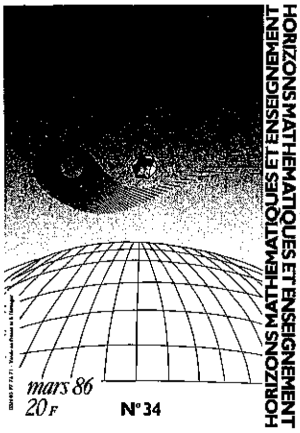


Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi
Comité de rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Michel Clinard, Jacqueline Collet, Roger Crépin, Georges Le Nezet, Serge Parpay, Raymond Torrent,
Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault
Secrétariat
Madeleine Schlienger
Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin
Publicité
Pascal Monsellier
Abonnements
PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2
Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F
Photocomposition et maquette
Graphi'Style - Orléans
Photogravure et impression
Fabrègue-Imprimeur, Limoges
Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, Nantes, Rennes et Rouen avec le concours du Ministère de la Coopération

Diffusion
Adécum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

sommaire

éditorial

1976, premier numéro du PLOT, journal réalisé par les enseignants des régionales de l'Apmep de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours (P.L.O.T.)

1980, nouvelle formule avec des suppléments matériels qui intéressent tous les niveaux d'enseignement, du primaire au lycée, cette année : l'aléatoire

1986, nouveau pas en avant avec un élargissement aux régionales Apmep de Nantes, Rennes, Rouen, et, à la suite de l'itinérance de l'exposition ***"Horizons Mathématiques"****, une large diffusion à l'étranger, notamment l'Afrique Noire et le Maghreb*

Le PLOT doit vous permettre de suivre l'actualité mathématique et ses répercussions sur l'enseignement, ***au primaire, au collège et au lycée.***

« Et vous créyiez qu'o y at pas de quoè prenre in mail ! »

Daniel DAVIAUD - Jonzac

Le texte ci-dessous est extrait de "La Mérine à Nastasie".
Pour les lecteurs de PLOT les plus septentrionaux, précisons qu'il s'agit d'une pièce de théâtre en patois charentais, écrite par le Docteur Jean, alias Yan Saint Acère, et qui met en scène les paysans charentais de la fin du siècle dernier.
Dans la tirade suivante (Acte II, scène 3), un père évoque l'enseignement des mathématiques qu'a suivi son fils...

Il é peurtant poin sot, thieu drôle ; il at été six moîs en pension à Sainte, cheû Moncieu Lamouroux, dépeu les vendanghe jhusqu'aux métive, mais i me semb' de thieu, il at pas boune teite p're apprenre. Sitout sortit des école, jhe v'lis zi feire compté combeun o fasait d'arghent la moitié d'in goret de troé cent vingt-cinq que jh'avis vendut onze sou et demi la livre. I peuvit jhamais tiré thieu compte ! Qu'as-tu dont fait en thiasse, malhureux drôle ? qu'o zi dissit sa mère. - Jh'étion pas encoère rendut là, m'man ; jh'avon fait des règle d'intérêt, des règle d'eau-de-vie, mais i nous avant jhamais fait voèr les règle de goret ! Et vous créyiez qu'o y at pas de quoè prenre in mail !

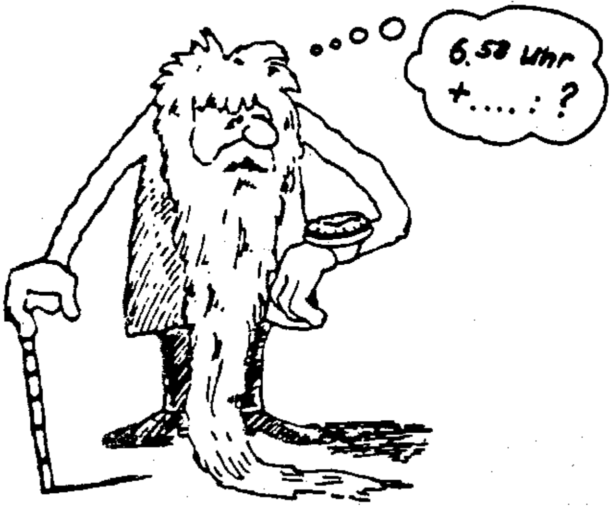
UNE IDEE DE PASCAL A EXPLOITER DANS LES CLASSES

Roland STOWASSER - (RFA)

L'histoire des mathématiques fourmille d'idées d'excursions pour vos élèves, exploitables à plusieurs niveaux.
Dans cet article, et d'autres à venir, traduits par Colette Bloch (Poitiers), vous trouverez des idées d'applications anciennes et nouvelles des congruences.
Ou : de Pascal à Rivest (1977) en passant par Gauss, Fermat et les autres, comment actualiser l'histoire des mathématiques et son enseignement.

Le traité de Pascal "Des caractères de divisibilité des nombres déduits de la somme de leurs chiffres" (1) permettra au lecteur d'apprécier la part due à Pascal dans le projet de leçon que je propose (et que j'ai plusieurs fois expérimenté) pour les élèves de onze ans (et les amateurs de raisonnement mathématique).

Pour introduire ce type de problème, on utilise l'*horloge*, comme des enfants jusqu'à la satiété, et on pose une question absurbe. Alors l'idée de Pascal se trouve pour ainsi dire exposée sur le cadran, sous une forme particulièrement simple.



Les variations sur ce thème sont ensuite illustrées par les divisions non-babyloniennes du jour, des jeux d'allumettes, etc. En effet, l'idée de Pascal peut servir à bien d'autres choses qu'à l'*organisation* parfaite d'un cours sur les *règles de divisibilité*. L'articulation de cette idée avec la notion d'*égalité des restes* constitue le noyau de mon projet pédagogique.

Pascal, par contre, n'exploite sa trouvaille que sous l'angle des règles de divisibilité, ne voit que le cas particulier (reste nul), occulte par là-même la voie de la *compréhension*, est obligé d'apporter une *preuve* et montre ainsi qu'il n'a pas entièrement saisi sa propre idée.

Mon projet utilise cette idée pour établir des *algorithmes rapides* aboutissant, à partir de nombres donnés, à des nombres plus petits ayant le même reste. La règle de divisibilité de Pascal, et d'abord ses cas particuliers triviaux (les règles données dans les manuels scolaires) s'en déduisent du même coup avec évidence.

Il n'est pas difficile d'écrire un chapitre de manuel dans l'optique de ce projet. Le manuel en question, il est vrai, n'est pas près de voir le jour, bien que ses traits essentiels soient suffisamment connus :

- il développerait la mathématique autour d'*idées directrices* du niveau de celle de Pascal ; leur réseau ferait éclater le cadre étroitement logico-déductif dont on a l'habitude ;
- il s'éloignerait de la pratique douteuse qui consiste à administer les connaissances à la petite cuiller (Freudenthal) ;
- il offrirait d'innombrables situations concrètes *favorisant un apprentissage actif* ;
- ou, plus précisément : il viserait à rendre impossible un apprentissage passif (toujours d'après Freudenthal).

L'essai suivant donne un exemple de ce que peuvent apporter, à l'enseignement tel qu'on le souhaite, les excursions à travers l'histoire des mathématiques.

La petite aiguille

Dans le cursus antérieur, on a étudié à fond la numération de position et - espérons-le - largement usé du boulier. Le chapitre *divisibilité* est alors, en cinquième année [notre CM² - N du Tr], une suite naturelle des processus consistant à faire des "paquets" et des paquets de paquets.

Parmi les acquis des enfants de onze ans, l'horloge offre une entrée en matière attractive.

J'apporte en sixième année [notre 6ᵉ] une grande horloge en carton, sans aiguille des minutes. L'aiguille des heures est sur le 12.

Un élève est appelé au tableau. Il doit écrire un nombre aussi grand qu'il veut, représentant autant d'heures d'horloge. Il inscrit un nombre impossible à énoncer, qui va d'un bord à l'autre du tableau.

Trois secondes après l'écriture du dernier chiffre, je place l'aiguille sur la bonne heure. Par exemple pour :

2045010223053123456789024681357902541403

je mets l'aiguille sur le 7.

Les élèves font le calcul : division par 12 ; toute une page de cahier y passe ; beaucoup d'erreurs ; tout en bas à droite, la seule chose intéressante : le reste.

(1) Texte posthume publié en 1665 (avec le célèbre traité du triangle arithmétique).

Les élèves savent que je ne suis pas magicien et, surtout, que je ne compte pas bien de tête. Naturellement je ne dévoile pas mon "truc". La classe va travailler à le découvrir. Une fiche de travail toute prête, qui pose de nombreuses questions sur l'heure marquée par la pendule, donc sur les restes des divisions par 12, fait constater sur un exemple que les restes des puissances de 10, à partir de 10^2, sont, Dieu merci, tous égaux :

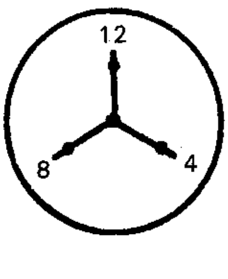
$$R_{12}\ (10^n) = \text{pour } n \geq 2$$

Chaque puissance de 10 ($\neq 10$) fait avancer la petite aiguille de 4 heures.

Je suppose - si ce n'est pas le cas, il faut le rappeler - que les élèves maîtrisent réellement le principe du boulier, qu'ils *voient* un nombre, en écriture décimale, comme composé d'une somme de puissances de 10.

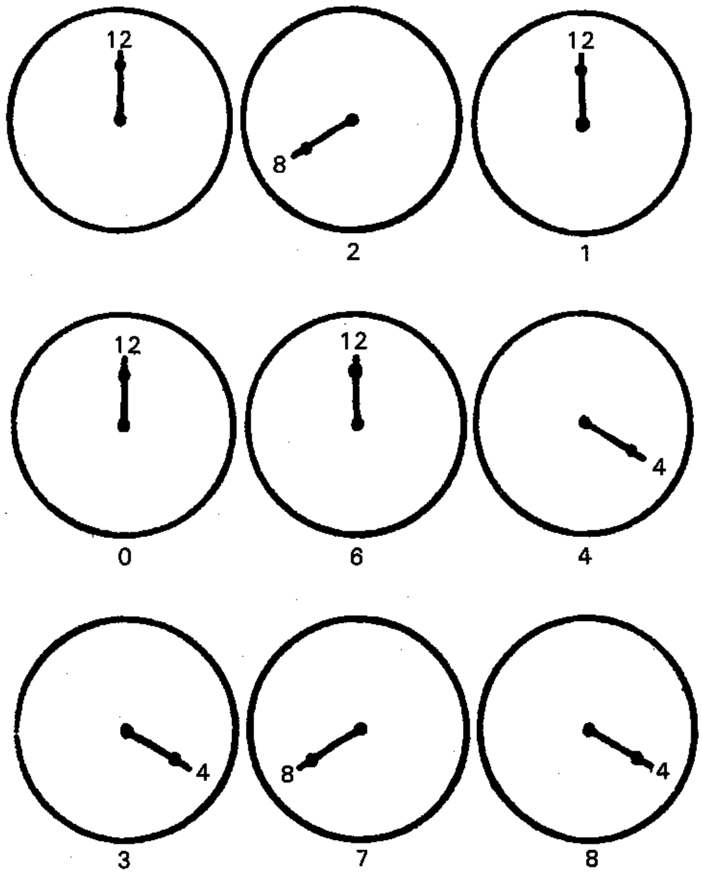
Alors tout le secret de mon calcul rapide est levé.

Quel que soit le nombre des chiffres du début, l'aiguille des heures ne peut occuper que 3 positions - avant d'ajouter les dizaines et les unités.



Mais j'aime mieux faire tourner l'aiguille dans ma tête que sur l'horloge en carton.

