ²	x	x ²
0,9	?	1,1	?
0,99	?	1,01	?
...		...	
...		...	
...		...	
...		...	
1	1	1	1

par graphique
(table traçante intéressante
et très motivant)

par
tableau numérique

ON VOIT

C'est presque une droite $\longleftrightarrow x^2 \sim 2x - 1$

Tentative d'explication

Soit x proche de 1.

Posons $x = 1 + h$. Alors h est petit.

$$x^2 = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2.$$

L'étude d'un tableau numérique permet de dire : h^2 est très petit.

C'est là que, à l'observation du tableau de $h \mapsto h^2$ pour h petit, le programme suggère de dire que ce phénomène se traduira par :

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$$

$h \rightarrow 0$

Ceci me semble prématuré et encore vide de sens.

Remarque :

Je ne tiens pas particulièrement à la terminologie petit..., très petit...

Mais ceci est un embryon de ce qui pourrait être une structure non archimédienne (h et h^2 ne sont comparables que pour h infiniment petit, ce qui est la base de l'analyse non standard).

C'est loin des ξ mais a-t'on réussi avec ?

• Un coup d'œil vers $x \mapsto \alpha x^2$.

On obtient les coefficients $2\alpha a$.

• Un coup d'œil vers $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \delta$.

La courbe se déduit de la précédente par translation. Donc en deux points, distincts l'un de l'autre, les tangentes ont même coefficient directeur (peut-on changer la nature d'un contact par glissement ?).

On met alors en évidence que les coefficients directeurs s'obtiennent par la fonction $x \mapsto 2\alpha x + \beta$.

On l'appelle fonction dérivée etc.

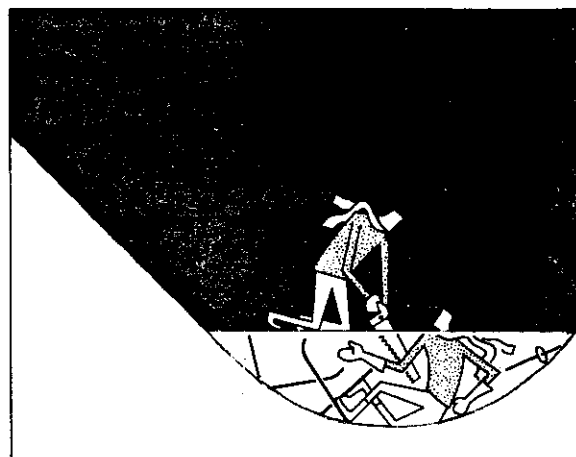
Observation du signe de la dérivée et lien avec le sens de variation. Economie par rapport à "formule canonique" ?

Attention ! cet article n'a pas de limites...

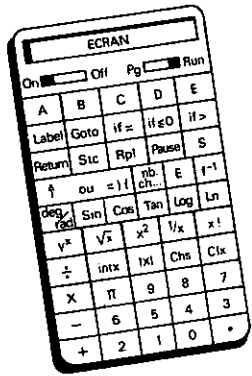
à suivre... ■

BIBLIOGRAPHIE

- Analyse non standard - PLOT n° 3 - 1976 (I). (eh oui ! il y a dix ans et de nombreux nouveaux lecteurs l'ont reçu en cadeau !). Voir aussi PLOT n° 27 - 1984.
- La Recherche n° 148 - Octobre 1983 - pages 1194-1201.
- Colloque Analyse - 1981.
- Nombre, mesure et continu - J. Dhombres - Cedic.
- Bulletin Inter Irem - Analyse - 1982.
- Principia mathematica - Newton - Christian Bourgois - Ed. 1985.
- Encyclopédie Universalis - Calcul numérique - Analyse.
- Collection Inter Irem n° 3 - Quelles activités pour quels apprentissages - 1983.



SECANTE ET COSECANTE ONT DISPARU, ET COTANGENTE NE SE SENT PAS TRÈS BIEN !



J. REGOURD - La Roche sur Yon

Tout possesseur d'une calculatrice sait, de nos jours, utiliser la touche INV. Peut-on alors ignorer sécante et cosécante ! Jacques Regourd répond ici par la négative, ne serait-ce, comme il le dit, que pour apprécier dans sa plénitude cette BD fin de siècle (l'autre) "les aventures du savant COSINUS".

Soit un élève muni d'une calculatrice "scientifique" devant les situations suivantes : $\sin x = a$, je connais x , trouver a ; je connais a , trouver x .

Pour le second cas, les machines possèdent une touche 2nd ou INV.

D'où la notion peu simple : fonction inverse d'une fonction (on l'appellera donc fonction réciproque) et la confusion avec l'inverse d'un nombre. Pour trouver des exemples un peu plus variés, proposons l'activité : construire $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \frac{1}{\sin x}$, dans un repère orthonormé, au pas de 0,1. Les deux courbes obtenues simultanément point par point vont permettre de nombreux commentaires :

- x est la mesure d'un arc, d'un angle, en radians.
- Les fonctions f et g ne sont pas l'objet d'une étude systématique, mais d'observations approfondies (en tenant compte de la remarque de A. Michel-Pajus sur le rôle du dessin, Bull. APMEP n° 348 p. 300) : périodicité, intervalles, limites, asymptotes, domaine de définition...

- Écoutons les élèves : "pour $\sin x$, c'est une fonction linéaire" ; observation vite déçue, ce qui n'empêchera pas un ou deux d'extrapoler très vite !

Remarquons que les machines fournissent 7 décimales et que c'est la construction des points qui conduit à l'approximation.

- $\frac{1}{\sin x}$ surprend pour les petites valeurs de x , ce qui confirme que les élèves n'ont pas le sens du nombre et de l'ordre de grandeur de l'inverse.

- La construction par points va permettre la "rencontre" des deux courbes pour $x = \frac{\pi}{2}$. Là encore surprise.

- Alors que les élèves ont vu l'approximation pour les petites valeurs de x et $\sin x$, ils ne voient pas au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ les approximations $\sin x \simeq 1 - \epsilon$ et $\frac{1}{\sin x} \simeq 1 + \epsilon$; mais il faut bien quelques interventions magistrales et les formules d'approximation ne sont plus d'usage courant avec l'électronique.

- Les asymptotes de $\frac{1}{\sin x}$ étant observées, nous n'avons pas les moyens d'aller plus loin, mais la comparaison avec la parabole est venue... d'où une réflexion sur les tendances qu'ont certaines branches de courbes à rester dans certaines limites ou à s'en évader...

Voilà une activité menée avec des élèves de 2^e année de BEP, après l'étude des fonctions $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow \frac{a}{x}$.

Le sens du nombre, le sens de la fonction sont au cœur du problème.

A quoi ça sert ? dit l'un ; ça a servi, dit l'autre.

$\frac{1}{\sin x}$ a été baptisée autrefois cosécante (cosec x) et au lieu de diviser par $\sin x$, on multipliait par cosec x

Utilisez le cercle trigonométrique pour en donner une interprétation géométrique et montrez que si α est la mesure d'un arc \widehat{AM} , $\sin \alpha \times \frac{1}{\sin \alpha} = 1$!

Posons la question aux historiens des mathématiques :
• Quand ces fonctions (séc et coséc) sont elles apparues ?

- Pour quels besoins mathématiques ?

- Pour quels besoins de calcul ?

- Quelles raisons pédagogiques provoquent leur disparition de l'enseignement ?

- De même, posons nous la question pour cotangente ; seule, elle subsiste dans quelques salles de techno et dans les formulaires pour les calculs de cotes sur piges (à la main, bien sûr !) En dehors de la difficulté d'exécuter une division, il y a peu de raisons à son maintien.

- La technologie des moyens de calcul la pousse-t-elle irrémédiablement dehors ?

Le problème est-il le même pour séc et coséc ? Les enseignants de mécanique qui utilisent encore cotan n'ont pas connaissance de séc et coséc, il n'y aurait donc pas que des raisons de calcul et de résolution de triangles au maintien de l'une et à la disparition des autres.

L'activité de construction et de discussion a été trop longue, certes (2 h), mais trop d'élèves avaient encore des difficultés à placer des points.

L'un deux a revendiqué un ordinateur, un programme et un moniteur ; dans ces conditions, l'objectif de l'activité ne peut être le même. Construire une courbe est fastidieux. L'objectif est d'induire une réflexion sur les nombres, les ordres de grandeur, leur usage. C'est une autre activité, avec d'autres questions à poser. Il faut en préciser les objectifs préalables, avec les outils préalables (programmer par exemple).

Trois fonctions de moins ? ou trois noms de moins, ce qui n'est peut-être pas important si d'une part l'histoire nous dit qu'elles existent et si d'autre part, elles sont riches d'activités utilisables comme trajets de contournement des difficultés des élèves.

Mais tout de même, ignorer sécante et cosécante ne permet pas d'apprécier dans sa plénitude cette BD fin de siècle (l'autre) "Les aventures du savant COSINUS" !

MICHEL CLINARD SUR LES TRACES DE PYTHAGORE

TROISIEMES - SECONDES

Michel CLINARD - Orléans

Voici le plan de travail réalisé par Michel Clinard dans une troisième d'Orléans à partir des 12 panneaux d'exposition (60 x 80 cm) de Michel Mirault et Gérard Pradalier (voir PLOT n° 32).

Nous rappelons que ces douze panneaux ainsi que les documents d'accompagnement peuvent être demandés en prêt ou en achat. Ecrire à la rédaction qui transmettra.

Déroulement

- Travail autonome en groupe de deux durant deux heures au C.D.I. Le plan de travail ci-joint est distribué. Le professeur reste à la disposition des élèves pour expliquer (réponses aux demandes, passages de groupe en groupe).
- Une heure de mises au point, précisions, explications de démarches générales avec toute la classe. (Reprise globale et structurée des explications données aux groupes.)
- Rédaction du compte rendu par les élèves : travail à la maison.

Objectifs (Les numéros renvoient au plan de travail et donc au panneau correspondant.)

- Calcul algébrique (panneaux 3-5)
- Constructions géométriques (9-12)
- Rappel de 4^e (10)
- Introduction aux travaux de classe sur Pythagore :
 - Aspects historiques - apports de Pythagore et de son école
 - Théorème (11)
- Approcher/renforcer la notion de preuve (voir ci-dessous).

Preuve et démonstration

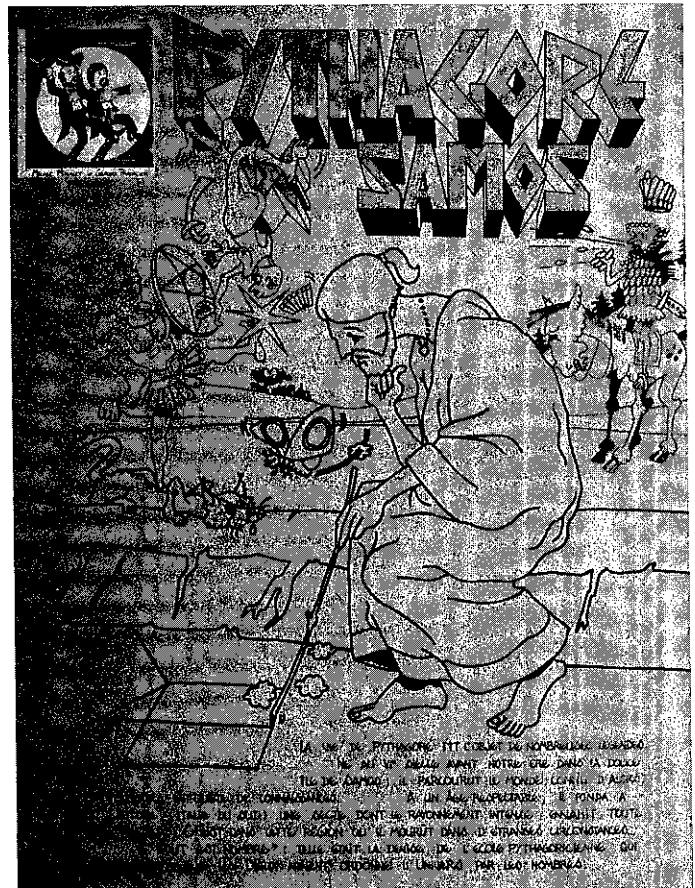
- Vérifier n'est pas prouver (7).
- Notion de libellé ou notation désignative. (Référence aux travaux de Y. Chevallard. - Voir aussi Petit X n° 5).

Appeler X un nombre est souvent insuffisant en mathématiques, en particulier, la dénomination X ne fait pas apparaître les propriétés de ce nombre.

En écrivant (dans N) $x = 3 \times p$; $y = 2p + 1$; $m = n + 1$ les libellés $3 \times p$; $2p + 1$; $n + 1$ caractérisent les nombres x , y , m comme étant multiple de 3 ; impair ; suivant.

Il semble important de mettre en évidence ces notions pour que les élèves puissent rédiger des preuves algébriques (2-4).

En montrant qu'un même nombre peut avoir plusieurs libellés (donc plusieurs propriétés), l'algèbre peut être abordée du point de vue des transformations : transformer un libellé en un autre mieux adapté à la situation considérée (développements, factorisations, identités remarquables par exemple).



• Raisonnement par fausse supposition (dit par l'absurde) (2.2.) "si x^2 pair alors x pair" peut être prouvé en exhibant une contradiction quand on considère " x^2 pair et x impair".

• Définition récursive d'un nombre (8)
On met en évidence $P_n = P_{n-1} + 3xn$
(Prolongement facile avec Logo.)

En considérant seulement P_n et P_0
on obtient $P_n = 1 + \frac{3}{2} \times n \times (n + 1)$

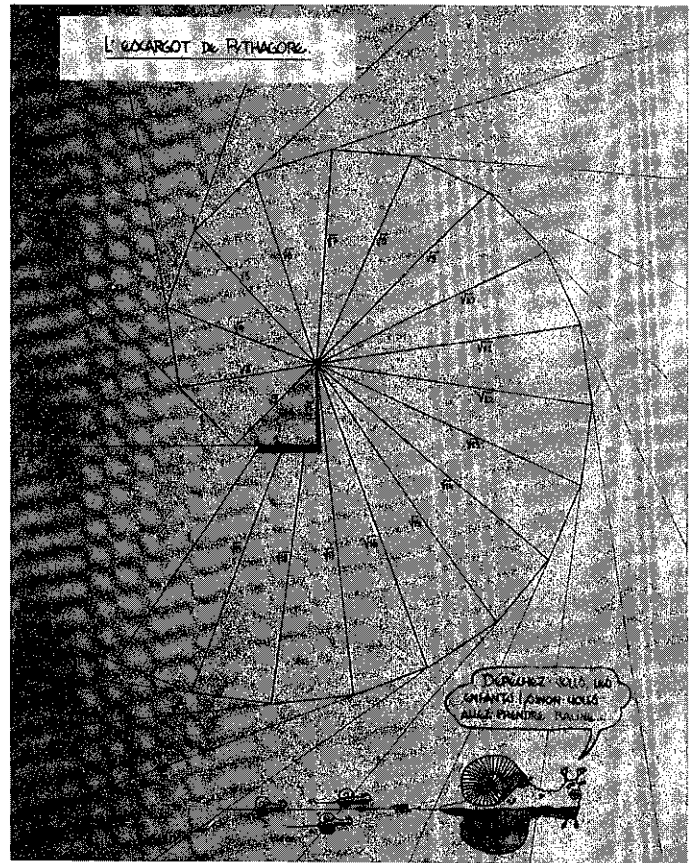
• Approche d'une démarche par induction (4-1)
le $k^{\text{ième}}$ nombre impair s'écrit $2 \times (k-1) + 1$

N.B. Précision du langage - différence ordinal-cardinal :
au départ, beaucoup d'élèves écrivent "k" le $k^{\text{ième}}$ nombre impair).

Prolongements

Cette exposition peut être exploitée à d'autres niveaux, si on n'exige pas des preuves systématiques.

Elle peut donner lieu à des vérifications, des calculs tant numériques qu'algébriques, une approche de la notion de variable (n), etc. ■



FICHE ELEVE

SUR LES TRACES DE PYTHAGORE...

A. **Album BD à lire** : (Ed. Magnard) - Pythagore de Samos.

B. **Exposition** : Constituer un dossier en répondant aux 12 questions suivantes associées aux 12 panneaux :

1. Ecrire la devise des Pythagoriciens.
2. Prouver algébriquement que :
 - la somme des deux naturels impairs est paire
 - x pair $\Leftrightarrow x^2$ pair
3. Prouver que le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire est égal à la somme de n premiers naturels.
4. Prouver que k^2 est égal à la somme des k premiers naturels impairs.
Prouver que la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs est égale à la somme de ces entiers.

5. Démontrer la relation dite de "Mon bon Monsieur !" (voir panneau 7,...)

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)^2$$

6. Chercher l'erreur et décrivez-la.

7. **Vérifier** la relation $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ à partir de quelques exemples (on peut utiliser les caquelettes).

8. On appelle P_0, P_1, P_2, P_3 les nombres pyramidaux

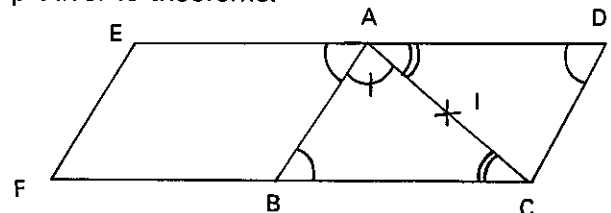
Compléter :

Nombres pyramidaux	P_0	P_1	P_2	$P_3 \dots P_{10} \dots P_n$
Valeurs	1	4	10	
Nombres à ajouter		3	6	

9. Construire le pentacle.

10. **Les angles d'un triangle.**

Utiliser symétrie centrale et translation pour prouver le théorème.



11. Rédiger la démonstration du théorème de Pythagore.

12. Construire l'escargot de Pythagore en donnant les mesures de tous les côtés.

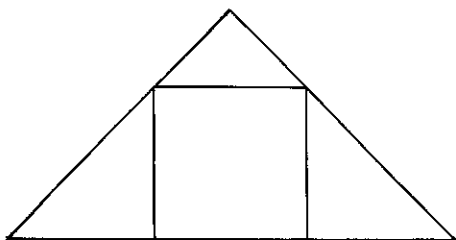
Yves OLIVIER - Blois

Tous les adhérents de l'Apmp qui lisent le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) sont au courant de la révolution télématique de l'association.

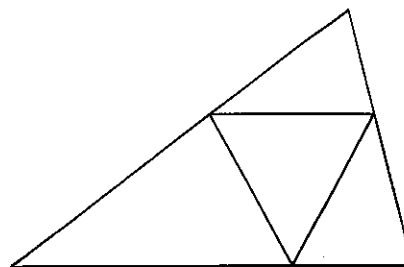
Le BGV n° 6 de Mars 86 vous dit tout sur la banque d'exercices pour le collège et la seconde que vous pouvez consulter si vous disposez d'un minitel (composez le 36.15.91.77 puis apmp).

En attendant que cette banque se constitue pour les classes de 1^{re} et Terminale voici le début d'une liste d'exercices recueillis ou proposés par Yves Olivier en liaison avec les nouveaux programmes de première (S et non S).

Et d'abord deux "solutions" à la question : comment inscrire dans un triangle :



un carré ?



un triangle équilatéral ?

GEOMETRIE ET ANALYSE EN 1^{re} S

- De tous les rectangles qui ont un périmètre donné, quel est celui qui a la plus petite diagonale ? La plus grande aire ?
- De tous les rectangles qui ont une aire donnée, quel est celui qui a la plus petite diagonale ? Le plus grand périmètre ?
- De tous les rectangles qui ont une diagonale donnée, quel est celui qui a le plus grand périmètre ? La plus grande aire ?
- Soit un rectangle, en le repliant en 4 dans le sens de la largeur, on obtient un parallépipède à section carrée sans base. En fixant le périmètre ou l'aire du rectangle de départ. Quel est celui qui donne le volume maximum.
- Quel patron de cône pouvez-vous découper dans une feuille de format 21 x 29,7 ayant le plus grand volume ? et dans une feuille carrée ?
- Sans calcul, pouvez-vous comparer à l'estime, le volume d'un cube et de la sphère inscrite (tgte aux 6 faces du cube) ? et leur aire ? Vérifier par le calcul. Et pour d'autres polyèdres...
- Soit O et A deux points distincts. Chercher le lieu des points M tels que M, A et M' sont alignés (M' désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle droit positif).
- Soit (C) un cercle, I un point et (D) une droite. Déterminer les segments dont le milieu est I et dont les extrémités sont respectivement sur le cercle et la droite. Discuter.
- Construire un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent à trois droites parallèles.
- Inscrire un triangle équilatéral dans un triangle donné.
- Inscrire un carré dans un triangle donné (un côté du carré étant inclus dans un côté du triangle).
- Inscrire un carré dans un demi-cercle donné (un côté du carré étant inclus dans le diamètre).
- Soit B et C deux points fixes d'un cercle et A un point variable de ce cercle. Quel est l'ensemble décrit par l'orthocentre du triangle (A,B,C) ?

14. Soit (A,B,C) un triangle tel que A et B sont fixes et C décrit une droite ou un cercle. Quels sont les ensembles décrits par le milieu de (B,C) , le milieu de (A,C) et le centre de gravité du triangle (A,B,C) ?
15. Construire un parallélogramme (A,B,C,D) sachant que les sommets A et B sont donnés et que les sommets C et D appartiennent à deux droites (D_1) et (D_2) données.
16. Construire les segments de longueur donnée joignant deux cercles (C) et (C') .
17. Construire un triangle (P,Q,R) , inscrit dans un triangle (A,B,C) à 3 angles aigus, de périmètre minimum.
18. Construire les cercles tangents à deux droites parallèles (D) et (D') et passant par un point A donné.
19. Construire les cercles du plan passant par deux points A et B et tangents à une droite donnée.
20. Soit (D) et (D') deux droites parallèles et (d) une direction.
Soit deux points A et B extérieurs à la bande de part et d'autre.
a) construire $M \in D$ et $M' \in D'$ tels que $(MM') // (d)$ et $AM = BM'$
b) construire $M \in D$ et $M' \in D'$ tels que $(MM') // (d)$ et $(AM) \perp (BM')$
c) construire $M \in D$ et $M' \in D'$ tels que $(MM') // (d)$ et $AM + MM' + M'B$ minimum
21. Soit (C) un cercle (D) une droite et A un point. Trouver les points $M \in (D)$ et $M' \in (C)$ tels que A milieu de (M,M') .
22. Soit (C) et (C') deux cercles et (D) une droite. Trouver les points $M \in (C)$ et $M' \in (C')$ tels que (D) médiatrice de (M,M') .
23. Soit (A,B,C) un triangle. Trouver le point M tel que $MA + MB + MC$ est minimum.

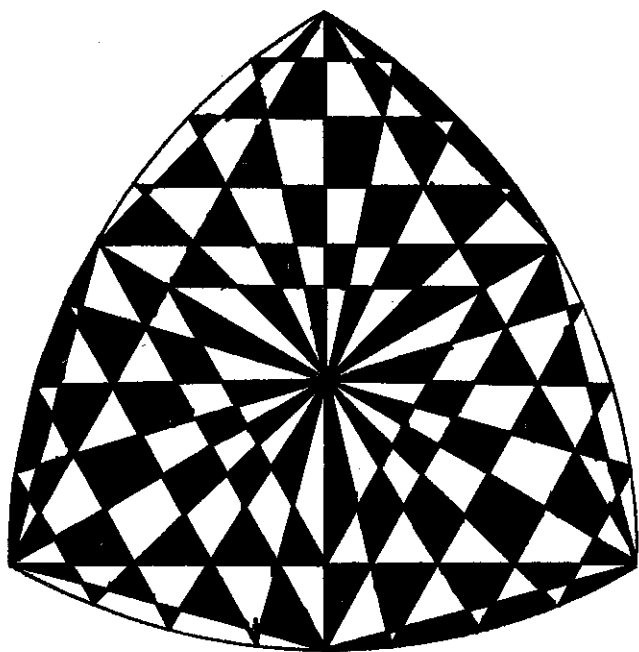
DEBUT DE BIBLIOGRAPHIE pour des activités en 1^{re}

Géométrie :

- Billard : Dimathème 2de. p. 246, 247.
- Matériel à Polyèdres du PLOT : n° 1 et n° 2
- Polyèdres dans l'espace - Dossier du PLOT - 1984.
- Bulletin Inter-IREM n° 23 sur l'enseignement de la géométrie.
- Réseaux et pavages. Matériel PLOT - 1985.
- Suites de nombres et suites de figures. IREM d'Orléans, Brochure n° 15.
- Quelques pb. de récapitulation en 1se. Magnard, (Boudot, Audirac) (p. 66, 67, 86, 130, 244 à 250).
- Articles de Audibert. Bulletin Apmep n° 349, p. 349 à 373, Juin 1985.
Padilla, Bulletin Apmep n° 350, p. 672 à 682, Sept. 1985.
- Problèmes chocs dans PLOT n° 27 et suivants.
- Problèmes des puzzles et découpages : PLOT n° 27.
- Réflexions sur l'ensemble de la géométrie dans le compte rendu de la X^e rencontre GEDEOP. Brochure IREM d'Orléans, 1981.
- Calcul de longueurs en géométrie plane in Maths en 2nde. IREM de Paris Nord, Juin 1984.
- Thèmes en 2nde. Collection Inter-IREM n° 1, 1981, (IREM d'Orléans Polyèdre p. 126 à 139).