S'il faut chercher R_{12} (2106437822), mon travail de tête se présente ainsi :



Les 22 heures finales échappent à la règle et amènent en définitive l'aiguille sur le 2.

Les enfants comprennent même ma question suivante : leurs calculs auraient-ils donné aussi R_{12} (10.000.000.000.000) = 4 ? En étant un peu guidés, ils trouvent la justification - une récurrence camouflée par la définition de proche en proche des puissances de 10 :

de 10^2 heures, quand on a retiré les demi-journées, il reste 4 heures ; de $10^3 = 10.10^2$ heures, il reste 10 fois 4 heures ; on enlève encore les demi-journées, il reste *de nouveau* 4 heures. On fait de même pour $10^4 = 10.10^3$, etc.

Le "calcul horaire" peut d'ailleurs être présenté plus cérémonieusement, par exemple en travaillant plus avec des signes qu'avec des figures (ce qui peut gêner la compréhension de l'idée si simple de Pascal). Par exemple ainsi :

$$\begin{aligned} R_{12}(2106437822) &= R_{12}\,[(2+1+0+6+4+3+7+8).4+22] \\ &= R_{12}\ (31.4+22) \\ &= R_{12}\ (146) \end{aligned}$$

Enoncée par les enfants de onze ans, la recette est la suivante :

1 - Sépare les deux derniers chiffres du nombre :
21064378/22

2 - Prends 4 fois la somme des chiffres du début :
$4\,(2+1+0+6+4+3+7+8) = 124$

3 - Ajoute au résultat le nombre qu'on a séparé :
$124 + 22 = 146$

Le nombre donné et le résultat de 3 ont le même reste :

$$R_{12}\ (21064378) = R_{12}\ (146)$$

Le mathématicien écrit dans son jargon :

$$R_{12}\left(\sum_{k=0}^{n} n_k.10^k\right) = R_{12}\left(4\sum_{k=2}^{n} n_k + 10\,n_1 + n_0\right)$$

De toutes les façons, le premier problème est résolu. Les élèves ont trouvé le truc qui m'avait permis de les épater. Ils peuvent à leur tour étonner parents et amis par leur talent de calculateur - après quoi ils ont encore la joie d'en fournir l'explication à leurs aînés.

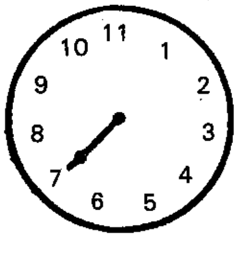
La grande aiguille

Au bout de 60 minutes elle se retrouve au même point. Les élèves maîtrisent parfaitement le changement de situation. En effet le cas particulier 1.2 leur a déjà laissé entrevoir l'idée générale de Pascal. (C'est justement ce qui m'a fait choisir ce fragment de théorie des nombres comme exemplaire pour un enseignement orienté vers les problèmes.)

Voici le résultat :

$$R_{60}\ \sum_{k=0}^{N} n_k.10^k = R_{60}\ \ 40\sum_{k=2}^{N} n_k + 10\,n_1 + n_0$$

L'horloge de 11 heures



Nous notons les restes des puissances de 10 dans la division par 11, de droite à gauche, sur un *ruban de restes.* A l'aide de ce ruban, on peut remplacer un (grand) nombre par un autre nombre (petit) qui donne le même reste par 11. Sous les tranches du ruban on écrit le nombre donné (par exemple 620518) en respectant les emplacements :

(11) ...	10	1	10	1	10	1
	6	2	0	5	1	8

Chaque chiffre du nombre donné est multiplié par le reste de la puissance de 10 correspondant à son rang, puis on additionne les produits :

$$6.10 + 2.1 + 0.10 + 5.1 + 1.10 + 8.1 = 85$$

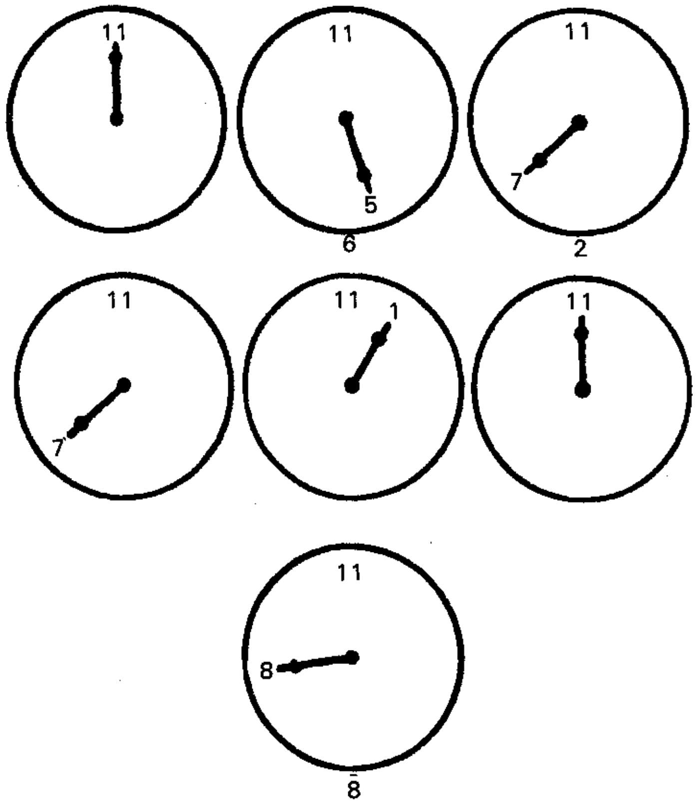
Le nombre obtenu s'appelle somme des chiffres pondérée (relativement à 11) : S_{11} (.).

La méthode générale permettant d'obtenir un nombre de même reste, déjà complétement analysée dans le cas 2 (par la décomposition en paquets de chaque puissance de 10) jutifie le procédé des *rubans de restes.*

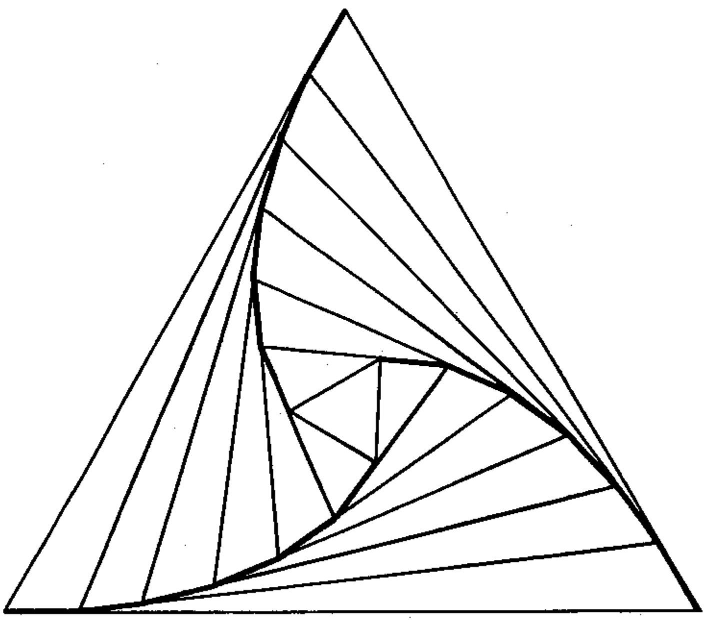
Certains rubans peuvent être améliorés par l'emploi de nombres négatifs. On prend pour repré sentant de la classe de restes le nombre qui a la plus petite valeur absolue. Par exemple :

(11) ...	− 1	1	− 1	1

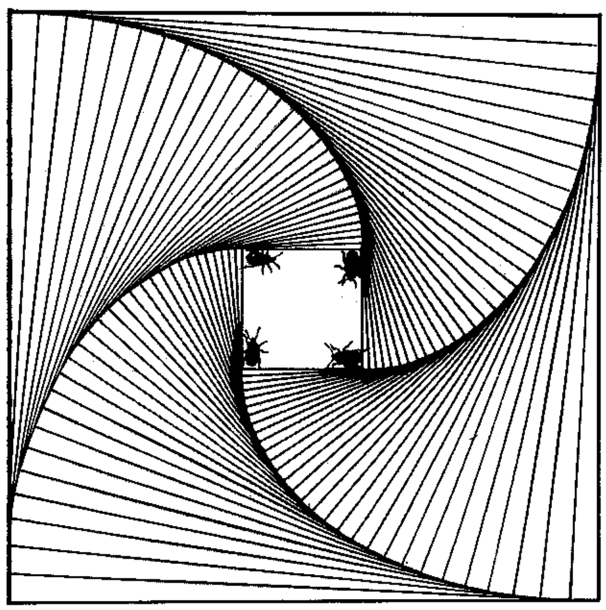
Les élèves comprennent plus facilement si on parle "horloge de 11 heures" : au lieu de faire avancer l'aiguille de 10 heures, on peut la faire reculer de 1 heure.



à suivre... ■



3 coccinelles aux 3 sommets d'un triangle.



4 coccinelles aux 4 sommets d'un carré.

TROISIEME - SECONDE

LA COURBE DU CHIEN

Michel CLINARD - Orléans

La place du chien dans les familles s'est considérablement accrue ces dernières années, le PLOT ne pouvait ignorer ce phénomène de société et ses répercutions dans les classes de troisième et seconde.

Au départ : un excellent livre de chevet pour tous ceux qui cherchent des idées pour intégrer l'outil informatique dans leur enseignement : *mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique* d'Arthur Engel (Cedic). Dans le paragraphe "simulation", la courbe du chien est évoquée en quelques pages, une idée intéressante à exploiter semble-t-il.

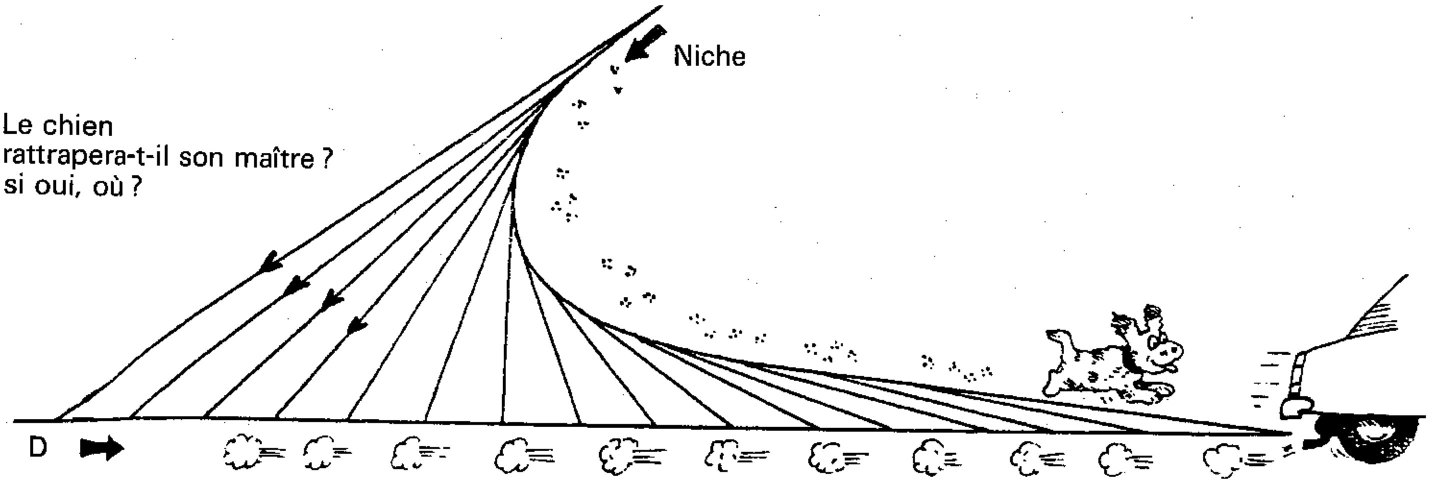
Des recherches, rapides à effectuer quand on peut se procurer la publication de l'*Irem de Paris-Sud: "de la courbe que décrit un chien en courant après son maître",* permettent de voir que cette courbe est toujours abordée en terme d'équation différentielle. Tout l'intérêt du travail d'Engel est d'en ramener l'étude à des problèmes de repérage, de coordonnées de points et de vecteurs, de distance et à un algorithme itératif.