Analyse :

- Suite de figures et de nombres. Brochure n° 15, IREM d'Orléans.
- Article de Houchart et Rouche. Bulletin Apmep n° 348, p. 271 à 290, Avril 1985.
- Article du GEM de Louvain, PLOT n° 33, p. 3 à 10.
- Pente, Hauteur et Surface, CUEEP de Lille. D. Poisson, Mai 1978. Thèmes en 2nde déjà cité.
- Quelles activités pour quels apprentissages. Collection Inter-IREM n° 3, fonctions p. 199. (Dans cette même brochure des descriptifs de travaux en ateliers p. 237 à 239).
- Fiches d'activités du CUEEP, Mai 1978, n° 500 à 512.
- Résolution approchée d'équations numériques, IREM de Rennes, 1981.
- Maxi Mini de Cuculière, IREM St Denis (93), septembre 1974.
- Mathématiques d'un point de vue algorithmique, Engel, Ed. Cedic
- Ex. 37, 38, 39 p. 110 - Hachette 1se.
- Les maths au jour le jour de J. Lubczanski. Ed. Cedic - 1985.
- Un peu de tout pour faire des maths, Nicole Picard et M.A. Girodet, Cedic - 1985.
- Technologie et Mathématiques en F. Collection Inter-IREM n° 2 - 1982. ■



REFLEXIONS A PROPOS DE SAINTE MOYENNE

Alain ROBERT - Ingré

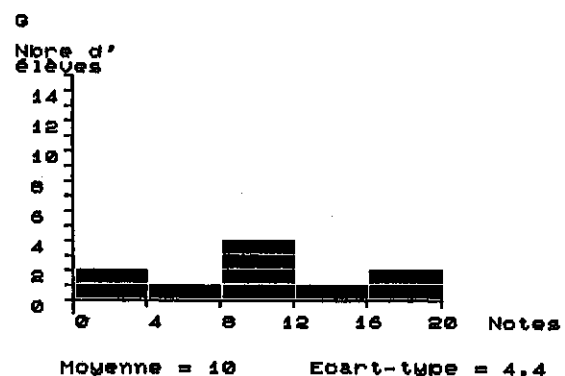
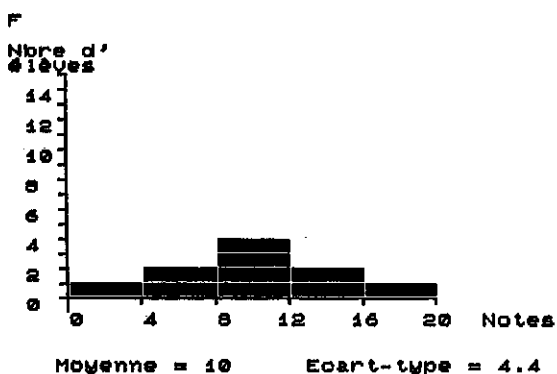
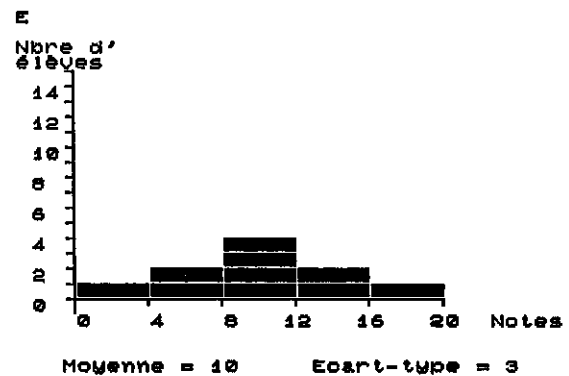
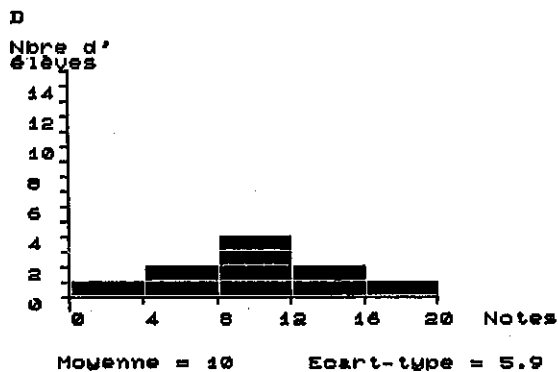
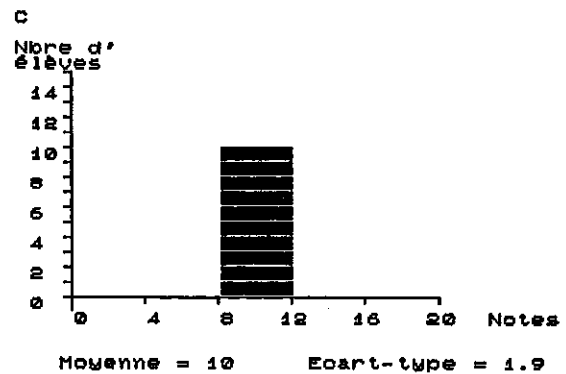
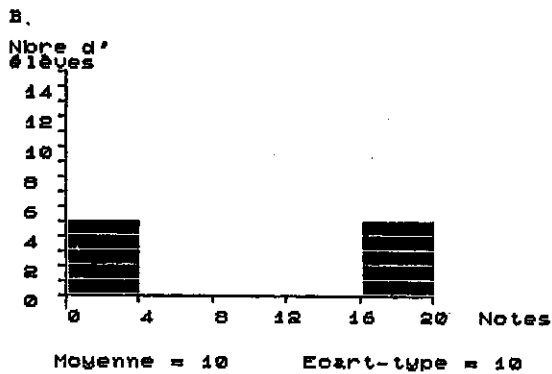
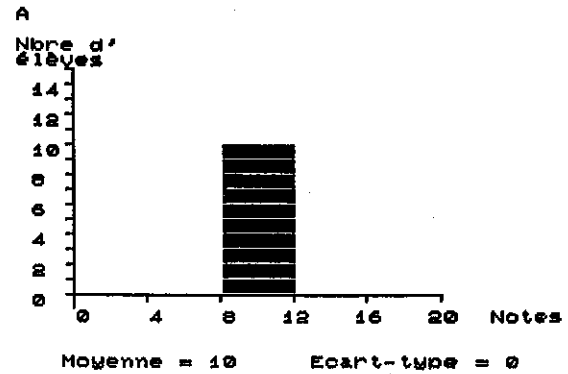
Quelques réflexions iconoclastes et perfides à propos de cette sacro-sainte moyenne et un premier pas que vous pouvez faire franchir à vos élèves dès le collège vers les statistiques et un autre saint : saint écart-type.

Et pour commencer, à vous de faire ce premier pas.

Voici sept distributions de 10 notes.

A votre avis, quelle est la meilleure classe ?
la moins bonne ? le meilleur enseignant ?

SIMULATIONS MOYENNES = 10



Depuis l'aube de la pédagogie - ou presque - enseignants, élèves ou parents d'élèves ont l'œil fixé sur "LA MOYENNE", comme d'autres en d'autres circonstances observaient une certaine "ligne bleue"... Et pourtant...

Le tableau ci-dessous détaille sept "classes" ayant la même moyenne 10 (valeur symbolique s'il en est). Une simple observation des notes montre qu'il s'agit en réalité de classes très différentes.

Comment montrer ces différences autrement que par la présentation du tableau de notes, et de façon plus synthétique ?

La représentation graphique, sous forme d'histogrammes, peut être un élément de réponse à ce problème. Il faut toutefois se méfier de l'aspect réducteur de ce type de présentation. Par exemple, les classes D, E et F, notablement différentes au niveau des notes apparaissent semblables au plan graphique. A l'inverse, les classes F et G, très proches en ce qui concerne les résultats semblent graphiquement très différentes. Une solution, pour résoudre cette nouvelle difficulté, peut être de calculer l'écart-type (qui correspond à la dispersion des notes) pour chacune de ces classes. Cependant, les reproches que l'on peut faire à la moyenne ou à l'histogramme sont aussi valables pour l'écart-type.

Par exemple on pourra étudier deux autres ensembles de notes :

H = 0,1 - 4,1 - 4,1 - 8,1 - 8,1 - 8,1 - 8,1 - 12,1 - 12,1 - 16,1

I = 3,9 - 7,9 - 7,9 - 11,9 - 11,9 - 11,9 - 11,9 - 15,9 - 15,9 - 19,9

qui donnent le même écart-type et le même histogramme, avec cependant des moyennes très différentes (8,1 et 11,9).

Problème : pourriez-vous trouver deux distributions de 10 notes donnant la même moyenne, le même écart-type et le même histogramme ?

Pour pouvoir comparer ces différentes classes, il apparaît donc nécessaire de travailler en parallèle sur plusieurs paramètres (moyenne, écart-type et histogramme). Il faudra bien sûr réfléchir sur le nombre de paramètres à présenter (un trop grand nombre donnerait sans doute une trop grande complexité et de ce fait une précision illusoire) ainsi que sur les limites de ce type de présentation.

Le programme donné en annexe permettra d'obtenir sur micro-ordinateur, pour une classe réelle, ces différents paramètres aussi rapidement que si l'on calculait une simple moyenne.

Avec les élèves, on pourra jouer sur le fait que les notes appartiennent à leur vécu scolaire quotidien pour faire - à partir de leurs résultats - un travail sur la présentation synthétique de tableaux numériques. S'il est hors de question au Collège de faire la théorie de l'écart-type, on pourra cependant leur faire comprendre ce paramètre en partant des classes A, B et C où l'écart à la moyenne est le même pour toutes les notes. ■

	CLASSE A	CLASSE B	CLASSE C	CLASSE D	CLASSE E	CLASSE F	CLASSE G
NOTE 1	10	0	8.1	0.1	3.9	2	3.2
NOTE 2	10	0	8.1	4.1	7.9	6	3.5
NOTE 3	10	0	8.1	4.1	7.9	6	7
NOTE 4	10	0	8.1	8.1	10	9	9
NOTE 5	10	0	8.1	8.1	10	9	10
NOTE 6	10	20	11.9	11.9	10	11	10
NOTE 7	10	20	11.9	11.9	10	11	11
NOTE 8	10	20	11.9	15.9	12.1	14	13
NOTE 9	10	20	11.9	15.9	12.1	14	16.5
NOTE 10	10	20	11.9	19.9	16.1	18	16.8

LISTING

```

1 REM***** MOYENNES *****
  * Programme Alain ROBERT *
  *****
5 SCREEN 3,0,0
30-CLS
40 LOCATE 12,9:ATTRB 1,1:PRINT"MOYENNES"
:ATTRB0,0:LOCATE30,22:PRINT"Pgm A.R."
41 COLOR 2:LOCATE1,17:PRINT"Appuyez sur
une touche pour commencer":FOR N=0 TO200
:NEXTN
42 A$=INKEY$:IFA$=""THEN 42
43 COLOR 3:CONSOLE 0:CLS
45 LOCATE 5,5:PRINT"L'ordinateur vous de
mande en premier de lui indiquer la clas
se sur laquelle vousvoulez travailler. V
ous disposez la d'une ligne qui sera
reprise par l'imprimante";
46 PRINT"(Si celle-ci est racordee et en
marche)"
47 PRINT,, "L'ordinateur vous demandera
ensuite les notes une a une. Une petite
musique indique une erreur ( 0 a la
place de 0, note > 20, etc ).Vous devez
alors retaper la note."
48 PRINT,, "En fin de travail. tapez M"
50 COLOR 2:LOCATE1,23:PRINT"Appuyez sur
une touche pour commencer":FORN=0 TO 200
:NEXTN
60 A$=INKEY$:IFA$="" THEN 60
70 COLOR 3:CONSOLE0:CLS
73 CLEAR200,,8
75 DEFGR$(1)=255,255,255,255,255,255,255
.0
76 DEFGR$(2)=31.1.1.1.1,1,1.1
77 DEFGR$(3)=255,1.1.1,0.0,0.0
78 DEFGR$(4)=127.127.127,127,127,127,127
.0
79 DEFGR$(5)=255,0.0.0.0.0,0.0
80 X$=GR$(4)+GR$(1)+GR$(1)+GR$(1)+GR$(1)
100 REM: trace
120 LOCATE2,19:PRINTGR$(5);GR$(5);:FORN=
1TO5:PRINTGR$(5);GR$(5);GR$(5);GR$(5);GR
$(3)::NEXTN
140 LOCATE3,20:PRINT" 0 4 8 12
15 20 Notes"
150 FORN=19 TO5 STEP -2
160 LOCATE0,N:PRINT19-N:NEXTN
170 FORN=4TO19:LOCATE3,N:PRINTGR$(2):NEX
TN
180 LOCATE0,2:PRINT"Nbre d'":LOCATE0,3:P
RINT"eleves"
200 REM remplissage
205 N=0:A=0:C=0
210 DIM E(5)
215 CONSOLE 22
220 LOCATE0,22:INPUT"CLASSE ";C$
230 LOCATE0,0:PRINTC$:LOCATE0,22:PRINT"

```

LOCATE25,3

```

LOCATE25,3
235 LOCATE25,3:PRINT"Note ";N+1:"="?:LOC
ATE24,4:PRINT" ":LOCATE25,4:INPUT
B$
240 IFB$="M" OR B$="m" THEN 400
245 R=0
250 L=LEN(B$):FORX=1 TO L:Z=ASC(MID$(B$,
X,1)):IF Z<46 OR Z>5
7 OR Z=47 THEN R=R+1 ELSE R=R:NEXTX
260 IF R>0 THEN PLAY"DQREDO":GOTO 235
270 A1=VAL(B$):IFA1>20 THEN PLAY"REDORE"
:GOTO235
280 A=A+A1:C=C+A1^2:N=N+1
290 X=1+INT(A1/4):IFX=6 THEN X=5
300 E(X)=E(X)+1
310 LOCATE5*X-1,19-E(X):PRINTX$
330 GOTO235
400 M=0.1*INT((A*10+0.5)/N)
410 C=0.1*INT(0.5+10*(SQR(C/N-(A/N)^2))
420 LOCATE 25,3:PRINT" ":LOCAT
E24,4:PRINT" ":LOCATE 25.4:PRINT
"
430 COLOR 2:LOCATE0,23:PRINT" Moyenne
=";M
440 LOCATE 20,23:PRINT"Ecart-type =";C
500 REM IMPRESSION
502 ON ERROR GOTO 800
510 OPEN"0",2,"LPRT:(40)
520 PRINT#2,"-----
-----"
530 PRINT#2,C$
549 PRINT#2,""
550 PRINT#2," Nbre d'":PRINT#2," eleves"
560 FORN=15 TO 1 STEP-1
570 IFINT(N/2)=N/2 THEN PRINT#2,TAB(0);N
;
580 PRINT#2,TAB(4);"I";
590 FORH=1 TO 5
600 IF E(H)>N-1 THEN PRINT#2,TAB(5*H);"0
0000";
610 NEXTH
700 NEXTN
710 PRINT#2,TAB(1):"0 -":"I":;FOR N=0 TO
24:PRINT#2,"-":NEXT N:PRINT#2.">Notes"
720 PRINT#2." I0 04 08 12 15
20"
730 PRINT#2.""
740 PRINT#2." Moyenne =";M;" Ecart-ty
pe =";C
750 FORN=0 TO 5:PRINT#2,"":NEXTN
760 CLOSE #2
800 COLOR 1:LOCATE0,24:PRINT"APPUYEZ SUR
UNE TOUCHE. POUR CONTINUER":LOCATE34,19,
0
890 A$=INKEY$:IFA$=""THEN 890
900 RUN70

```

NOTA : SI VOUS POSSEDEZ UNE IMPRIMANTE QUI ACCEPTE L'ORDRE "SCREENPRINT" ET QUE VOUS N'ETES PAS PRESSES, VOUS POUVEZ MODIFIER CE PROGRAMME EN AJOUTANT UNE LIGNE :

515 SCREENPRINT:GOTO 760

DANS CE CAS, LES LIGNES 520 A 750 NE SONT PLUS UTILISEES ET VOUS OBTENEZ UN GRAPHIQUE MIEUX PRESENTE

M05

T07

LA TRANSFORMATION COMPLEXE $z \rightarrow z^2$

Gérard CHAUMEIL - Crosne

Vous trouverez dans le supplément au n° 62 du bulletin du CNRS (images des mathématiques) un article d'Adrien Douady dont nous reproduisons ci-contre l'encadré, style humour noir.

Gérard Chaumeil, stagiaire CPR, nous a fait parvenir une activité pour la classe terminale sur le même sujet : $z \rightarrow z^2$! Peut-on plus simple et plus actuel puisque l'itération de ces polynômes complexes est utilisée actuellement pour modéliser l'évolution autonome de systèmes mécaniques, physiques, chimiques, biologiques, économiques... Et ces itérations permettent de définir ensembles de Julia et ensembles de Mandelbrot.

- Donnez les formules analytiques de f .
 Calculez $f(0)$; $f(1)$; $f(i)$; $f(1+i)$; $f(1-i)$; $f(-1+i)$;
 f est-elle injective ? surjective ?
 Calculez $f(\bar{z})$ et $f(-z)$ et ($z \in \mathbb{C}$) ; concluez.
- Soit $z \in \mathbb{C}$; soit m le point du plan d'affixe z et M le point du plan d'affixe $f(z)$.
 On note $\theta = \text{mes}(\text{Ox}, \text{Om})$; $\rho = \text{mes}(\text{Ox}, \text{OM})$;
 $r = \|\text{Om}\|$; $R = \|\text{OM}\|$.
 (Ox est l'axe des abscisses du repère du plan complexe).
 Calculez R et ρ en fonction de r et θ .
 Construisez les points $m_1(1+i)$; $m_2(2+i)$; $m_3(1+2i)$
 et leurs images dans le plan complexe.

- Déterminez l'image d'un cercle de centre O ; d'une droite passant par O.

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon $r > 0$.

$$A_1 = \{ M \in \mathcal{C} ; 0 \leq \text{mes}(\text{Ox}, \text{OM}) \leq \frac{\pi}{4} \};$$

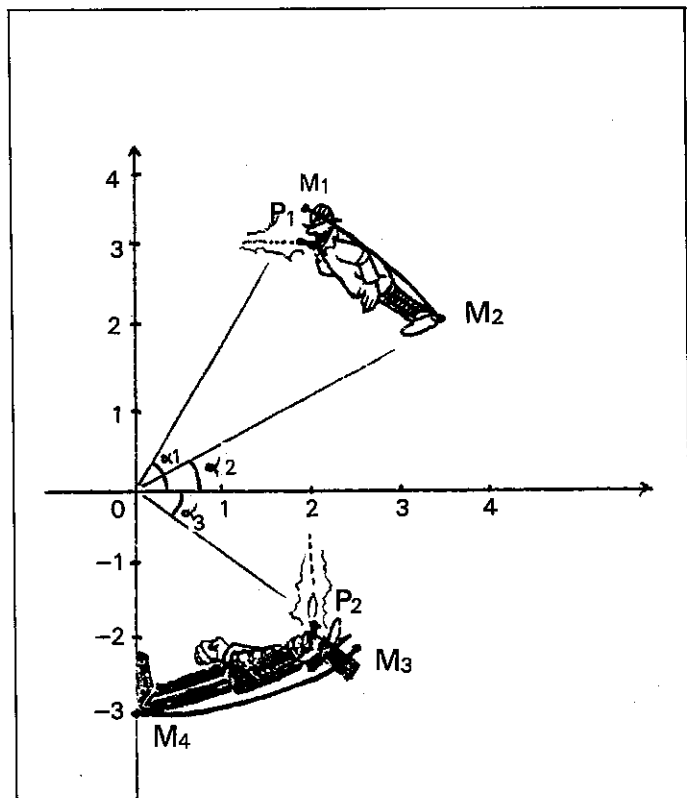
$$A_2 = \{ M \in \mathcal{C} , \frac{\pi}{4} \leq \text{mes}(\text{Ox}, \text{Om}) \leq \frac{\pi}{2} \};$$

$$A_3 = \{ M \in \mathcal{C} , \frac{\pi}{2} \leq \text{mes}(\text{Ox}, \text{OM}) \leq \frac{3\pi}{2} \};$$

$$\dots A_8 = \{ M \in \mathcal{C} , \frac{7\pi}{4} \leq \text{mes}(\text{Ox}, \text{Om}) \leq 2\pi \}.$$

Déterminez $f(A_1)$; $f(A_2)$; ... ; $f(A_8)$.

- Déterminez l'image d'une droite d'équation $x = k$;
 d'une droite d'équation $y =$
 Vérifiez que les courbes ainsi obtenues , si elles sont sécantes , se coupent à angle droit.
 Représentez graphiquement les courbes images des droites $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $y = 1$; $y = 2$; $y = 3$;
 $x = 0$; $y = 0$. ■

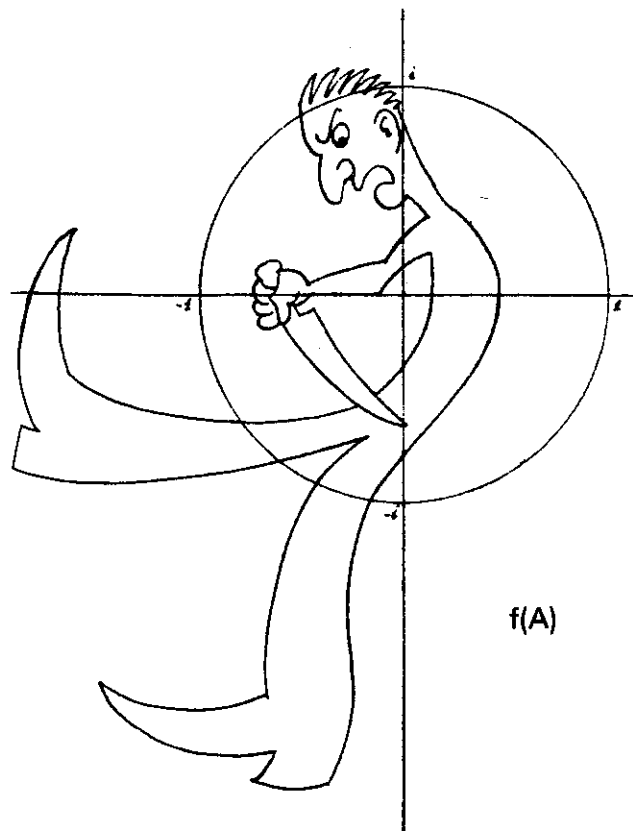


$\widehat{M_1 M_2}$ est un arc de cercle de rayon 4.
 $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$; $P_1(2;3)$.
 $\widehat{M_3 M_4}$ est un arc de cercle de rayon 3.
 $\alpha_3 = \frac{\pi}{4}$; $P_2(2;-2)$.

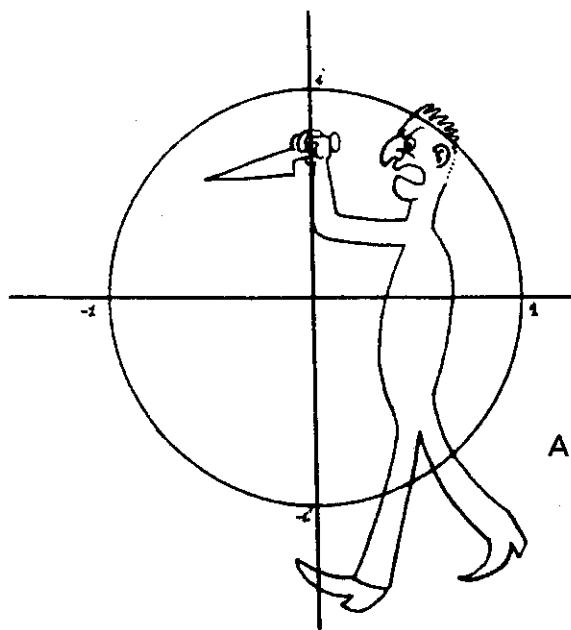
*Le bandit tire "horizontalement" ;
 le gendarme "verticalement".
 Visiblement le bandit se fait désarmer par le gendarme.
 Par contre, il tire dans le vide...
 ceci, avant la transformation du plan
 par $f : z \rightarrow z^2$.
 Que se passe-t-il APRÈS ?*

LA TRANSFORMATION $z \rightarrow z^2$

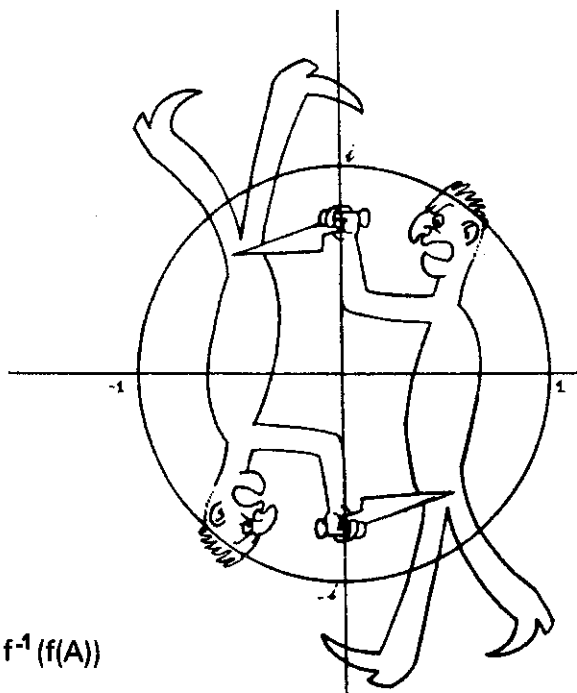
Un nombre complexe z est représenté par un point du plan, lui-même repéré par ses coordonnées polaires p et θ . On dit que p est le **module** de z (on écrit $|z| = p$), et que θ est son **argument**. La transformation $f_0 : z \rightarrow z^2$ a pour effet d'élever le module au carré et de doubler l'argument.



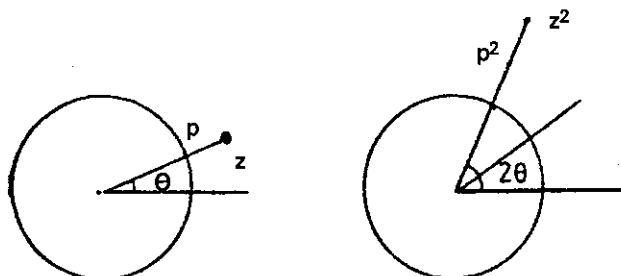
$f(A)$



A



$f^{-1}(f(A))$



Cette transformation n'est pas injective : deux points symétriques par rapport à O ont même image. Si on part d'une figure quelconque A , l'ensemble $f^{-1}(f(A))$ est la réunion de A et de son symétrique par rapport à O .

En dehors de O , la transformation est **conforme** : si deux courbes se coupent suivant un certain angle, leurs images se coupent suivant le même angle. Au voisinage de chaque point, on peut assimiler la transformation à une similitude.

Le fait de remplacer p par p^2 éloigne de l'origine les points pour lesquels $p > 1$, mais au contraire en rapproche les points pour lesquels $p < 1$. Partons d'un point z_0 et posons $z_n = f^n(z_0)$. Si $|z_0| > 1$, la suite z_n tend vers l'infini (et très très vite). Si $|z_0| < 1$, elle tend vers O . Si $|z_0| = 1$, elle reste sur le cercle unité.