On peut alors construire une situation de classe, exploitable en troisième ou en seconde, faisant appel à une "mathématique élémentaire". Le titre de l'ouvrage est donc parfaitement justifié". (cqfd).

Mais de quoi s'agit-il ?

Le principe de la courbe du chien :
un chien court toujours dans la direction de son maître

Un aperçu historique emprunté à Brochard et Lemoyne, courbes géométriques remarquables (Blanchard) et un calcul "classique" de l'équation de la courbe permettent de mieux situer le problème avant d'en décrire une approche scolaire.



Non ! tout ne dépend pas du point de vue où l'on se place (P. Dac).
Mais tout dépend de la vitesse à laquelle on se déplace (Einstein) ! *M. D. in "Pliages et Maths" dossier PLOT-1985*

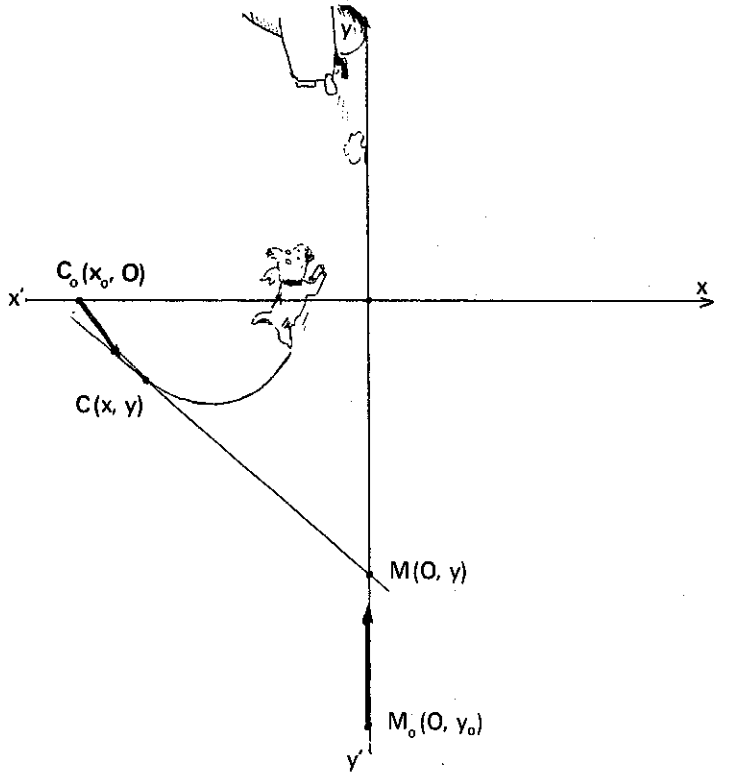
Aperçu historique

Courbe de poursuite. D'après S. Günther, la première idée de ces courbes serait due à Léonard de Vinci. Quoi qu'il en soit, elles ont été étudiées par Bouguer dès 1732 dans un mémoire intitulé : Problème de la route du vaisseau à la chasse d'un autre (Mém. de l'Acad. des Sc. pour 1732, p. 1). Bouguer examinait le cas où le vaisseau poursuivi suit une ligne droite, Maupertuis, dans le même tome, généralisa le problème en supposant que la route du vaisseau poursuivi est quelconque et il obtint l'équation différentielle qui répond à la question. Repris en 1814 par Dubois-Aymé, directeur des douanes à Fuligno, département de Trasimène et proposé par lui dans la correspondance sur l'Ecole polytechnique, 1814, t. II, p. 275, sous une forme différente (Dubois-Aymé propose de déterminer la ligne décrite par un chien qui court après son maître lorsque celui-ci suit un chemin rectiligne d'un mouvement uniforme), ce problème fut encore généralisé par Th. de Saint-Laurent et Sturm qui considérèrent le cas où le chien, traversant un canal à la nage, est entraîné par le courant, dont la force est supposée constante (A.G., 1822-1823, t. 13, p. 289 et 391).

Dans le même volume cette dernière question fut ramenée par Querret et Tédenat au problème de Bouguer. C'est à la suite de ces travaux que certains géomètres ont donné à la courbe cherchée le nom de courbe du chien, nom plein de pittoresque mais bien moins évocateur que celui de courbe de poursuite.

Ces courbes sont caractérisées par la propriété de leur tangente d'être constamment dirigée vers le point correspondant occupé par le mobile poursuivi.

1 - Equation de la courbe



C_0 et M_0 sont les positions initiales du chien et du maître, s et p leurs vitesses supposées constantes, l'axe (y'y) est parcouru par le maître.
L'équation de la courbe est y = f(x) et celle de la tangente au point C(x,y) :

$$Y - y = f'(x) \bullet (X - x)$$

Le point M(O,Y) appartient à cette tangente, ses coordonnées vérifient l'équation :

$$Y = y - f'(x) \bullet x$$

Si on pose $y' = f'(x)$ $\quad Y = y - y' \bullet x$ (1)
D'autre part, dans le temps dt, le chien parcourt l'élément ds ($ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$) avec la vitesse s et le maître parcourt l'élément dY avec la vitesse p :

$$\left(\frac{dY}{dt}\right) : \left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{p}{s} = k$$

d'où $dY = \sqrt{1 + y'^2} \bullet (-dx)$ (2)

d'ou, après, une double intégration :

si $k \neq 1$ alors $f(x) = y = \dfrac{A}{2(k+1)} x^{k+1} - \dfrac{1}{2A(1-k)} x^{1-k} + B$

si $k = 1$ alors $f(x) = y = \dfrac{A}{4} x^2 - \dfrac{1}{2A} \operatorname{Ln} x + B$

(Dans ce dernier cas, on rappelle que le maître et le chien se déplacent à la même vitesse).

Les conditions initiales (xo ; yo ; $yo' = -\dfrac{yo}{xo}$)

déterminent les constantes A et B.
On montre que si $k \geqslant 1$, la droite (y'y) est asymptote à la courbe donc :
Si la vitesse du maître est supérieure ou égale à celle du chien alors le chien ne peut réjoindre son maître.

Dans le cas où $k < 1$, la droite (y'y) et la courbe ont un point d'intersection de coordonnées (O,B) :
Si la vitesse du chien est strictement supérieure à celle du maître alors le chien rattrape son maître.
On peut faire découvrir ces propriétés aux élèves.

2 - Situation de classe

Les trois fiches suivantes et les résultats des élèves rendent compte du travail dirigé de 3 heures proposé en juin 1985 dans une classe de 3e de bon niveau du Collège d'Olivet.

2.1 - L'approche vectorielle a pour but de s'approprier la situation et de travailler sur les acquis de fin de 3e (vecteur, coordonnées, distance, calcul algébrique...)

2.2 - L'approche algorithmique s'est faite avec les TI 57 que les élèves avaient utilisées durant l'année. Ils ont simplement recopié les ordres, le but n'étant ni de programmer, ni d'entrer dans les quelques astuces nécessaires pour "faire tenir" le programme en 32 pas.
Les objectifs sont de bien comprendre l'algorithme et de l'appliquer pour obtenir un tableau des coordonnées des points successifs puis construire la courbe correspondante.

2.3 - L'approche simulation a pour objectif l'observation des courbes obtenues en faisant varier les conditions initiales et l'énoncé des propriétés remarquées (en particulier celles du 2).
On peut insister sur la modélisation imparfaite de la réalité puisqu'on transforme un mouvement continu en un déplacement série (importance nouvelle du discret dans les démarches informatiques au détriment du continu).
Pour ne pas introduire d'éventuels problèmes parasites, la représentation graphique du 2 est abandonnée : le maître se déplace sur l'axe des abscisses de gauche à droite.
Les élèves ont recopié le programme sur les MO5 alors nouvellement installés au collège. La rapidité de l'outil informatique leur a permis de faire de nombreux essais et de tester instantanément les hypothèses émises. L'intérêt n'a pas faibli durant toute la séance.

3 - Une mutation spontanée et inattendue

Avec BASIC la programmation repose sur les coordonnées des points et ne rend pas directement compte du principe de la courbe du chien :

Se diriger vers le maître et avancer

Avec LOGO, la tortue mute et devient chien. La procédure VERS (tourner vers un point défini par ses coordonnées) et la primitive AVANCE simulent à elles seules le mouvement du chien ; les autres procédures gèrent l'intéraction machine-utilisateur.

4 - La dernière séance

Pour ceux qui voudraient étoffer cette situation de classe, la dernière séance sera évidemment consacrée au cinéma avec le film réalisé par J.B. Touchard et l'INA (21, bd Jules Ferry, Paris 11) et P. Huet (IREM Paris Sud, 2, place Jussieu, Paris 05) : la courbe du chien. Durant 15 minutes, sonore et en couleur, le chien ROCH donne forme et vie à l'objet triangulaire et télévisuel de ces études mathématico-canines. ■

Fiche élève

DE LA TRACE DU CHIEN QUI COURT APRES SON MAITRE (1)

En messidor an X, me promenant au Hâvre sur la plage que la mer découvre à marée basse, je me mis à courir ; mon chien, qui s'était écarté à gauche, se lança après moi, et je m'aperçus, en revenant ensuite sur mes pas, qu'il avait tracé sur le sable une courbe régulière, dont je m'amusai à chercher l'équation aussitôt que je fus rentré chez moi. Voici comment je m'y pris, et les résultats que j'obtins.

Je suppose que le maître se meut en ligne droite ; je nomme V sa vitesse, υ celle du chien, et je les regarde l'une et l'autre comme uniformes.

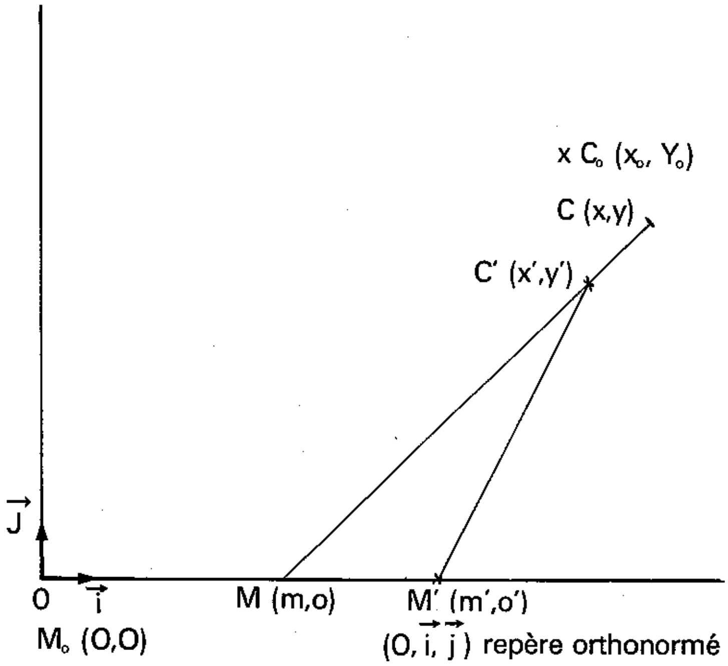
Soit Q le point de départ du maître pour aller vers B, A celui du chien, et AM un arc de la courbe que décrit ce dernier en se dirigeant continuellement vers son maître dont la position varie à chaque instant.