Nous continuons ici, sous forme de fiches, la présentation des nouveaux programmes de mathématiques de l'école élémentaire au lycée en France.

Nous les accompagnerons régulièrement des commentaires et propositions de mise en œuvre faits par les équipes de l'APMEP qui travaillent sur le sujet inépuisable des nouveaux ou futurs programmes.

Dans ce numéro les programmes de 6^e - 5^e et les derniers commentaires inspirés des travaux de la COPREM.

	CLASSE DE SIXIEME	CLASSE DE CINQUIEME
GRANDEURS ET MESURES	Périmètre et aire du carré, du rectangle du disque Longueur du cercle Volume du parallélépipède rectangle Unités usuelles : longueur, aire, volume, angle	Aire du parallélogramme, du triangle, Aire et volume du cylindre de révolution, des prismes droits Somme des angles d'un triangle Unités usuelles : durées
REPERAGE, DISTANCES ET ANGLES	Repérage sur une droite graduée par les nombres relatifs Repérage dans un plan quadrillé (coordonnées)	
CONFIGURATIONS CONSTRUCTIONS ET TRANSFORMATIONS	Parallélépipède rectangle Rectangle, losange Triangle, triangle isocèle Cercle Transformation de figures par symétrie par rapport à une droite	Prismes droits, cylindre de révolution Parallélogramme Triangle : les médiatrices sont concourantes Transformation de figures par symétrie par rapport à un point
NOMBRES ET CALCULS	Ecriture fractionnaire des nombres décimaux positifs et opérations +, -, × Quotient de deux décimaux positifs Approximations de ce quotient Critères de divisibilité par 2, 3, 6, 9 Troncature et arrondi. Rangement de décimaux positifs	Comparaison et addition de deux nombres positifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire Egalité $k(a + b) = ka + kb$ pour les décimaux positifs Comparaison, addition et soustraction de nombres relatifs en écriture décimale Equations numériques $a + x = b$ ou $ax = b$ ($a \neq 0$)
REPRESENTATION ET ORGANISATION DE DONNEES	Lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques	
FONCTIONS NUMERIQUES	Multiplication par une fraction Application d'un pourcentage	Vitesse moyenne Calcul d'un pourcentage, d'une fréquence, d'un taux
	Changement d'unités de longueur, d'aire et de volume Echelle d'une carte ; changements d'échelle. Quatrième proportionnelle	

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES, DES METHODES ET DES COMPETENCES EXIGIBLES DES ELEVES EN 6^e

Les travaux mathématiques seront l'occasion de familiariser les élèves avec un nombre limité de notations courantes, telles que l'appartenance ou la non appartenance d'un point M à une droite D ($M \in D$, $M \notin D$), la longueur AB d'un segment d'extrémités A et B , l'angle \widehat{AOB} , et éventuellement le segment $[AB]$, la droite (AB) .

Les symboles C , \cap , \cup , sont hors programme, ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations.

1. TRAVAUX GEOMETRIQUES

De l'école élémentaire, les élèves apportent une expérience des figures les plus usuelles. **L'objectif fondamental en sixième est encore la description et le tracé de figures simples.** Au terme d'un processus progressif, le champ des figures étudiées est enrichi, le vocabulaire est précisé et les connaissances sont réorganisées à l'aide de nouveaux outils, notamment la **symétrie orthogonale par rapport à une droite** (symétrie axiale).

Les travaux géométriques prennent appui sur **l'usage des instruments de dessin et de mesure** et sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Ils constituent en particulier le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures) ou de notions en cours d'acquisition (repérage, proportionnalité).

Figures planes et aires planes

Les compétences exigibles des élèves sont indiquées en italique

Reproduction de figures planes simples

Il est conseillé l'usage du papier calque, du papier quadrillé, du papier « pointé » à réseau triangulaire.

Il s'agit de développer les connaissances du cours moyen en vue de :

- compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure ou de dessin (règle graduée ou non, compas, équerre, rapporteur) ;
- *Sur papier blanc et sans méthode imposée :*
- *reporter une longueur ;*
- *reproduire un angle, un arc de cercle de centre donné ;*
- *tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée.*
- tirer parti des travaux pour préciser le vocabulaire, en particulier celui concernant les figures planes ;
- *Utiliser correctement, dans une situation donnée, le vocabulaire suivant :*
- *droite, cercle, disque, arc de cercle, angle, droites perpendiculaires, droites parallèles, demi-droite, segment, milieu.*
- reprendre les tracés fondamentaux (droites perpendiculaires, droites parallèles).

Les travaux de reproduction porteront sur la réalisation :

- soit d'une copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin ;
- soit d'un dessin à partir de données, et notamment de données numériques.

On profitera de ces travaux pour introduire prudemment l'usage de lettres pour désigner les points d'une figure.

- *Décrire, tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes : triangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, losange, rectangle, carré, cercle.*
- Reconnaître ces figures dans un environnement plus complexe.*

Les travaux développeront les capacités à choisir les instruments adaptés à une situation donnée. Ils faciliteront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant, par exemple, sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme. On prendra garde, à ce sujet, de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme des évidences.

Comparaison d'aires planes

Il s'agit de déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements.

Des travaux permettront de retenir, sous forme d'images mentales, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle.

- *Évaluer, à partir du rectangle, l'aire d'un triangle rectangle.*

Parallépipède rectangle

L'objectif est d'apprendre à voir dans l'espace.

L'usage d'une perspective (cavalière) et la fabrication d'un patron sont complémentaires ; à l'aide du patron, le lien sera établi avec le rectangle.

- *Représenter un parallépipède rectangle en perspective.*
- *Décrire, fabriquer un parallépipède rectangle de dimensions données.*

Des travaux permettront de retenir, sous la forme d'images mentales, des situations d'orthogonalité et de parallélisme extraites du parallépipède rectangle en tant qu'objet de l'espace.

Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite

Construction d'images, mise en évidence de conservations

L'effort portera d'abord sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageront de façon progressive les propriétés conservées par la symétrie axiale, ces propriétés prenant alors naturellement le relais dans les programmes de constructions.

- *Construire la symétrie d'un point, d'une droite, d'un segment, d'une ligne polygonale, d'un cercle, que l'axe de la symétrie coupe ou non la figure.*
- *Tracer le ou les axes de symétrie des figures suivantes : triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, rectangle, carré.*

La symétrie axiale n'a ainsi, à aucun moment, à être présentée comme une application du plan dans lui-même. Suivant les cas, elle apparaîtra sous la forme :

- de l'action d'une symétrie axiale donnée sur une figure
- de la présence d'un axe de symétrie dans une figure, c'est-à-dire d'une symétrie axiale la conservant.

Construction de figures symétriques élémentaires et énoncé de leurs propriétés.

Ces constructions partent de notions acquises à l'école élémentaire et aboutissent à des définitions plus élaborées et plus efficaces : par exemple on reconnaît qu'un triangle est isocèle à ce qu'il possède un axe de symétrie.

- *Construire, par une méthode non imposée et sur papier blanc :*
- *la médiatrice d'un segment,*
- *la bissectrice d'un angle.*
- *Utiliser la symétrie axiale pour construire : un triangle isocèle, un losange, un rectangle, un carré.*
- *Relier les propriétés de la symétrie axiale à celles des figures du programme.*

Des activités permettront, sous la direction de l'enseignant, de mettre en œuvre de brèves séquences déductives ; ici aussi on prendra garde de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.

Les élèves seront initiés à quelques propriétés caractéristiques de figures, mais ces propriétés ne sont pas exigibles ; en outre elles seront formulées à l'aide de deux énoncés séparés (par exemple : si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu ; si dans un quadrilatère les diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu, alors le quadrilatère est un losange).

2. TRAVAUX NUMÉRIQUES

La résolution de problèmes concrets constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme ; l'activité de résolution ne fait pas l'objet d'une rubrique particulière puisque, constamment, elle doit sous-tendre l'ensemble des travaux numériques.

Outre leur intérêt propre, ces problèmes doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète une activité numérique et de mieux saisir le sens des opérations et des équations figurant au programme. Il convient donc de ne pas multiplier les activités de pure technique.

Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul sous différentes formes : **le calcul mental, le calcul à la main** (dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), **l'emploi d'une calculatrice**.

Techniques opératoires - calcul approché

Les activités consolideront le sens et les techniques d'exécution des opérations $+$, $-$, \times sur les nombres décimaux. Elles compléteront les savoir-faire concernant la division euclidienne, cette opération n'étant pas un objectif du cours moyen ; en particulier elles permettront de lier la division à des problèmes d'encadrement d'un entier par des multiples d'un autre entier, et d'acquérir une bonne maîtrise de la technique manuelle de la division avec reste pour des nombres entiers simples.

Les procédés de calcul approché trouveront un développement naturel dans le calcul mental et dans l'usage des calculatrices.

- *Les capacités exigibles portent sur les trois formes de calcul mentionnées ci-dessus.*

- *Sans calculatrice :*

• *effectuer des additions, soustractions, multiplications sur des nombres décimaux courants ;*

• *diviser un décimal par 10, 100, 1000 ou par 0, 1, 0,01, 0,001.*

• *effectuer la division avec reste d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres.*

- *Prendre la troncature ou l'arrondi à l'unité.*

- *Proposer des ordres de grandeur de deux nombres et les utiliser pour donner un ordre de grandeur de la somme de ces nombres et, éventuellement, pour contrôler un calcul sur machine.*

Écriture fractionnaire de décimaux

Les travaux conduiront à l'écriture d'un nombre décimal sous diverses formes fractionnaires : initiation à la manipulation des fractions. Les techniques des opérations $+$, $-$, \times ne seront exposées que dans le cas d'écritures fractionnaires ayant pour dénominateurs des puissances de dix, et cela en liaison étroite avec les techniques opératoires en écriture décimale.

Sur des nombres décimaux courants :

- *passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa ;*

- *effectuer des opérations techniquement simples en écriture fractionnaire, les dénominateurs étant des puissances de dix.*

Les critères de divisibilité, que l'on ne justifiera pas, s'appliqueront à la simplification d'écritures fractionnaires et à des exercices de calcul mental.

Quotient de deux décimaux

Il s'agit ici d'un simple jalon vers un élargissement des opérations. Dans ce paragraphe, on travaille uniquement sur des exemples numériques et au travers de problèmes. Ces travaux dégagent et utilisent les deux idées suivantes :

- le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres décimaux est un nombre qui multiplié par b donne a ;

- *Avec une calculatrice : donner une approximation décimale d'un quotient de deux décimaux.*

- on ne change pas le quotient quand on multiplie a et b par un même nombre non nul.

La multiplication d'un nombre décimal par un quotient intervient, en particulier, dans des problèmes de proportionnalité.

- *Sans calculatrice : multiplier un décimal par $\frac{a}{b}$ (a et b entiers) dans le cas d'une opération techniquement simple.*

- *Avec une calculatrice : donner des approximations décimales du produit d'un décimal par $\frac{a}{b}$ (a et b entiers).*

Initiation aux écritures littérales

Il s'agit, dans des situations concrètes, de schématiser un calcul (périmètre, aire...) en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques.

- *Appliquer les formules littérales au cercle et au rectangle.*

Rangement de nombres

Les travaux se limiteront à une pratique sur les nombres en écriture décimale.

- *Ranger des nombres courants en écriture décimale.*

Equations

Certains problèmes concrets se traduisent par la recherche d'un élément manquant dans une addition ou dans une multiplication : c'est ce qu'on appelle une équation, mais il n'est pas nécessaire de désigner par une lettre le nombre manquant.

- *Résoudre une équation du type $12,8 + \square = 53,1$*

- *Résoudre une équation du type $23 \times \square = 471,5$*

La résolution des équations du type $\frac{2,05}{\square} = 8,2$ n'est pas exigible des élèves.

Nombres relatifs - repérage

Les travaux proposeront des exemples variés de situations nécessitant l'introduction de « nouveaux nombres ». Les règles d'addition ne sont pas au programme.

- *Graduer régulièrement une droite*

- *Sur une droite graduée :*

• *placer un point dont l'abscisse est un entier relatif ;*

• *lire ou encadrer l'abscisse d'un point suivant que cette abscisse est, ou non, un entier relatif.*

- *Dans le plan en repère orthogonal :*

• *placer un point dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs ;*

• *lire les coordonnées (entiers relatifs) d'un point.*

3. ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES - FONCTIONS

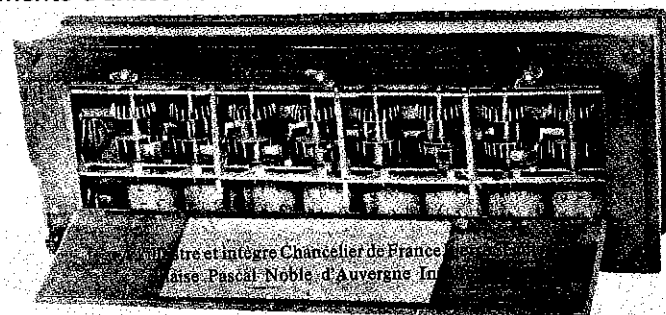
Cette rubrique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques. Ces travaux ne peuvent se concevoir qu'à partir de situations concrètes ; ils pourront en particulier faire référence à l'enseignement des autres disciplines et aux six thèmes transversaux figurant au programme : la consommation, le développement, l'environnement et le patrimoine, l'information, la sécurité, la vie et la santé.

Certains travaux conduiront à décrire des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que « en fonction de », « est fonction de » seront utilisées.

- *Appliquer un taux de pourcentage.*

- *Effectuer, éventuellement avec une calculatrice, des calculs sur les mesures de grandeurs figurant au programme.*

- *Effectuer, pour les longueurs et les aires, des changements d'unités de mesure. ■*



II Factorielles

A) Multiplication

$3 \rightarrow$ écriture 01
 $\times 6 \rightarrow$ dans la +11
 $18 \rightarrow$ table 12

Une multiplication se traduit dans le code de la table par une addition ligne par ligne.

Pour calculer les factorielles, il suffit d'additionner colonne par colonne, c'est à dire cumuler.

2!	2	$\rightarrow 1$	5!	1
3!	2x3	$\rightarrow 1+0=11$		+ 01
4!	2x3x4	$\rightarrow 1+0+2=31$		+ 2
5!	2x3x4x5	$\rightarrow 1+0+2+0=311$		+ 0 0 1
				3 1 1

On obtient ainsi un autre tableau.

2	3	5	7	11	13	17
1!	0	0	0	0	0	0
2!	1	0	0	0	0	0
3!	1	1	0	0	0	0
4!	3	1	0	0	0	0
5!	3	1	1	0	0	0
6!	4	2	1	0	0	0
7!	4	2	1	1	0	0
8!	7	2	1	1	0	0
9!	7	4	1	1	0	0
10!	8	4	2	1	0	0
11!	8	4	2	1	1	0
12!	10	5	2	1	1	0
13!	10	5	2	1	1	1

On peut voir que dans la colonne du 2 il n'y a que des couples de chiffres. Dans la colonne du 3 il n'y a que des triplets.

Peut-on trouver un moyen qui nous permette sans regarder la table de trouver un nombre factoriel ?

Ce tableau contient un algorithme. Trouver-le.

On ne prend dans les couples qu'un seul des deux chiffres

0	1
3	2
4	1
7	3
8	1
8	2
10	1
11	4
15	1
16	2
18	1
19	1

On utilise la différence qu'il y a entre chaque chiffre.

On retourne ainsi le même algorithme que page 2.

Trouver les règles pour les colonnes du 3, 5, 7, 11 etc...

B) Factorielles doubles.

On appellera factorielles doubles le produit des factorielles.

1!	0	0	0	0	0	0	Δ_0	Δ_1	Δ_2
1!2!	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1!2!3!	2	1	0	0	0	0	0	1	3
1!2!3!4!	5	2	0	0	0	0	4	4	3
1!2!3!4!5!	8	3	1	0	0	0	8	8	4
1!2!3!4!5!6!	12	5	2	0	0	0	15	7	3
...	16	7	3	1	0	0	23	8	1
...	23	9	4	2	0	0	33	10	2
...	30	13	5	3	0	0	44	11	1
...							55	15	1
							75	16	2
							93	17	1
							102	19	3
							124	22	1
							147	23	2
							172	25	1
							198	26	1
							225	31	5

Propriété curieuse

! \rightarrow factorielle double

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

$$4! = 1! \times 2! \times 3! \times 4! = 1! \times 2! \times 3! \times 4!$$

Chercher les propriétés pour les factorielles triples sachant que :

$$\begin{aligned}
 4! &= 1! (1!2!) (1!2!3!) (1!2!3!4!) \\
 &= 1 \cdot (1! \times 2!) \cdot (1! \times 2! \times 3!) \cdot (1! \times 2! \times 3! \times 4!) \\
 &= 1^{1+1+3+4} \times 2^{1+2+3+4} \times 3^{1+2+3} \times 4^1 \\
 &= 1^{10} \times 2^6 \times 3^3 \times 4^1
 \end{aligned}$$

Plot : Un an après cette fiche réalisée par les élèves eux-mêmes tu es revenu au codage polylog mais cette fois-ci avec cet outil extraordinaire qu'est l'ordinateur.

M.D. : L'équipement du Lycée B. Pascal en logabax 500 me permet de faire entre autres programmes de simulation celui qui permet de construire le premier tableau c'est à dire la suite des naturels codés en "polylog". Dans un premier temps on construit organigramme et programme simulant le fonctionnement d'un compteur exponentiel en base quelconque. Dans un second temps, on construit un programme qui, après avoir déterminé la liste des p premiers nombres premiers, met en place p compteurs exponentiels simultanément et les fait tourner en même temps.

Plot : On va laisser à nos lecteurs le plaisir de réaliser ces programmes dans le langage de leur choix...

M.D. : On remarquera que cet algorithme permet de décomposer un naturel en un produit de facteurs premiers sans faire aucune division...

Plot : Mais il nécessite d'avoir les p premiers nombres premiers !

M.D. : Curieusement ce n'est que plusieurs mois après que l'observation du tableau m'a convaincu qu'il n'était pas nécessaire de connaître au préalable la suite des premiers. J'imaginai alors un programme dont la particularité est la suivante : il permet de construire la suite des nombres premiers en même temps qu'il décompose chaque naturel en produit de nombres premiers. Le principe est simple :

Départ :

- 2 est premier. On met en place le compteur en base 2 et on démarre.

- Le premier naturel rencontré lorsque ce compteur marque 0 est premier. C'est 3. On met en place un deuxième compteur en base 3 qui démarre à 1 et tourne en même temps que le premier.

- Le premier naturel rencontré lorsque les 2 compteurs marquent 0 est premier, c'est 5. On met en place le compteur en base 5 qui démarre à 1. Les 3 compteurs tournent en même temps.

- Chaque fois qu'on trouve une ligne de 0, alors le naturel correspondant est premier. On met en place le compteur suivant dans la base correspondante, etc.

Plot : On obtient ainsi un algorithme de construction des nombres premiers ne nécessitant aucune division ni aucune élimination de multiples comme dans le crible d'Eratosthène !

M.D. : Dans le crible d'Eratosthène, on est obligé de fixer a priori une limite au tableau. On élimine les multiples de chaque nombre premier jusqu'à cette limite avant de passer au suivant. Ici aucune limite n'est nécessaire. Le fait de dimensionner les tableaux est une contrainte technique liée aux systèmes informatiques utilisant la mémoire. Il s'agit réellement d'une loi de succession où tous les compteurs tournent en même temps. On pourrait évidemment ramener le crible d'Eratosthène à ce type en faisant progresser la limite du tableau de 1 en 1 et en la testant comme multiple ou non des premiers précédents. Mais une énorme différence subsiste en ce sens que l'algorithme présent s'appuie uniquement sur les lois exponentielles et non sur la loi multiple. (à suivre)■

A-PLOT-STROPHE

CULTURES ET MATHÉMATIQUES

CORDES A COMPTER

*A l'occasion de la parution
une nouvelle édition, revue, actualisée et allégée
du livre de Georges IFRAH :
"Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention"
(Robert Laffont - 92 F pour 336 p.)
nous vous proposons, deux pages de l'auteur qui,
nous l'espérons, vous donneront le goût
d'en savoir plus sur cette histoire qui lie
étroitement l'homme et les chiffres.*

Que peut-il y avoir de commun entre un meunier allemand de la fin du 19^e siècle livrant sa farine au boulanger du bourg et un moine tibétain d'aujourd'hui célébrant l'office rituel ? Une cordelette à nœuds, qui sert de repère numérique. De la plus haute Antiquité à nos jours, sous différentes latitudes, on trouve des exemples de l'utilisation d'une fibre végétale, nouée pour compter ou décompter des objets, mesurer l'écoulement du temps ou conserver la trace d'un dénombrement.

Ce procédé a été particulièrement développé dans la civilisation inca. Ignorant probablement l'écriture, les Incas avaient mis au point un système de numération, fort complexe et ingénieux, qui leur permettait de figurer toutes les opérations de dénombrement nécessaire dans la vie quotidienne, de disposer de données précises et à jour sur leurs ressources à l'échelle de l'empire et de conserver une trace matérielle de tous ces calculs. Ce système, appelé *quipu* (mot quichua signifiant "nœud"), était constitué d'une corde principale, tenue horizontalement, à laquelle étaient nouées des ficelles multicolores, plus minces, rassemblées en plusieurs groupes et liées à intervalles réguliers par différentes sortes de nœuds (fig. 1).

Ces *quipus* remplissaient des fonctions très variées. Par exemple, ils servaient de support à la représentation de faits liturgiques ou chronologiques, faisaient office de calendrier, et permettaient de transmettre des messages, les couleurs des cordelettes correspondant, par convention, à des objets concrets ou à des notions abstraites. Mais ils étaient surtout utilisés à des fins de comptabilité : la couleur des ficelles, le nombre et la position relative des nœuds, la grosseur des groupements obtenus et leur espacement avaient des significations numériques précises (fig. 2, 3 et 4). De plus, ils étaient soigneusement conservés lorsque l'on voulait garder en mémoire les résultats des dénombrements (effectués, en l'occurrence, suivant un système décimal de numération) ; ils constituaient donc un instrument précieux de statistique dans tous les domaines de vie de l'empire - dénombrements nécessaires aux affaires militaires, évaluation des moissons, comptabilisation des animaux tués à la chasse, recensements de population, registres d'état civil, établissement de l'assiette de l'impôt, inventaire des ressources matérielles et humaines, etc.

L'administration inca était remarquablement organisée. Dans chaque ville, village ou district de l'empire, des fonctionnaires dénommés *quipucamayocs* ("gardiens de nœuds") étaient chargés, d'une part, de confectionner des *quipus* et d'en interpréter le sens à tout moment, d'autre part de fournir au gouvernement les informations requises. Chaque année, ils procédaient à l'inventaire des divers produits collectés dans la région ou au recensement de la population, en consignant les résultats sur les cordelettes à nœuds et transmettaient ces "registres" à l'administration centrale, qui conservait ainsi des stocks d'informations statistiques comparables à nos archives nationales contemporaines.

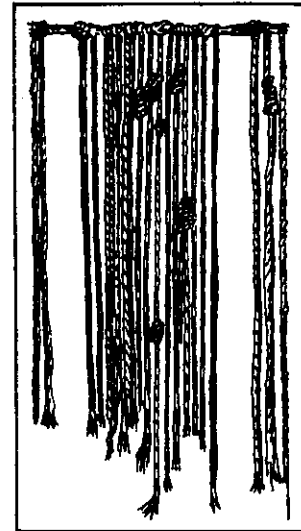


Fig. 1 - Un quipu péruvien.

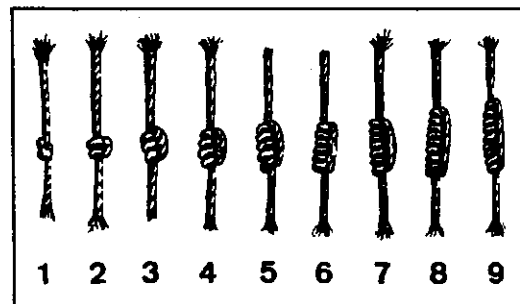


Fig. 2 - Représentation des neuf unités sur une cordelette, par la méthode du quipu inca.

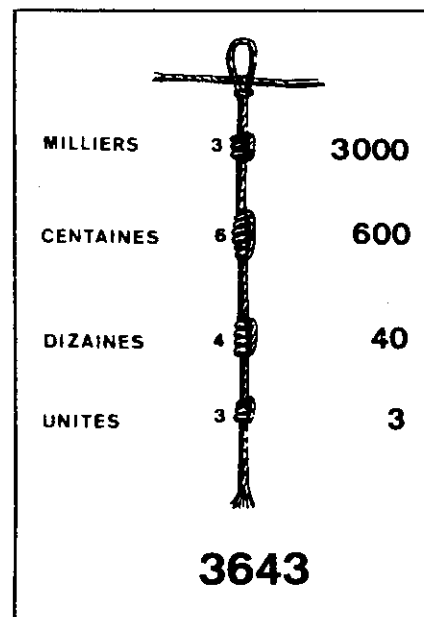


Fig. 3 - Représentation sur une ficelle du nombre 3643 par la méthode du quipu péruvien.

Le *quipu* inca était à la fois si simple et si précieux que son usage a longtemps persisté en Bolivie et en Equateur. Il semble qu'au milieu du siècle dernier, sur les hauts plateaux péruviens notamment, les bergers consignaient toujours les résultats des dénombrements de leur bétail sur les cordelettes à nœuds, les ficelles blanches correspondant aux ovins et aux caprins et les ficelles vertes aux bovins (fig.5).

Aujourd'hui encore, les Indiens de Bolivie et du Pérou se servent d'un système analogue, le *chimpu*, descendant direct du *quipu*, mais plus perfectionné. Une cordelette unique donne le compte des unités (on y fait autant de nœuds que nécessaire - jusqu'à neuf, bien évidemment) ; le nombre des dizaines est représenté par les nœuds faits sur deux cordelettes rassemblées, celui des centaines par les nœuds faits sur trois cordelettes groupées, et ainsi de suite. Six nœuds, par exemple, représentent donc, sur un *chimpu*, la valeur 6, 60, 600 ou 6000 selon qu'ils sont faits sur une, deux, trois ou quatre cordelettes à la fois.