Je prends pour l'axe des coordonnées la ligne QB.

Lettre de M. du Boisaymé dans "Correspondances de l'Ecole Polytechnique" en 1811.

(1) Origine du problème des **courbes de poursuite.**

Approche vectorielle



C_o (x_o, y_o) et M_o (O,O)
positions du chien et du maître au départ.

C (x,y) et M (m,O)
positions du chien et du maître à l'instant t.

C' (x',y') et M' (m',O)
positions du chien et du maître à l'instant t'.

Entre les instants t et t' :
le chien fait un saut de longueur s dans la direction du maître
le maître fait un pas de longueur p en se déplaçant en ligne droite

1. placer C'' et M'' sur la figure
2. trouver une relation entre m, m' et p
3. donner les coordonnées de $\vec{CM}$ et calculer la distance CM
4. trouver le rapport de colinéarité entre $\vec{CM}$ et $\vec{CC'}$
5. exprimer x' et y' en fonction de x, y, s, p, d. (d = CM)

Approche algorithmique

Au départ, le chien est en C_o (x_o, y_o) et le maître en M_o (O,O).
On fait utiliser au chien l'algorithme suivant :

1. je vise la position du maître
2. je cours dans la direction de ce point sur une distance s (la distance parcourue par le maître durant ce temps est p)
3. je reprends la règle 1.

Les relations suivantes permettent de calculer les coordonnées des points C successifs :

$$d = \sqrt{(m-x)^2 + (-y)^2}$$
$$x' = x + s/d*(m-x)$$
$$y' = y + s/d*(-y)$$

Voici un programme pour TI57 qui permet d'obtenir d, x', y' à partir de x, y, s, p.

s est en mémoire O
x est en mémoire 1
y est en mémoire 2
on rentre m et on obtient successivement d, x, y.

Entrée de m

—	75	00
Rcl1	71.01	01
=	95	02
EXC O	81.00	03
≷t	51	04

Calcul de m-x
Jeu de mémoires

RclO	71.00	05
X^2	34	06
+	85	07
Rcl2	71.02	08
X^2	34	09
=	95	10
√	35	11
R/S	13	12

Calcul de d

1/x	33	13
X	65	14
≷t	51	15
EXC O	81.00	16
X	65	17
RclO	71.00	18
=	95	19
STO+1	61.85.01	20
Rcl1	71.00	21
R/S	13	22

Calcul de x

t	51	23
X	65	24
RclO	71.00	25
X	65	26
Rcl2	71.02	27
=	95	28
STO−2	61.75.02	27
Rcl2	71.02	30
R/S	13	31

Calcul de y

Construire le tableau suivant après avoir choisi les valeurs s, p, x_o, y_o.

s = p = x_o = y_o =

Abscisse du maître m	O	p	2p	3p	4p	5p
Distance chien/maître d						
Abscisse du chien x						
Ordonnée du chien y						

Construire deux représentations de la courbe du chien pour des valeurs intiales différentes. ■

LANGUES, CULTURES ET MATHEMATIQUES

INRAP - Niamey

Les mathématiques sont une science universelle ; mais cela ne signifie pas que leur enseignement doit se faire partout de la même façon !
Cet article voudrait montrer, par exemples, en quoi leur enseignement peut tirer parti des ressources locales.
Il s'appuie sur différents travaux faits à l'INDRAP (avec, pour certains d'entre eux, la collaboration de l'IREM et de l'Ecole de Pédagogie de Niamey).
Bien entendu, ce travail n'a aucune prétention d'être complet ; ces quelques exemples sont seulement une invitation, pour les professeurs, à être attentifs à la langue, la culture et l'environnement des élèves ; ils y découvriront mille moyens de transformer, pour les élèves, les mathématiques en une science vivante et familière.

Ressources de la langue

Pour la numération

La langue française fait très mal ressortir la structure :
jusqu'à 16, chaque nombre a un nom différent ;
de 17 à 69, la numération à base *dix* apparaît clairement ; mais de 61 à 99, c'est, en réalité, la base *vingt* qui apparaît (et il y a encore quelques anomalies supplémentaires !).

En revanche, le principe de la numération transparaît clairement en Zarma, par exemple :
25 se dit "waranka cindi gu" (vingt, avec cinq) et le mot "waranka" (20) est clairement relié à "ihinka" (2).

Ce procédé de construction est uniforme jusqu'à 99. Cette particularité a été mise à profit dans les centres d'alphabétisation des régions de langue Zarma.

Le Kanuri offre pratiquement les mêmes possibilités pour l'apprentissage de la numération. Pour le Hausa, la situation est un peu moins simple : les noms des dizaines (empruntés à l'arabe) ne ressemblent pas aux noms des unités correspondantes.

En Zarma comme en Hausa, 18 (par exemple) s'exprime aussi d'une autre façon équivalente à (20 - 2) ; ceci peut être utilisé en calcul mental : pour ajouter 18, ajouter 20, puis retrancher 2.

Pour les comparaisons

L'expression : "... est au plus égal à..." est souvent mal comprise par les élèves (qui confondent "... au plus..." avec "... plus que...").

Par contre, en milieu Zarma, la forme "... ne dépasse pas..." (équivalent exact de "... a mana bisa..." ne posera pas de problème.

Ressources culturelles

L'artisanat

• Il sera une source inépuisable d'illustrations de *symétries* (et autres transformations géométriques), et de figures géométriques : une "kunta", une croix d'Agadez, ... pour les symétries axiales ; un hilaire, une marmite en fonte d'aluminium de Bukoki, ... pour les symétries planes.

Shamba Balongongo. Statue en bois, British Museum, Londres

On pourra faire rechercher des symétries centrales et des translations sur un dessin de pagne.

• L'étude des motifs décoratifs d'une "kunta", d'un coffret touareg, d'une calebasse ou d'un canari peut fournir des exercices de reconnaissance et de classification de *formes géométriques* : rectangles, losanges, etc.

• L'artisanat fournira aussi de bonne illustrations de *sphères* : canaris ; calebasses, ..., et de *cercles* ; un fragment de bracelet touareg peut donner prétexte à un problème sur le cercle circonscrit à un triangle.

• Au Musée de Niamey, on trouve des sortes d'oiseaux articulés, construits sur le principe du parallélogramme déformable.

La maçonnerie

• Avant la construction, il arrive que les briques de banco nécessaires soient stockées en piles régulières ; par exemple, en 10 étages constitués (chacun) de 16 rangées de 23 briques.

Le dénombrement des briques fournira, sans effectuer le calcul, l'égalité :

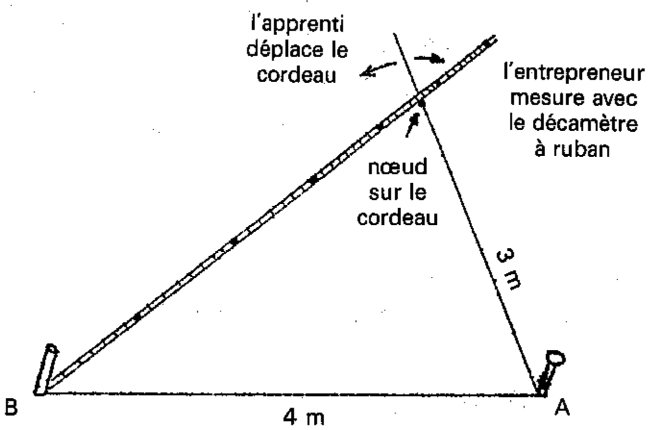
$$\underbrace{16 \times (23 \times 10)}_{\substack{\text{dénombrement} \\ \text{par rangées}}} = \underbrace{(16 \times 23) \times 10}_{\substack{\text{dénombrement} \\ \text{par étages}}}$$

Ce qui conduira à une justification élémentaire (sans recourir à la mesure des volumes) de l'*association* de la *multiplication.*

• Pour tracer une case circulaire, les maçons utilisent 2 baguettes reliées par une corde tendue : un manœuvre maintient une des baguette au centre ; le maçon décrit le cercle avec l'autre. Cette technique traditionnelle peut éclairer la ***définition du cercle*** (distance fixée, à partir du centre) : pour les élèves, en effet, le compas est un objet artificiel, scolaire, apparemment sans lien avec la vie. Ce sera aussi l'occasion d'apprendre aux élèves à tracer des cercles sans compas, en cas de besoin.

• La figure ci-dessous illustre le procédé utilisé par des entrepreneurs pour obtenir un angle droit : l'entrepreneur fait déplacer le cordeau jusqu'à ce que la distance de B au nœud soit 5 m.

Ce procédé est une application pratique du *théorème de Pythagore.*



Cette petite statue de bronze est l'œuvre de la tribu Ashanti du Ghana. La femme, qui est en train de gagner, est supérieure hiérarchiquement à l'homme, elle est assise sur un trône de cérémonie.

Des jeux

• Dans le Hambana (jeu de tiges), on lance 4 tiges ; suivant la configuration obtenue, on gagne, par exemple, un "cheval", ou une "chèvre". On peut échanger : 10 chèvres contre un cheval, ou 10 chevaux contre un chameau.

Ces échanges à 10 contre 1 font de ce jeu un instrument privilégié pour enseigner la *numération*, la *technique des additions* (et soustractions), le mécanisme de la retenue. On pourrait même y faire jouer à l'aide d'un *boulier*, et enseigner du même coup le maniement de cet instrument utile et instructif.

• Pour jouer au Dilli (ou Dara), on fait, sur le sol, 6 colonnes de 5 trous ; le joueur qui aligne 3 pions peut en prendre un à son adversaire ; mais, s'il en aligne 4, il perd les 4 pions.

La disposition même du jeu (en lignes et colonnes) est celle des *tableaux* à double entrée, essentiels pour la définition de la *multiplication*.

Seydou Issa ne représente donc pas du tout le même nom que Issa Seydou ; il arrive qu'on trouve, dans une même classe, 2 élèves aux noms "permutés" de cette façon.