Ce mode de calcul n'est pas l'apanage des Incas et des populations de l'Amérique du Sud. L'emploi des cordelettes à nœuds se retrouve, en effet, à différentes époques et en divers endroits.

Hérodote (485-425 av. J.-C.) raconte, par exemple, comment Darius I, roi de Perse (522-486 av. J.-C.), lors d'une de ses expéditions, confia à des soldats grecs alliés la garde d'un pont d'une importance stratégique vitale pour ses arrières. Il leur remit une courroie comportant soixante nœuds et leur donna l'ordre de défaire un nœud chaque jour, en leur disant ceci : "Si je ne suis pas de retour une fois que vous aurez défait le dernier nœud, regagnez vos navires et rentrez chez vous."

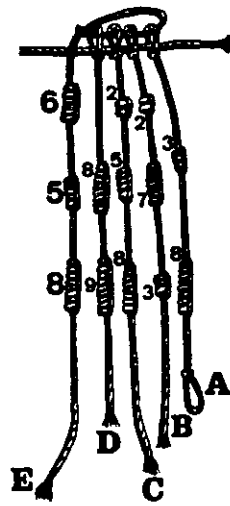
Dans la Palestine du 2^e siècle de l'ère chrétienne, alors sous domination romaine, les Publicains (percepteurs de l'époque) utilisaient en guise de registre un grand câble probablement formé par l'assemblage de plusieurs ficelles. Par ailleurs, le reçu donné à chaque contribuable était une cordelette nouée d'une façon particulière.

Des systèmes analogues de recensement, de comptabilité et d'archives auraient été longtemps utilisés en Chine, dans les temps anciens où l'écriture était encore peu développée. Selon la tradition, l'empereur semi-léendaire Shen Nong aurait joué un rôle dans l'élaboration du système de comptabilité sur cordelettes nouées et contribué à la propagation de cette méthode. Celle-ci est d'ailleurs évoquée dans le *Yi-King* ("Livre des transformations"), ouvrage classique dont la rédaction remonterait à la première moitié du 1^{er} millénaire avant J.-C.

En Extrême-Orient, cet usage des cordelettes nouées n'a pas totalement disparu de nos jours. Dans son *Histoire de l'écriture* J.G. Février note qu'il persiste notamment aux îles Riu-Kiu : "C'est avec un tel système de nœuds sur des cordes de paille que, dans certains districts montagneux de l'île d'Okinawa, les ouvriers font le compte de leur journée de travail, notent les sommes qui leur sont dues, etc. (...) Dans la ville de Shuri, les prêteurs à gages tiennent le registre de leurs opérations au moyen d'une longue ficelle de jonc ou d'écorce qu'on partage en deux en y attachant au milieu une autre ficelle. Les nœuds de la moitié supérieure indiquent le mois où le prêt a été consenti et ceux de la moitié inférieure, le montant du prêt."

On retrouve encore la même pratique dans les îles Carolines (près de Tahiti), dans les îles Hawaii et en Afrique occidentale chez une tribu du Nigéria en particulier. Des procédés analogues peuvent également être observés chez certains Indiens d'Amérique du Nord - Yakima (Etat de Washington), Walapi et Havasupai (Arizona), Miwok et Maidu (Californie), etc.

Les exemples qui demeurent aujourd'hui de cette utilisation des cordelettes nouées témoignent de la survivance d'une méthode archaïque et font figure de curiosité dans un monde où la numération décimale de position a partout prévalu. Mais ils permettent avec d'autres témoignages du passé, de prouver le caractère universel de l'intelligence humaine et de reconstituer l'un des maillons de l'histoire des chiffres et des systèmes de numération, qui, avec celle de l'écriture, est au cœur même de l'aventure de la pensée. ■



658	89	258	273	38
E	D	C	B	A

Fig. 4 - Interprétation numérique d'un faisceau de cordelettes à nœuds figurant dans un *quipu* inca : le nombre 658 de la cordelette E est égal à la somme des nombres figurant sur les cordelettes A, B, C et D. Ce faisceau est le premier d'un *quipu* péruvien conservé à l'American Museum of Natural History de New York.

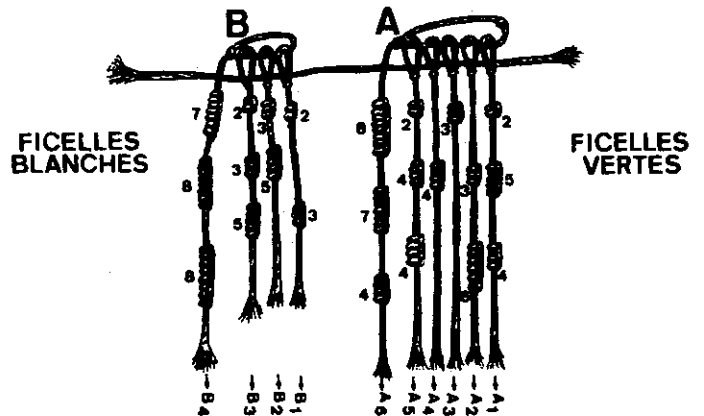


Fig. 5 - Utilisation du *quipu* par les bergers des hauts plateaux péruviens au siècle dernier pour dresser l'inventaire de leur bétail : Faisceau A (ficelles blanches) :

inventaire du petit bétail :
 $A_1 = 254$ moutons
 $A_2 = 36$ agneaux
 $A_3 = 300$ chèvres
 $A_4 = 40$ chevrettes
 $A_5 = 244$ brebis
 $A_6 = \text{total} = 874$ ovins et caprins.

Faisceau B (ficelles vertes) :
 inventaire des bovins :
 $B_1 = 203$ taureaux
 $B_2 = 350$ vaches laitières
 $B_3 = 235$ vaches stériles
 $B_4 = \text{total} = 788$.

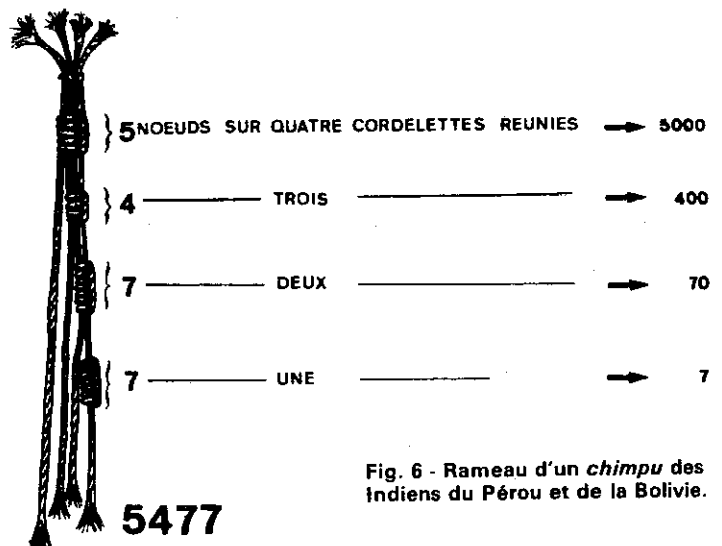
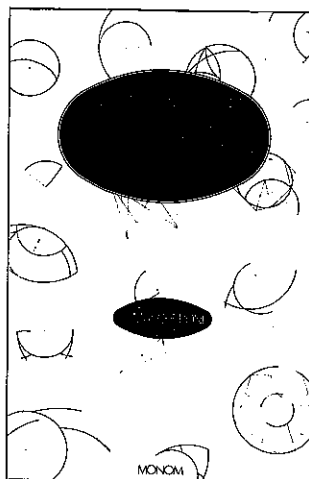


Fig. 6 - Rameau d'un *chimpu* des Indiens du Pérou et de la Bolivie.

LE COMPAS ET L'ABBE...

Raymond TORRENT - La Roche s/Yon

Prenez une feuille de papier,
munissez-vous de votre compas comme seul outil
et essayez de résoudre le problème suivant :
"Sur un côté AB construire un pentagone régulier"
ou encore celui-ci "Un cercle étant donné,
retrouver son centre..."
(toujours avec le compas seulement !)
Vous séchez ? Vous vous posez des questions :
le compas... d'accord mais que vient faire l'abbé
dans cette histoire ?...



Mener à bien des constructions géométriques avec le compas seulement, telle fut la préoccupation de MASCHERONI, abbé de son état, dont les travaux impressionnèrent fortement Napoléon Bonaparte, qui demanda à l'un de ses officiers, Monsieur CARETTE, de traduire de l'italien l'œuvre du brillant ecclésiastique. L'ouvrage fut alors édité par DUPRAT en 1798, sous le titre "GEOMETRIE DU COMPAS".

Celui-ci se présente sous la forme d'une succession de problèmes de construction regroupés en rubriques :

- "De la division de la circonférence et des arcs de cercle".

- "De la multiplication et de la division des distances en ligne droite".
- "De l'addition et de la soustraction des distances, de la situation des perpendiculaires et des parallèles".
- "Des distances proportionnelles".
- "Des racines".
- "De l'intersection des lignes droites avec les arcs de cercles et entre elles".
- "Des figures semblables et des polygones réguliers".
- "Des centres".
- "Problèmes divers" et "Problèmes résolus par approximation".

Une grande variété de thèmes donc, intéressants, étonnants parfois avec à chaque fois, une ou plusieurs figures géométriques, une solution (programme de construction) et une démonstration.

Dans sa préface l'abbé MASCHERONI explique sa démarche :
"Est-il bien vrai que les problèmes élémentaires d'Euclide soient de la plus simple construction possible ? Ne pourrait-on pas décomposer l'élément mathématique en ses éléments fondamentaux, la règle et le compas, à l'exemple de ceux qui ont décomposé l'eau en deux airs, et un air regardé jusqu'à présent comme simple, en deux autres substances ? Alors je m'avisai que la règle seule ne pouvant servir qu'à conduire une ligne droite, l'on pouvait peut-être n'employer que le compas, non pour décrire seulement un cercle ou un arc, mais en en décrivant plusieurs de différents centres et avec diverses ouvertures, trouver par le moyen des sections mutuelles de ces cercles, plusieurs points utiles et précisément les points cherchés de position dans un problème quelconque..."

Il exprime également son souci de faire œuvre utile et de rendre service aux artistes, aux mécaniciens et aux ingénieurs. Il déclare ne pas vouloir se limiter à un simple recueil de recettes mais de donner une présentation la plus complète possible de ce qu'il appelle "la Géométrie du Compas". "J'ai donc en même temps recherché la brièveté, la clarté, l'élégance autant qu'il m'a été possible."

Mais au fait, pourquoi vous parler de MASCHERONI et de son compas ? Tout simplement parce qu'un séjour dans la ville de Pierre de FERMAT, m'a permis de faire l'acquisition (dans une boutique réservée aux sciences occultes !) d'une réédition de cet ouvrage réalisée par les Editions MONOM en 1980. Il trônait bien sagement en vitrine en compagnie de livres traitant d'esotérisme, d'astrologie... et de l'interprétation des rêves !

Lecture désuète ?... peut-être pas...

S'il est vrai que les thèmes abordés ici ont été largement développés, unifiés au cours des décennies ultérieures, l'aspect "kaléidoscope" des problèmes traités rend ce livre vivant et attachant. J'ai pris personnellement un réel plaisir à exécuter certaines constructions ignorées de moi-même... et de mon compas !

C'est l'occasion de se replonger dans les problèmes de construction (... et qui sait... d'en tirer des idées pour des activités de classe) et d'accompagner cette lecture de celle complémentaire du livre de J.P. CARREGA, paru aux Editions HERMANN et intitulé "Théorie des Corps. La Règle et le Compas".

... Alors s'il vous prend envie de faire plaisir à votre compas... voilà un livre pour lui tout seul ! (Editions MONOM - 43, avenue du Contrat - 93470 COUBRON)

LA REVUE DES REVUES



L'actualité (ou les éditeurs) nous laissant un peu de répit, nous en profitons pour passer en revue les... revues françaises qui parlent des mathématiques, de leurs applications, de leurs enseignements. Que ceux qui sont oubliés nous excusent et nous envoient leurs publications, un prochain numéro du journal en rendra compte !

Le Nouvel Archimède n° 5 à 7 (ADCS - B.P. 222 - 80002 Amiens - abt 110 FF)

En particulier les rubriques Astronomie avec, bien sûr, le retour de LA comète, l'algorithmique, les problèmes et olympiades. Avec en plus dans 5 et 7, les nombres p-adiques où vous apprendrez pourquoi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1$!

Sans tambour ni trompette n° 30-38 (irem-Apmep de Lyon - abt 90 FF)

Quatre articles de fond : à la recherche de ses racines (M. Giaymann) - l'enseignement des Mathématiques en Grèce du 16^e au 18^e s. (Efsthathopoulos) - les nombres bé-adiques (avec un "b" comme baba Noël (sic !)) (M. Guinot) - la notion de problème en 2^e cycle (F. Boussofara) et tout cela dans un épais document de 120 pages.

L'ouvert n° 41-42 (Apmep et irem de Strasbourg - abt 100 FF)

Des articles le plus souvent originaux sur des problèmes comme : les tas de sables (R. Iss), la quatrième dimension (J. Lefort), Qu'est-ce qu'un "petit gros" ? (J. Lubczanski), pour ceux qui ont parcouru d'un bout à l'autre "Pliages et Mathématiques", dossier du PLOT-1985 : résolution des équations du 3^e degré par pliages (J. Justin), - et encore : le pentagone de Dürer sous la loupe informatique (N. Vogel).