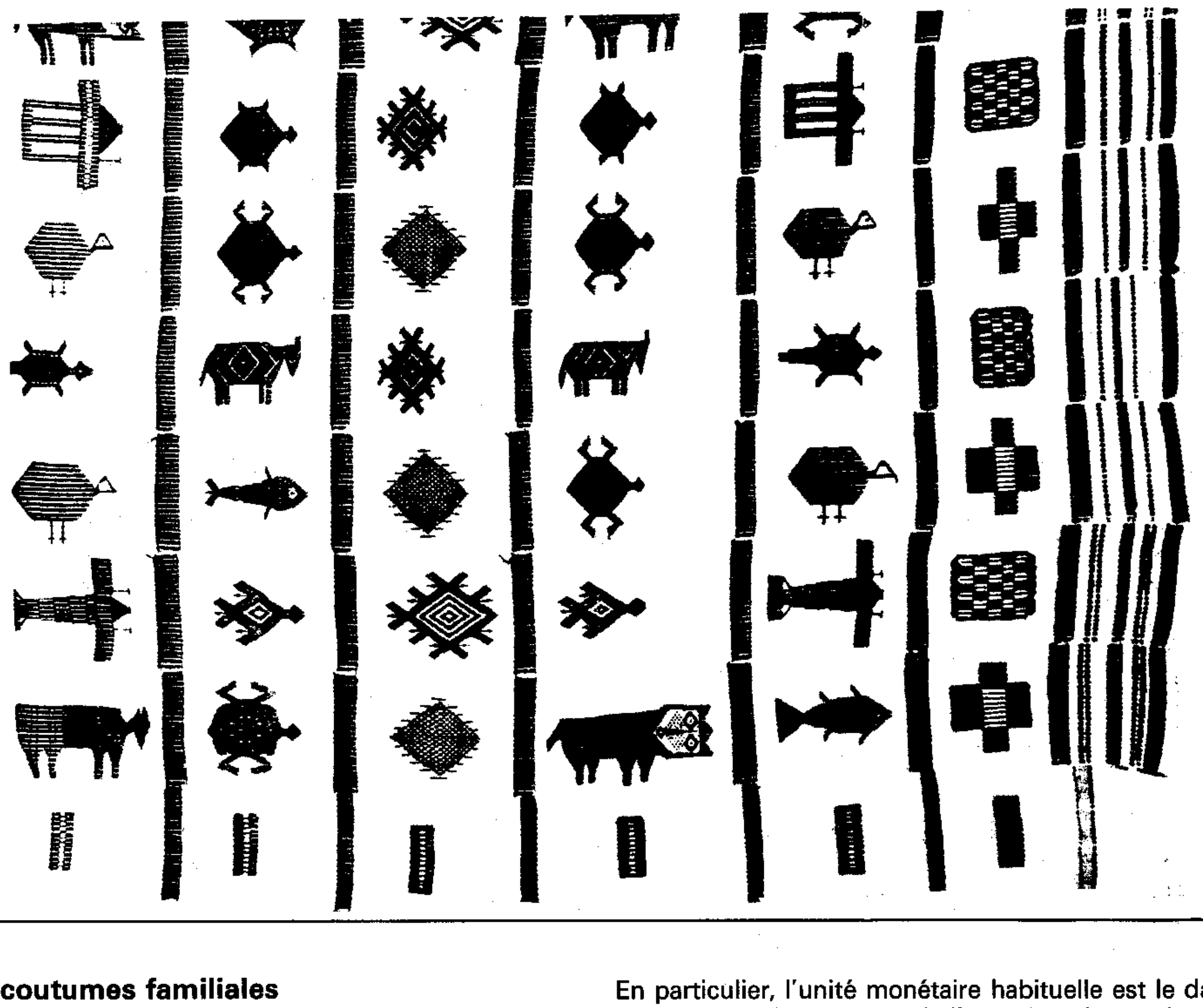
Cette particularité peut être exploitée pour présenter la notion de couple, et la différentier de celle des paires.

Des mesures traditionnelles

• Il est très souhaitable de connaître les unités employées sur les marchés locaux, afin de les utiliser dans les manipulations en classe, et dans les énoncés. En particulier, on pourra utilement transposer les expériences sur la mesure des longueurs, en substituant des unités locales ("grande", "kambe", "hannu"...) à celles qu'utilise le manuel.

• Les changements d'unité (par exemple, du mètre au yard, très utilisé pour la vente des tissus) donneront matière à de nombreux exercices sur la *proportionalité*.

Tissage bobo du village de Bondoukui, en Haute Volta



Des coutumes familiales

• Mme Berté (de l'IREM) soulignait que les héritages sont l'occasion de problèmes intéressants (et parfois difficiles) sur les *fractions*.

• Beaucoup de noms nigériens sont du type illustré par l'exemple :

Seydou	Issa
nom de l'intéressé	nom de son père

En particulier, l'unité monétaire habituelle est le dala (pièce de 5 F) ; elle fournit l'occasion de nombreux exercices de *calcul mental* sur la multiplication et la division par 5.

• Il faudra tenir compte du caractère non traditionnel de la pesée, pour introduire et utiliser avec prudence la notion de poids. Ici, plus qu'ailleurs, l'expérimentation sera nécessaire : on pourra utiliser une balance rudimentaire, construite avec des matériaux locaux.

Ressources tirées de l'environnement

Vie des éleveurs

• Un troupeau qui s'abreuve régulièrement à un puits ne peut s'en éloigner, disons, à plus de 4 heures de marche. On peut *mathématiser* cette situation, c'est-à-dire la schématiser, afin de pouvoir en donner une description mathématique approximative, mais simple.

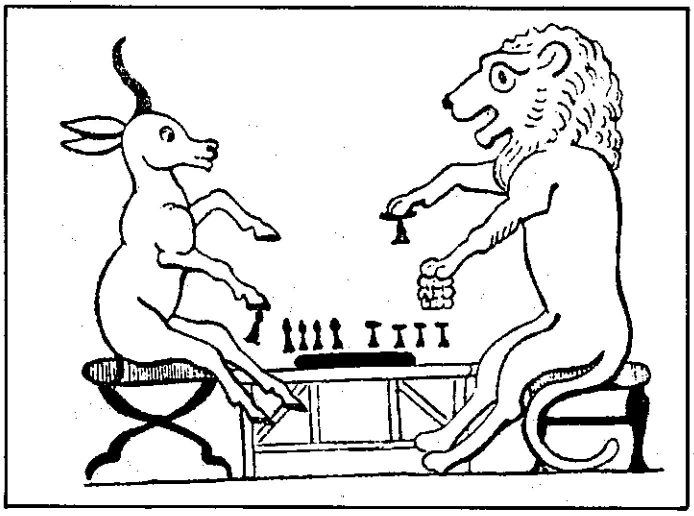
• Un troupeau peut donner de bons exemples de *partitions* d'un ensemble. Par exemple, 3 bêtes boivent ; 2 autres sont presque arrivées ; 12 vaches suivent ; 3 restent brouter ; la dernière est avec le berger : partition de l'ensemble en 5 sous-ensembles. On peut proposer d'autres partitions du *même* ensemble : mâles et femelles ; ou bien : troupeau partagé par héritage, à la mort de son propriétaire...

Vie des agriculteurs

• La chute des fruits mûrs d'un manguier fournit une illustration parlante de la *projection* parallèlement à une direction donnée (la verticale).

• La prolifération d'un couple de rats dans un grenier à mil peut donner une introduction intéressante à l'étude, et aux propriétés, des puissances d'un nombre entier naturel.

• L'observation d'un animal ou d'une plante fait très souvent ressortir des éléments de symétrie.



Tanzanie : jeux de Bao

Mars
Mars
Marse

Mars 1977

Maars
Mara
Marisl

DIMANCHE	Dibéér	Diiboor	Alet		6	13	20	27	Alahada	Alhadó	Alahadi
LUNDI	Altine	Tening	Altine		7	14	21	28	Teneŋ	Teneŋo	Teneŋe
MARDI	Talaata	Talaata	Talaata	1	8	15	22	29	Talaata	Talaató	Talaata
MERCREDI	Alarba	Ardaba	Alarba	2	9	16	23	30	Araba	Arabó	Araba
JEUDI	Alxemes	Arxemes	Alkamiisa	3	10	17	24	31	Araamisa	Araamisó	Alxamisa
VENDREDI	Ajuma	Jumaling	Aljumaa	4	11	18	25		Arijuma	Arjumoo	Aljuma
SAMEDI	Gaawu	Fugaaw	Aset	5	12	19	26		Sibíté	Sibitó	Sibiti

La multiplicité des langues nationales qui caractérise un assez grand nombre de pays du Tiers monde pose des problèmes complexes aux autorités en matière d'alphabétisation. C'est le cas, par exemple, du Sénégal, où l'alphabétisation doit se faire en six langues, comme le montre ce calendrier rédigé en ouolof, sérère, peul, dioula, mandingue et soninké. La phrase, en haut de l'image, signifie en mandingue "c'est très bien".

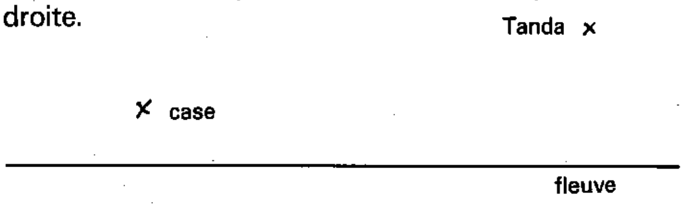
Au bord du fleuve

• La symétrie plane (dans l'espace), ou axiale (dans le plan), peut aussi être illustrée par le spectacle des reflets à la surface de l'eau du fleuve, ceci peut aussi être une introduction à des expériences sur la symétrie, à l'aide d'un miroir.

• Si l'on schématise le fleuve par une droite, il peut donner une représentation du partage, par une droite, du plan en 2 *demi-plans* : les 2 rives.

• Il peut aussi donner matière à un intéressant exercice sur la *médiatrice* et l'*inégalité triangulaire* : Tanda doit rejoindre sa case après avoir été chercher de l'eau au fleuve.
Quel est l'itinéraire le plus court ?

• Et si l'on s'intéresse seulement à l'itinéraire le plus court pour atteindre le fleuve, cela débouche sur le problème mathématique de la *distance d'un point* à une droite.



Nous espérons que ces exemples donneront envie aux enseignants d'en chercher d'autres. Nous les invitons à envoyer à l'INDRAP le résultat de leurs recherches, afin de pouvoir en faire bénéficier le plus grand nombre.

D'avance merci. ■

MU-MATH POUR LA CLASSE

Jean-François CANET - Avignon

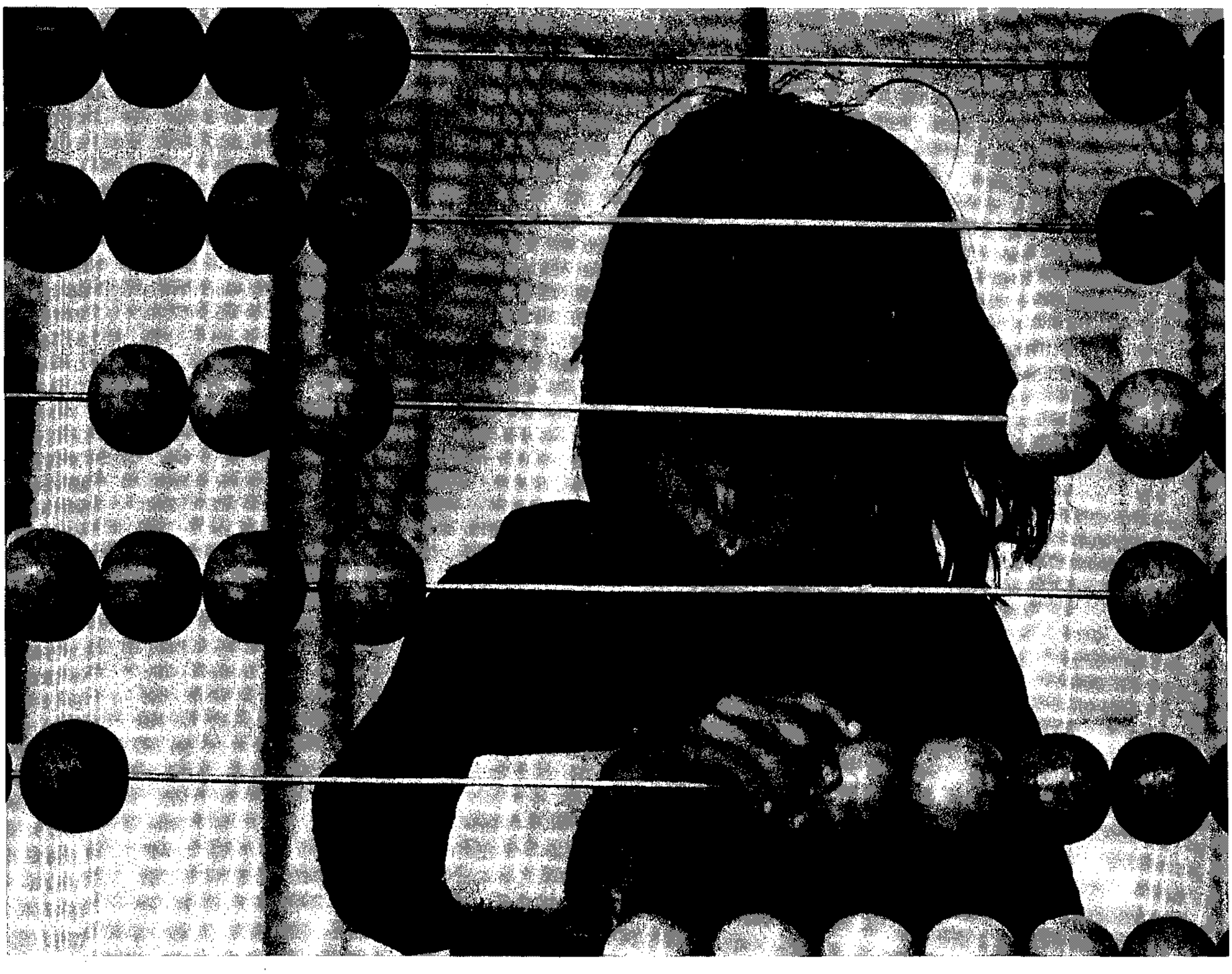
Beaucoup d'enseignants ne le connaissent pas encore, quelques-uns le gardent précieusement chez eux et pourtant, MU-MATH pourrait-être aux professeurs de Mathématiques (et à leurs élèves) ce que les traitements de texte sont, maintenant, à tous ceux qui font du secrétariat ou ce que les tableurs sont à ceux qui font du traitement comptable ou statistique.

Jean-François CANET, enseignant en lycée à Avignon, nous présente ici ce futur outil pour la classe.

Depuis plusieurs années est disponible sur le marché, un logiciel de calcul symbolique destiné aux micro-ordinateurs. Le programme MU-MATH a été réalisé et implanté sur micro-ordinateurs par D. STOUTEMYER et A. RICH de la société Soft Warehouse ; il est commercialisé en France par la société Microsoft.

En mettant à ma disposition ce logiciel cette société m'a permis d'écrire cet article, qu'elle en soit ici remerciée.

Ce programme, disponible sur la plupart des micro-ordinateurs, est, semble-t-il, encore souvent méconnu des enseignants de math. Cet article n'a pas la prétention de décrire complètement ce produit - un bulletin entier et des connaissances bien supérieures à celles de l'auteur seraient nécessaires - mais de donner un aperçu des possibilités qu'il offre et de nous amener à nous interroger sur l'usage que nous pourrions en faire dans notre enseignement.



MU-MATH comporte un langage de programmation de type LISP appelé MU-SIMP, et un certain nombre de modules permettant de traiter diverses applications d'algèbre et d'analyse, non pas en manipulant des expressions numériques, mais en effectuant des calculs formels sur les expressions.

Avant d'aller plus loin voici *quelques exemples :*

• Si vous voulez calculer le développement limité à l'ordre cinq, au voisinage de 0, de *l'exponentielle de sin (X),* il vous suffira de taper :

? TAYLOR(#E^SIN(X),X,0,5) ;

et vous verrez apparaître (après quelques instants) :

@ : 1 + X + X^2/2 − X^4/8 − X^5/15

remarques : le "?" est le symbole d'invite, le point-virgule termine chaque commande, l'a-robase est le symbole de réponse (answer).

• de même la commande :

INT(A*X*SIN(X^2),X) ;

vous permettra d'obtenir une primitive de la fonction spécifiée si toutefois vous n'avez pas oublié de préciser la variable d'intégration !

• si vous frappez :

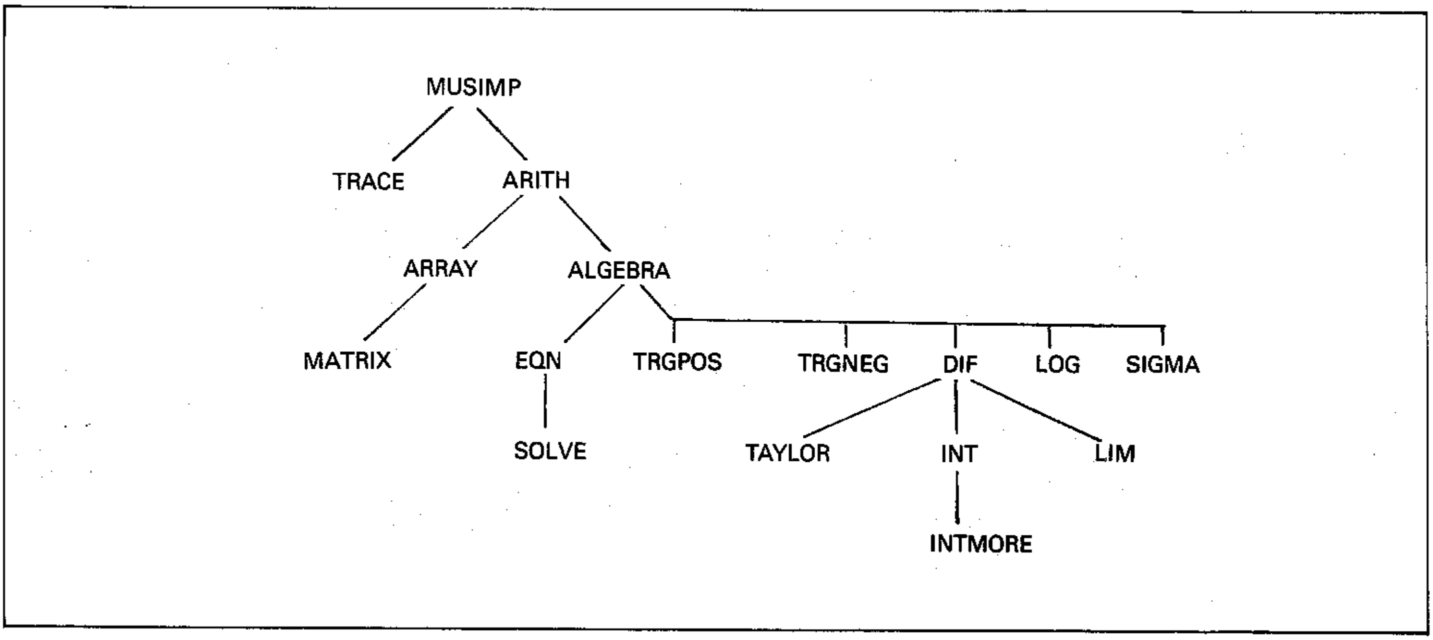
LIM((A^X−A^SIN(X))/X^3,X,0) ;

le programme vous posera quelques questions sur A avant de vous répondre que la limite cherchée est LN(A)/6.

MU-MATH est aussi un calculateur puissant puisqu'il travaille avec des nombres dont l'écriture peut comporter plus de 600 chiffres.

Pour faire un monde... mon dieu que c'est long

Nous avons vu que MU-MATH comportait un langage de programmation (MU-SIMP) et différents modules. Ces modules sont organisés "en arbre" de la façon indiquée par le schéma ci-dessous.



ce qui signifie que, si vous voulez par exemple faire du calcul de limites avec des fonctions trigo, il faudra que vous "installiez" en mémoire centrale :

MUSIMP->ARITH->ALGEBRA->TRGPOS->TRGNEG->DIF->LIM.

Comme la place en mémoire est toujours limitée, et que le temps d'exécution est fonction de la place libre (voir annexe), on a intérêt à n'introduire en mémoire qu'un "monde" exactement adapté au problème à résoudre. L'installation de ce monde (qui est une compilation des modules) prend beaucoup de temps, je connais des utilisateurs qui, n'étant pas patients, étaient persuadés que la version du programme dont ils disposaient était défectueuse !

Lorsque vous aurez compilé le monde qui répond à vos désirs, vous pourrez le sauvegarder sur disquette ; son chargement sera alors très rapide.

Nous allons à présent regarder un peu plus en détail les modules ARTIH et ALGEBRA.

ARITH

Ce module permet le *calcul sur les rationnels.*

Les calculs numériques

• Vous pourrez effectuer les sommes, produits, élévations à une puissance entière des fractions et obtenir les résultats sous forme de fractions irréductibles (mais aussi des valeurs décimales approchées en changeant la valeur de la variable de contrôle POINT).

• Les calculs pourront être effectués dans n'importe quelle base de numération comprise entre 2 et 36.

• Vous pourrez obtenir directement la valeur de n ! pour de "grandes" valeurs de n (pour ma part je me suis arrêté à 400 ! (!) le résultat remplissant pratiquement un écran - 869 chiffres -).

• Un module optionnel vous permet de faire des calculs avec des exposants fractionnaires (ainsi 24^(1/3) devient 2*3^(1/3)).

• Les calculs avec les nombres complexes sont tout aussi simples (# I étant l'écriture du nombre complexe de module 1 et d'argument PI/2 comme on dit dans les énoncés).

• Un certain nombre de fonctions sont directement disponibles - PGCD, PPCM, MIN, MAX, etc. -.

Les calculs formels

- Plusieurs fonctions permettent de reconnaître la nature d'une expression : est-ce une somme, un produit, une exponentielle, y-a-t-il un cœfficient négatif etc... (ces fonctions prennent leur valeur dans {TRUE, FALSE} , en français Vrai, Fraux).
- D'autres permettent de séparer différents éléments de l'expression (numérateur, cœfficient, exposant, etc.).
- D'autres enfin permettent de substituer dans une expression donnée une sous-expression à une autre et d'évaluer.

Un petit exemple est donné en annexe, on verra que les expressions ont une représentation en mémoire sous forme de liste traduisant une structure d'arbre.

Enfin l'utilisateur peut, en changeant la valeur de certaines variables de contrôle, permettre ou interdire l'application de certaines règles de simplification.

ALGEBRA

Lorsque vous aurez, en plus, chargé le module *Algèbre* vous pourrez transformer les expressions algébriques.

Un certain nombre de transformations seront faites systématiquement (opérations portant sur les cœfficients numériques essentiellement).

D'autres transformations seront gérées en fonction des valeurs attribuées à certaines variables de contrôle.

Par exemple la transformation :

$$A*(B+C) \longleftrightarrow A*B + A*C$$

sera appliquée de diverses façons suivant les valeurs de la "variable" NUMNUM.

Lorsque NUMNUM a une valeur positive l'expression sera distribuée, elle sera factorisée dans le cas contraire.

Si la valeur de cette variable est un multiple de 2, cette transformation sera effective lorsque A aura une valeur numérique, par exemple 5*(X + 3) deviendra 5*X + 15.

Si cette valeur est multiple de 3 les expressions concernées seront celles pour lesquelles A n'est ni une somme ni un numérique.

Si cette valeur est un multiple de 5 la "règle" sera appliquée aux expressions A de type somme.

Ce qui offre 15 valeurs différentes pour cette variable !

De façon analogue DENDEN gère la transformation :

$$\frac{1}{A} * \frac{1}{B+C} \longleftrightarrow \frac{1}{A*B + A*C}$$

Je vous laisse deviner les transformations gérées par DENNUM ET NUMDEN, ainsi que celles gérées par BASEXP et EXPBAS ; enfin la variable PWREXP gère l'application de la formule du binome au numérateur et/ou au dénominateur.

Avec beaucoup d'entraînement on peut obtenir de nombreuses écritures d'une expression donnée ; pour facilier la tâche de l'utilisateur 4 fonctions sont implantées dans ce module :

FLAGS( ) permet d'afficher la valeur des variables de contrôle.

EXPAND, EXPD, FCTR permettent d'obtenir des écritures plus ou moins développées d'une expression donnée (voir annexe).