Petit x n° 8 et 9 (irem-CRDP de Grenoble 3 numéros par an 95 F ou 129 F)

Lien entre la didactique et la pratique des enseignants de Mathématiques et de Physique de collège, ce journal propose des articles sur la mise en œuvre de situations d'apprentissage.

Dans ses deux derniers numéros :

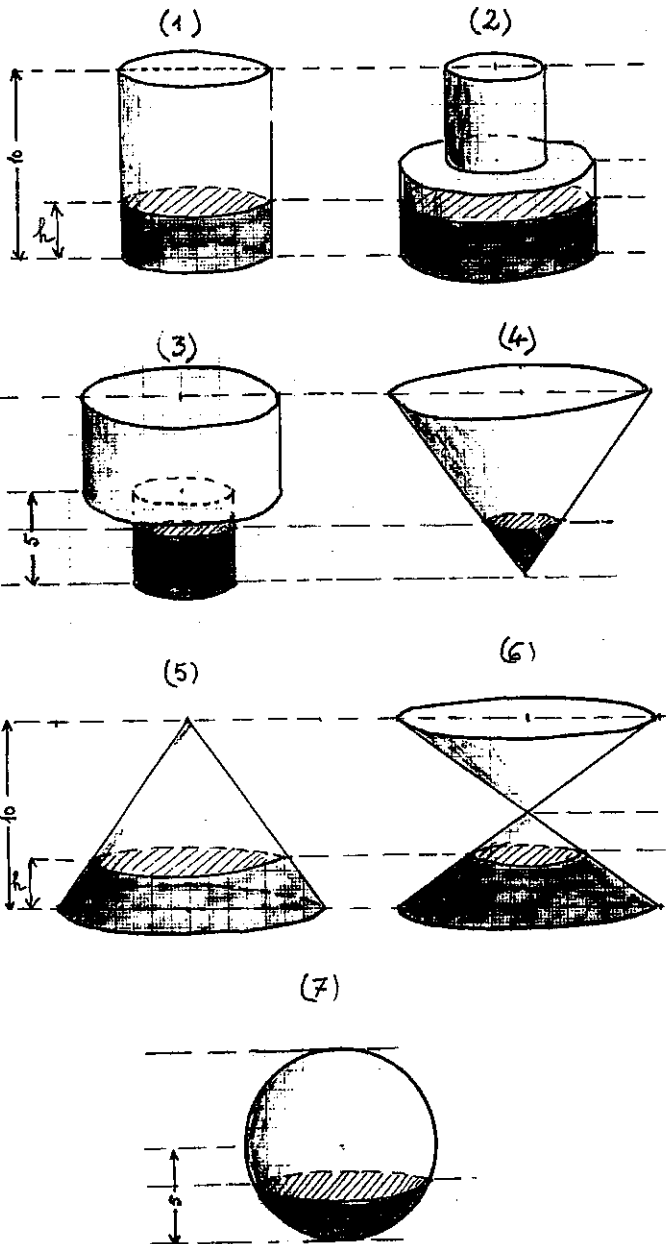
- aires de surfaces planes par Régine Douady et M. Jeanne Perrin - la matière, comment c'est fait ! de Bain et Bertrand - informatique et apprentissages numériques (Capponi et Clarou) - pratique des grandeurs et relations algébriques (Laurence Viennot) - l'article de Maryvonne Aubrée qui se trouve dans ce numéro et un certain nombre d'articles sur l'exploitation pédagogique des TO7.

PROBLEMES CHOCS DE L'EXPOSITION "HORIZONS MATHÉMATIQUES"

Des réponses aux problèmes du n° 34.

1. Les sept récipients

Trouver leur courbe de remplissage. Ce problème du québécois Claude Janvier se trouve dans l'exposition "Horizons Mathématiques" et dans l'espace mathématique de La Villette.



Voici les formules trouvées par les élèves lyonnais de R. Gauthier et G. Mison.

I	$V(h) = \frac{1}{6} \pi h^3$
II	$V(h) = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$
III	$V(h) = \frac{50}{3}\pi h$
IV	$\begin{cases} h \leq 5 & V(h) = \frac{80}{3}\pi h \\ h > 5 & V(h) = 100\pi + \frac{20}{3}\pi h \end{cases}$
V	$V(h) = \frac{\pi}{6}(h^3 - 30h^2 + 300h)$
VI	$V(h) = \frac{250}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi(5-h)^3$
VII	$\begin{cases} h \leq 5 & V(h) = \frac{20}{3}\pi h \\ h > 5 & V(h) = \frac{80}{3}\pi h - 100\pi \end{cases}$

Il ne vous reste plus qu'à faire... la bijection entre les nombres en chiffres romains et arabes et à tracer les courbes !!

2. La barre qui glisse sur les deux index

Effet surprenant : un seul doigt glisse à la fois et les deux doigts se rejoignent au centre... de gravité de la barre ! A chaque instant le doigt qui ne bouge pas "a" un coefficient de friction statique plus élevé que celui de friction cinétique de l'autre doigt. Le doigt en mouvement supporte une masse croissante et les coefficients s'inversent. D'où une belle suite alternée "décroissante" pour arriver au centre de gravité.

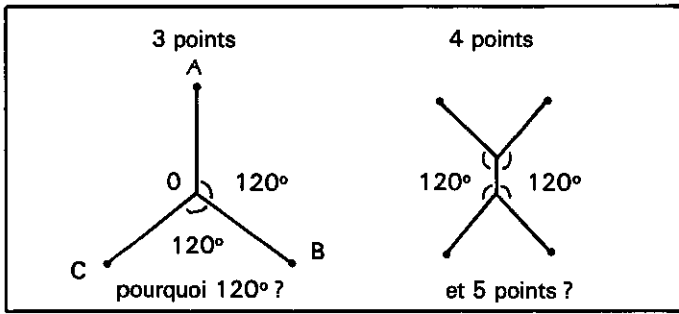


Exploitable en seconde, première ou terminale, toute section avec, bien sûr, différentes formes d'approfondissement.

Vous en trouverez des exemples d'utilisation dans le n° 3 de la collection Inter-Irem "Quels objectifs pour quels apprentissages?".

3. La nature est paresseuse !

Le plus court chemin joignant



Pour 3 points : faites "subir" une rotation de 60° centrée en A au triangle A O B qui devient A O' B'. La somme des distances d'un point O à A, B et C est égale à la somme des distances de C à B' en passant par O et O' qui est minimale lorsque ces quatre points sont... obliques !

Mais oui !!! mais c'est bien sûr !... et que se passe-t-il si l'un des angles du triangle ABC est supérieur à $2\pi/3$?



Deux histoires du "Café du Commerce"

1. De l'eau dans le vin, ça conserve ?

Sur le comptoir deux verres remplis d'un même volume d'eau pour l'un, de vin (rouge) pour le second. Arsène met une cuillerée d'eau dans le vin (!) mélange puis remet une cuillerée de ce mélange dans le verre d'eau (!!). Y a-t-il plus d'eau dans le vin que de vin dans l'eau ?? Et si l'on répète l'opération indéfiniment ??

2. Et que ça roule !

Couchez une bouteille, bouchée de préférence et une bordelaise si possible. Faites la rouler sans la faire glisser. Appelez C un point du... cul de la bouteille et G un point du goulot.

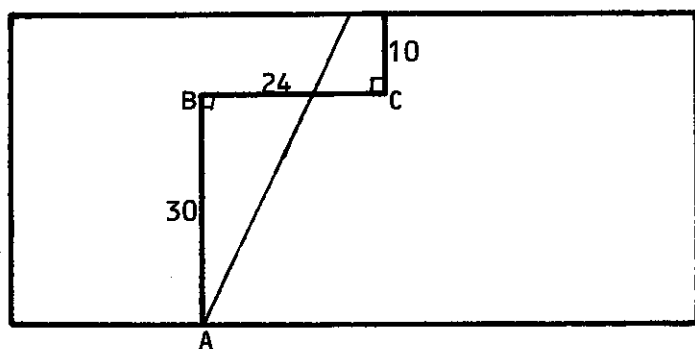
Quand C fait un tour sur lui-même, que fait G ?
Quelle est la distance parcourue par C ? par G ???

PLOT-MENINGES

Un titre pour une rubrique ouverte dans le numéro précédent : les problèmes des rallyes et olympiades proposés dans les régionales du Centre et de l'Ouest (pour le moment Orléans) ou dans les pays d'Afrique noire (ici la Côte d'Ivoire). D'abord des extraits de la seconde épreuve préparatoire du rallye d'Orléans 86 proposé aux élèves de 3^e et seconde.

A)
Deux terrains sont séparés par la ligne brisée ABCD telle que : $AB = 30$; $BC = 24$; $CD = 10$.

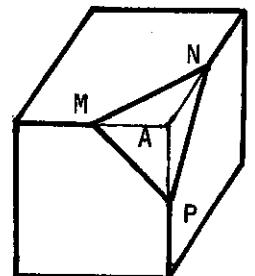
Les propriétaires veulent procéder à un échange de parcelles pour rectifier la limite sans modifier les superficies, mais ils tiennent à ce que la nouvelle frontière AE passe encore par A. Calculer DE.



B)
Soit un cube d'arête 6 cm. En chacun des 8 sommets de ce cube, on détache une pyramide telle que AMNP (où M, N, P, sont les milieux des arêtes passant par A).

1. Quel est le volume du polyèdre restant ?
(volume d'une pyramide de base d'aire B, de hauteur h : $v = B.h/3$)

2. Construire un patron d'un seul tenant de ce polyèdre.



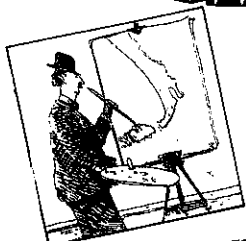
POUR L'ETE, DES UNIVERSITES... D'ETE

LILLE
du 30 juin au 11 juillet
Didacticiels de lutte
contre l'illettrisme
Logo et pluridisciplinarité



TOULOUSE
du 6 au 12 juillet
Université interdisciplinaire
sur l'Histoire des Maths
par la toute nouvelle association
sur le sujet : l'ADEREM

FOIX
du 3 juin au 12 juillet
Création de didacticiels
pour les disciplines
scientifiques



ORLEANS
du 25 au 29 août
Enseignement
de la programmation

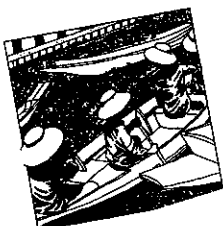
HAZEBROUCK
du 30 juin au 11 juillet
L'outil informatique dans
la démarche pédagogique
interdisciplinaire des
4^e technologiques

AVIGNON
du 15 au 26 juillet
Interactivité :
images et langages

MARSEILLE (Luminy)
Informatique pédagogique
pour les enseignants
en poste à l'étranger

LE MANS
du 2 au 11 juillet
Automatique et langage logo
Les programmes d'option
informatique en lycée

ORLEANS
du 30 au 6 juillet
Didactique des mathématiques



ORLEANS
du 30 juin au 5 juillet
L'enseignement des Maths
à l'école moyenne en Europe

TOUT LE NORD de la France
du 30 juin au 11 juillet
planche sur la formation
à l'animation de sites
informatiques (6 "sites")



ST POL SUR TERNOISE
du 30 juin au 11 juillet
Lecture et calcul dans
les écoles primaires
rurales



Ref. B.O. n° 9 (6-3-1986)

Si vous changez d'adresse en septembre, surtout si vous êtes en Afrique, informez nous de votre changement si vous désirez recevoir les prochains numéros :	ancien	Etablissement	nouveau
	_____	_____	_____
	_____	B.P. _____	_____
	_____	Ville _____	_____
	_____	Pays _____	_____

Nom et Prénom : _____

Adresse complète : _____

Code postal et ville : _____

1986

Payé par chèque

Renouvellement

Désire facture

Nouvel abonné

**FAITES ABONNER VOTRE ETABLISSEMENT,
VOS COLLEGUES et VOTRE C.D.I.
au Journal **PLOT** et à ses suppléments 1986**

Tarif normal
et établissements

Membre APMEP

Pays étrangers

Règlement

100 F ——— **80 F** ——— + **20 F** ———→ **F**

à envoyer à

APMEP Orléans-Tours - CCP La Source 1440 09 X
IREM - Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2
ou à l'une des Régionales du Centre et de l'Ouest

Poitiers : APMEP-IREM - 40, av. du Recteur Pineau - 86022 Poitiers (Serge Parpay)
Limoges : APMEP-IREM - 123, rue Albert Thomas - 87060 Limoges (Roger Crépin)
Nantes : APMEP-IREM - 38, bd Michelet - BP 1044 - 44037 Nantes (Raymond Torrent)
Rennes : APMEP - Collège La Harpe - BP 1325 - 35016 Rennes (Georges Le Nezet)
Rouen : APMEP-IREM - BP 27 - 76130 - Mont-Saint-Aignan (Jacqueline Collet)
Côte d'Ivoire : Daniel Boutté - BP 927 - Abidjan 06
Mauritanie : Pierre Latourette - BP 203 - Nouakchott
Togo : Gérard Dubos - BP 91 - Lomé