MU-MATH dans nos classes

Je vois au moins trois raisons plaidant en faveur de l'utilisation de MU-MATH dans le cadre scolaire, aussi bien qu'en formation d'adultes :

- On peut, maintenant, penser que certains de nos élèves (au moins les futurs techniciens et ingénieurs) seront amenés à utiliser de tels progiciels. Il est donc nécessaire que nous leur apprenions l'existence et l'usage de ce type d'outils. Cinq leçons (en anglais) accompagnent le logiciel et permettent de se familiariser avec lui.

Ce type de logiciel peut-être utilisé en self-service par les élèves ou en classe par l'enseignant, même avec un seul ordinateur, pour faire des excercices, des recherches avec essais et erreurs, MU-MATH permettant de vérifier l'exactitude des calculs globalement ou pas à pas.

- MUSIMP est un langage de programmation que l'on peut aussi souhaiter aborder avec nos élèves ; ce serait alors une occasion (parmi d'autres) de leur montrer une forme de programmation différente de celle que l'on pratique avec les langages de style BASIC (qui a souvent été critiqué). Le logiciel contient 5 leçons (toujours en anglais) permettant de se familiariser avec le langage MUSIMP.
- On peut enfin imaginer que certaines séquences d'E.A.O. soient écrites en MUSIMP ; la structure du langage et la richesse des fonctions déjà existantes seraient alors d'une aide précieuse.

D'un point de vue technique, ce logiciel est disponible sur du matériel existant dans certains établissements équipés (compatibles IBM-PC, Apple II, ...). De plus, en France, l'Education Nationale qui semble avoir renoncé à la règle : "on fait tout, tout seul, tant mieux si on réinvente la roue" a mis MU-MATH au catalogue du plan I.P.T. Reste à ce que les enseignants apprennent à l'utiliser... dans leurs classes.

En guise de conclusion je souhaite que cet aperçu rapide ait donné envie à quelques uns de mieux connaître MU-MATH, et que ceux qui l'utilisent n'hésitent pas à combler toutes les lacunes de cet article et nous envoient des exemples d'utilisation dans les classes. ■

ANNEXE

Temps de calcul

Aucun temps de calcul n'est précisé dans l'article car celui-ci varie considérablement suivant la machine employée et la place libre en mémoire.

Par exemple le petit programme suivant permet de calculer les termes de la suite de FIBONACCI :

```
FUNCTION F(N)
WHEN N=0, 1 EXIT,
WHEN N=1, 1 EXIT,
F(N–1) + F(N–2),
ENDFUN ;
```

Le calcul de F(12) prendra moins de 5 secondes sur un APPLE lorsqu'on aura seulement chargé le langage MUSIMP, il pourra prendre plus d'une minute si l'on a chargé plusieurs modules.

Exemples réalisés avec le module ARITH

```
? RADIX(4) ;                          calcul en base 4
@ : 22                                votre ancienne base (2*4+2)
? 1/2 + 1/3 ;
@ : 11/12                             surprenant !
? F :(3+X*Y)↑2/(2+X)$                 affecte à F l'expression
? SUM(F) ;                            est-ce une somme ?
@ : FALSE                             non
? PRODUCT(F) ;                        est-ce un produit ?
@ : TRUE                              oui
? DENOM(SECOND(F)) ;                  est-ce un quotient ?
@ : TRUE                              oui
? N : NUM(F)$                         affecte à N le numérateur de F
? POWER(N) ;                          N est-il une exponentielle ?
@ : TRUE                              oui
? BASE(N) ;                           quelle est la base ?
@ : 3 + X*Y
? EXPON(N) ;                          quel est l'exposant ?
@ : 2
? LIST(F) ;                           représentation interne de F
@ : (* (^ (+ 2 X) –1) ((3+X*Y) ^2)) ( ) liste à trois éléments opérateur/opérande 1/opérante 2
? EVSUB(F,Y,X) ;                      remplace Y par X et évalue F
@ : (3+X^2)^2 / (2+X)
```

Exemple avec le module algèbre

(je vous laisse deviner le rôle de chaque fonction)

```
? F : (X–1)^2/(X+3)–(X–1)*(X–3)/(X+2)$
? EXPAND(F) ;
@ : 4*X/(2+X) – 2*X/(3+X) – X^2/(2+X) + X^2/(3+X) – 3/(2+X) + 1/(3+X)
? EXPD(F) ;
@ : (–7+6*X+X^2) / ((2+X)*(3+X))
? FCTR(F) ;
@ : ((–1+X)*(3+X)*(3–X)+(–1+X)^2*(2+X)) / ((2+X)*(3+X))
? NUMNUM : –30$
? EVAL(F) ;
@ : (–1+X)*((–1+X)/(3+X)+(3–X)/(2+X))
```

NOMBRES, CODAGES ET ALGORITHMES

Entretiens avec Marcel DUMONT - Rouen

Avant de goûter une retraite bien méritée, Marcel Dumont a mis noir sur blanc, à l'intention des bienheureux lecteurs du PLOT, un certain nombre d'idées tournant autour de "nombres, codages et algorithmes...".
C'est ce riche document que nous vous présentons à partir de ce numéro sous la forme de trois "entretiens" rédigés par Gérard Chauvat :

1. *Le codage "polylog" des naturels*
2. *Les multifactorielles et la décomposition en nombres premiers*
3. *Les arbres exponentiels et la marche en crabe.*

Premier entretien

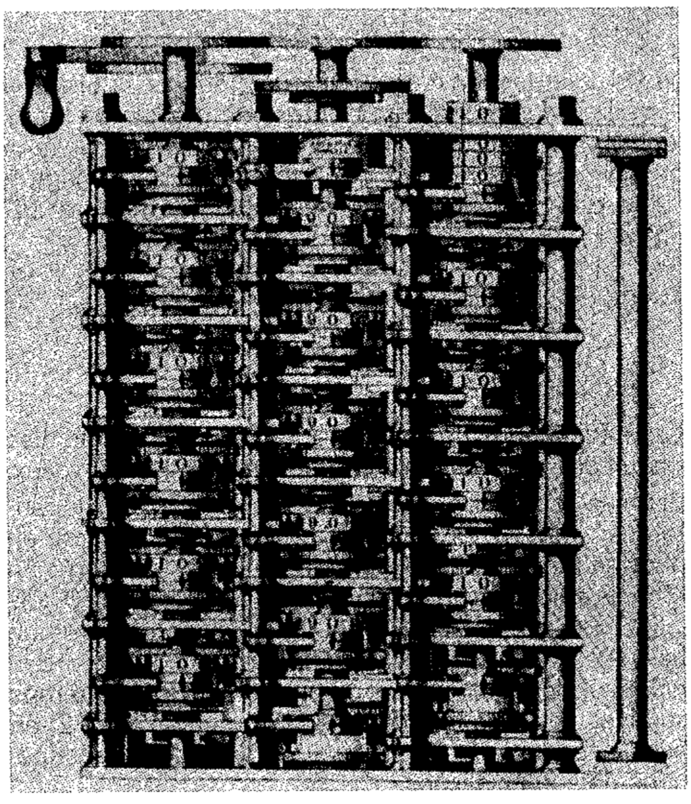
Le codage polylog des naturels

***Plot :** Commençons par le commencement.*
M.D. : Tout vient d'une idée confortée par l'expérience : nous utilisons dans les premiers niveaux de l'enseignement des mathématiques des écritures, des usages qui sont rarement remis en cause au fur et à mesure que les connaissances évoluent. Or les points de vue changent, les théories s'affinent, s'étiolent, ou explosent d'où la nécessité permanente de poser le problème des codages dans des contextes sans cesse remaniés.
***Plot :** D'où ta première étape...*
M.D. : ... invention en 1972 d'un codage positionnel des naturels en utilisant comme base la suite des premiers 2, 3, 5, 7, etc... Mais on n'écrit que les exposants, leur position indiquant le facteur premier : voir la fiche 12 de l'Ecole Libératrice du 30.04.76.
***Plot :** OK ! jetons un coup d'œil sur cette fiche.*

Charles Babbage (1791-1871) Fondateur de la Société de Statistiques de Londres, il fut, après Pascal (1623-1662), l'un des précurseurs des "computers" avec sa machine de différences finies.

Fiche 12 : Quelques aspects du numérique

Un codage des naturels
Pour comprendre un système ; il faut pouvoir le comparer à d'autres. De toute façon, il faut en sortir pour pouvoir le juger de l'extérieur. Un premier pas a été fait pour le codage des naturels : on apprend aux enfants à changer de base de numération pour mieux comprendre les techniques en base dix. En fait, le système et son fonctionnement restent les mêmes. En outre le codage habituel reflète la structure additive : commode pour les additions et soustractions, il se révèle moins commode pour les multiplications. Voici une ébauche de codage qui peut être un point de départ vers de nombreuses notions.



Fiche élève

1 - Observez le tableau (fig. 1). Chaque naturel est codé par un mot de longueur finie. Exemple : 30 s'écrit 1 1 1. Attention : la place des chiffres est importante (regardez le nom de chaque colonne). Trouvez le système de codage. Continuez le tableau jusqu'au nombre 200 (chaque nombre l'un après l'autre.).

2 - Observez les nombres situés dans la première colonne. Essayez de continuer la première colonne toute seule en devinant la règle.

3 - Observez les nombres situés dans la 2e colonne. Continuez la 2e colonne toute seule en devinant la règle. Faites de même pour la 3e, la 4e colonne etc., et vérifiez en regardant les codes obtenus pour les naturels suivants.

4 - Multipliez 2 naturels : cherchez dans le tableau le code du résultat obtenu. Comparez avec les codes des 2 naturels choisis. Recommencez avec d'autres. Expliquez la règle obtenue.

5 - Cherchez des jeux ou activités dont les règles ressemblent aux règles de remplissage des colonnes.

---

1) A ton avis, que représente ce tableau ? Pourrais-tu le continuer ?

2) Pose le plus grand nombre de questions possibles concernant ce tableau en essayant de répondre à quelques unes.

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	*etc.*
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
14	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
18	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
20	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
24	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
27	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
30	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
32	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
33	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
34	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
35	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
36	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
38	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
39	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
40	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
⋮														

Figure 1

M.D. : La question 4 a pour but de préparer les élèves à l'étude de fonctions importantes comme les fonctions log. dans un contexte global et en même temps de faire observer une structure multiplicative dont l'image à l'aide d'un codage approprié est une structure additive.

Exemple :	21	s'écrit	0101
	x36	s'écrit	+ 22
	756	s'écrit	2301

La multiplication des naturels codés habituellement se traduit par une addition en colonne des codes nouveaux.

Si on se souvient que les mots "exposants" et "logarithmes" sont synonymes (sous un certain aspect), on pourrait appeler ce système de codage : "polylog". En effet, la suite des nombres premiers 100 ... etc., 0100 ... etc., 00100 ... etc., 000100 etc., joue le rôle d'une base. Le codage est donc analogue à un codage vectoriel. Il offre l'avantage de présenter en même temps sous les yeux les fonctions logarithmes en base 2, en base 3, en base 5, etc. Mais il s'agit là de préoccupations déjà spécialisées.

Plot : D'accord pour polylog ! Notons que ce codage est évidemment à rapprocher des "orgues numériques" qui permettent de "visualiser" les PGCD et PPCM de deux ou plusieurs entiers avec un rapprochement (heureux ?) de "inf" avec "inter" et "sup" avec "union" (sortez vos treillis !!!).

Mais parlons un peu des questions 2 et 3...

M.D. : Les questions 2 et 3 sont très importantes pour plusieurs raisons. Observons les algorithmes dans chaque colonne du tableau.

Colonne 2 :
1.0.2.0.1.0.3.0.1.0.2.0.1.0.4.0. etc.

Colonne 3 :
1.0.0.1.0.0.2.0.0.1.0.0.1.0.0.2.0.0.1.0.0.3.0. etc.

La présence et la régularité des 0 donnent des indications sur les classes modulo. Par exemple, colonne 3, c'est-à-dire modulo 3, les exposants non nuls correspondent aux multiples de 3 les deux 0 intercalés correspondent aux deux autres classes. Naturellement l'observation comparée des différentes colonnes suffisamment longues, permet de voir directement des intersections ou réunions de classes de multiples, etc. Pour faciliter l'observation, il suffirait de remplacer les chiffres non nuls du tableau par des points.

Ayant ainsi ouvert une porte vers une activité numérique traditionnelle nous l'abandonnons. Pour mieux observer les algorithmes, nous n'écrivons plus les 0 intermédiaires. Nous obtenons ainsi :

Colonne 2 :
1.2.1.3.1.2.1.4.1.2.1.3.1.2.1.5.1.2.1.3.1.2.1.4.... 2.... etc.

Colonne 3 :
1.1.2.1.1.2.1.1.3.1.1.2.1.1.2.1.1.3.1.1.2.1.1.2.1.1.4.... etc.

Colonne 5 :
1.1.1.1.2.1.1.1.1.2.1.1.1.1.2.1.1.1.1.2.1.1.1.1.3.1.1.... etc.

Colonne 7 :
1.1.1.1.1.1.2.1.1.1.1.1.1.2.1.1.1.1.1.1.2.1.1.1.1.1.1.2.... etc.

Remarquons qu'il est possible de découvrir les algorithmes c'est-à-dire les règles de succession des chiffres dans chaque colonne sans pour autant être capable de les exprimer clairement : un langage de programmation conviendrait évidemment. Mais cela montre bien que l'adulte comme l'enfant peut très bien être capable de "faire" et "comprendre" quelque chose sans pour autant disposer d'un langage qui lui permette de décrire sa pensée. L'importance de ces algorithmes, qui ont la même structure d'ailleurs, à une constante près, tient à ce qu'il est possible de prévoir le code naturel, c'est-à-dire sa décomposition en produit de facteurs, sans effectuer la moindre division.

***Plot :** Et la question 5 ?*

M.D. : On remarquera que l'algorithme des exposants de 2 est revêtu de plusieurs interprétations : Tour de Hanoï, frontières partageant en deux, compteurs, codes, cycliques. Les algorithmes des exposants de 3, 5, 7 etc. n'ont pas d'autres interprétations que celles des compteurs usuels ou cycliques. Il serait intéressant soit de généraliser les interprétations précédentes, soit mieux d'en trouver d'autres plus pertinentes (voir par exemple la frontière curieuse partageant le plan en trois régions et telle que tout point de la frontière touche les trois régions : *cf. article de J.P. Eckmann, La Recherche, Février 83).*

***Plot :** Parfait ! Voilà du pain sur la planche... Et tu as bien encore d'autres idées d'activités en attendant le prochain numéro du Plot ?*

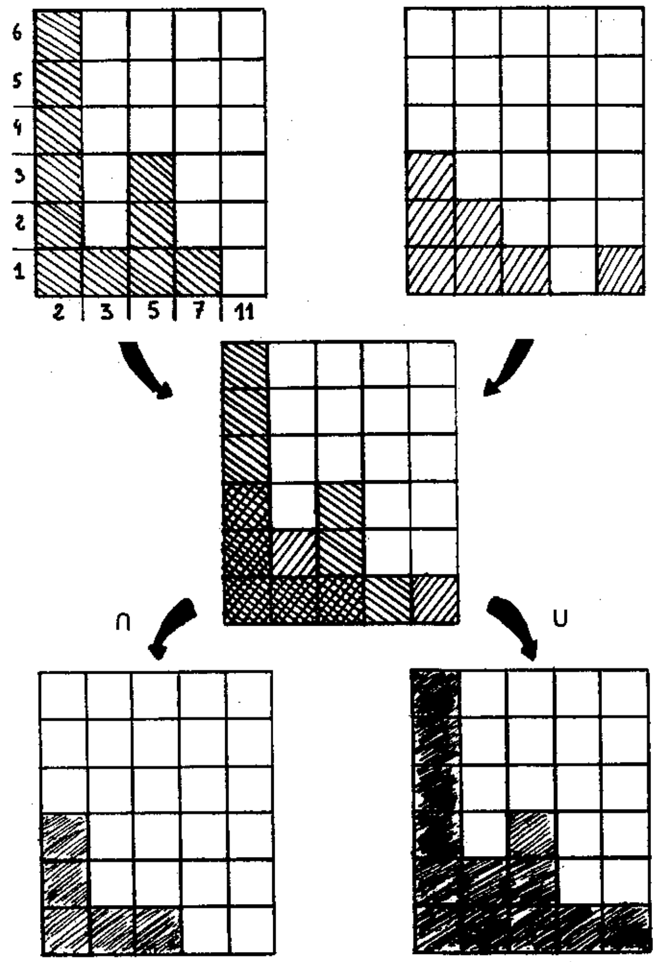
M.D. : Etablir les liens entre un code exponentiel et le code habituel dans la même base.

Exemple en base 3 :
1 2 10 11 12 20 21 22 100 101
0 0 1 0 0 1 0 0 2 0
102 110 111 112 120 121 122 200
0 1 0 0 1 0 0 2

Orgues numériques

$A=168000=2^6 \times 3 \times 5^3 \times 7 \longrightarrow (6, 1, 3, 1)$

$B=3960=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11 \longrightarrow (3, 2, 1, 0, 1)$



$\longrightarrow (3, 1, 1)$
$PGCD(A;B)=2^3 \times 3 \times 5=120$

$\longrightarrow (6, 2, 3, 1, 1)$
$PPCM(A;B)=2^6 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 11=5544000$

• La multiplication des naturels se traduit facilement en codage "polylog" par l'addition des codes *(cf. fiche 12 - EL).* Essayer d'établir un algorithme traduisant l'addition des naturels, ou simplement l'addition de I c'est-à-dire le successeur d'un code ! On remarquera que le code habituel dans une base donnée contient toute l'information du passé du compteur correspondant (colonne du tableau) alors que le code polylog fournit l'état de tous les compteurs à l'instant correspondant (ligne du tableau).

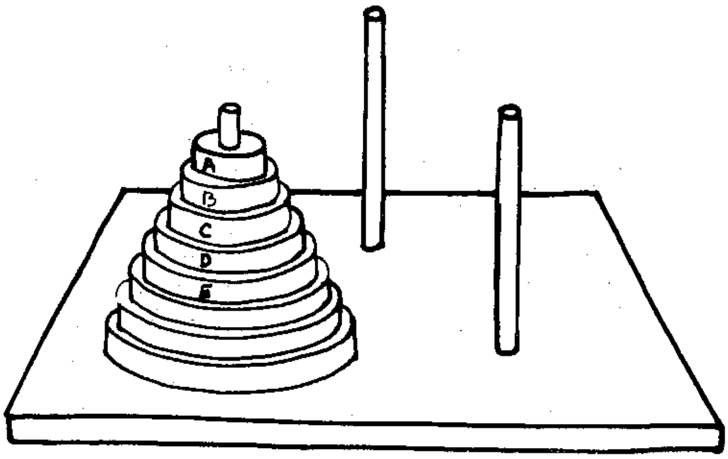
• A ce sujet, trop souvent on étudie des propriétés de naturels en oubliant que le mode d'expression (ou code) a privilégié la base dix c'est-à-dire les facteurs 2 et 5. De même qu'on essaie de préciser les liens entre les propriétés d'un "objet" et celles de l'espace dans lequel il est "plongé", il serait très important de préciser les liens entre les propriétés d'un "objet" et celles du moyen d'expression utilisé pour le décrire et les décrire. Comme en mathématiques il n'y a pas d'objets sans moyen d'expression, la seule façon est de diversifier ceux-ci. (Penser aux sciences de la nature, aux moyens d'observations, aux perceptions et... aux observateurs).

• Toute élévation d'un naturel à une puissance n-ième se traduit en polylog par une homothétie (c'est-à-dire multiplication par n). Penser alors à la conjecture de Fermat en termes d'homothéties et de translations sur le tableau des polylogs.

• Coder en polylog la suite des naturels appartenant a une même classe modulo p premier ou non, ou modulo p^k. Examiner les algorithmes ; on retrouve les algorithmes exponentiels avec des pertubations : lesquelles et pourquoi ? (Jeter un coup d'œil sur les p-adiques !).

• Coder en polylog les cœfficients binomiaux (nombres de Pascal !), polynomiaux (ou Pascal multidimensionnel !!) et des nombres variés (Young, Catalan, Bell, Stirling,... j'en passe et des meilleurs, bref le foutoir "combinatoire" à propos duquel l'enseignement garde pudiquement le silence alors qu'il constitue une réserve de chasse aux retombées importantes, pas seulement sur le plan algorithmique).

Tours de Hanoï



Comment déplacer les disques d'une tige à une autre de façon à obtenir un empilement identique à l'empilement initial, sans jamais poser sur un disque un autre disque plus grand ?

Des disques troués sont enfilés par ordre de taille sur une pointe. Il s'agit de transporter la pile de disques sur une autre pointe en disposant d'une pointe intermédiaire et en appliquant les 2 règles suivantes : on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois, on ne doit jamais placer un grand disque sur un disque plus petit. Si on désigne les disques par les lettres a, b, c, d, etc. par ordre de taille croissant, alors l'algorithme le plus court est :

pour un disque : a
deux disques : a b a
trois disques : a b a c a b a
quatre disques : a b a c a b a d
a b a c a b a
etc. : abacabadabacabae
abacabadabacabaf...

(où a se déplace toujours dans le même sens sur les 3 pointes. C'est l'algorithme des exposants du facteur 2).

Compteurs

Compteurs binaires

Chaque roulette a deux faces : 0 et 1. Si on désigne par a, b, c, d, etc. chaque roulette, en commençant par celle des unités, la méthode usuelle de les faire tourner est celle-ci :

a.ab.a abc.a.ab.a.abcd.a.ab.a.abc.a.ab.a.abcde...

a b c d ...	Mouvements	Codes binaires	Entiers
0 0 0 0		0	0
1 0 0 0	a	1	1
0 1 0 0	a.ab	10	2
1 1 0 0	a.ab.a	11	3
0 0 1 0	a.ab.a.abc	100	4

A certains moments plusieurs roulettes doivent tourner en même temps. Si on veut obtenir tous les numéros en ne faisant tourner qu'une seule roulette à chaque fois alors l'algorithme est celui-ci :

a.b.a.c.a.b.a.d.a.b.a.c.a.b.a.e...

a b c d	Mouvements	Codes binaires	Entiers
0 0 0 0		0	0
1 0 0 0	a	1	1
1 1 0 0	a.b	11	3
0 1 0 0	a.b.a	10	2
0 1 1 0	a.b.a.c	110	6
1 1 1 0	a.b.a.c.a	111	7
1 0 1 0	a.b.a.c.a.b	101	5
0 0 1 0	a.b.a.c.a.b.a	100	4
0 0 1 1	a.b.a.c.a.b.a.d	1100	12

Compteurs en base trois

Chaque roulette a trois faces : 0, 1, 2.

• méthode usuelle engendrant les entiers dans l'ordre naturel :
a.a.ab.a.a.ab.a.a.abc.
a.a.ab.a.a.ab.a.a.abc.
a.a.ab.a.a.ab.a.a.abcd.

• méthode ou on ne fait tourner qu'une seule roulette à chaque fois :
a.a.b.a.a.b.a.a.c.a.a.b.a.a.b.
a.a.c.a.a.b.a.a.b.a.a.d...

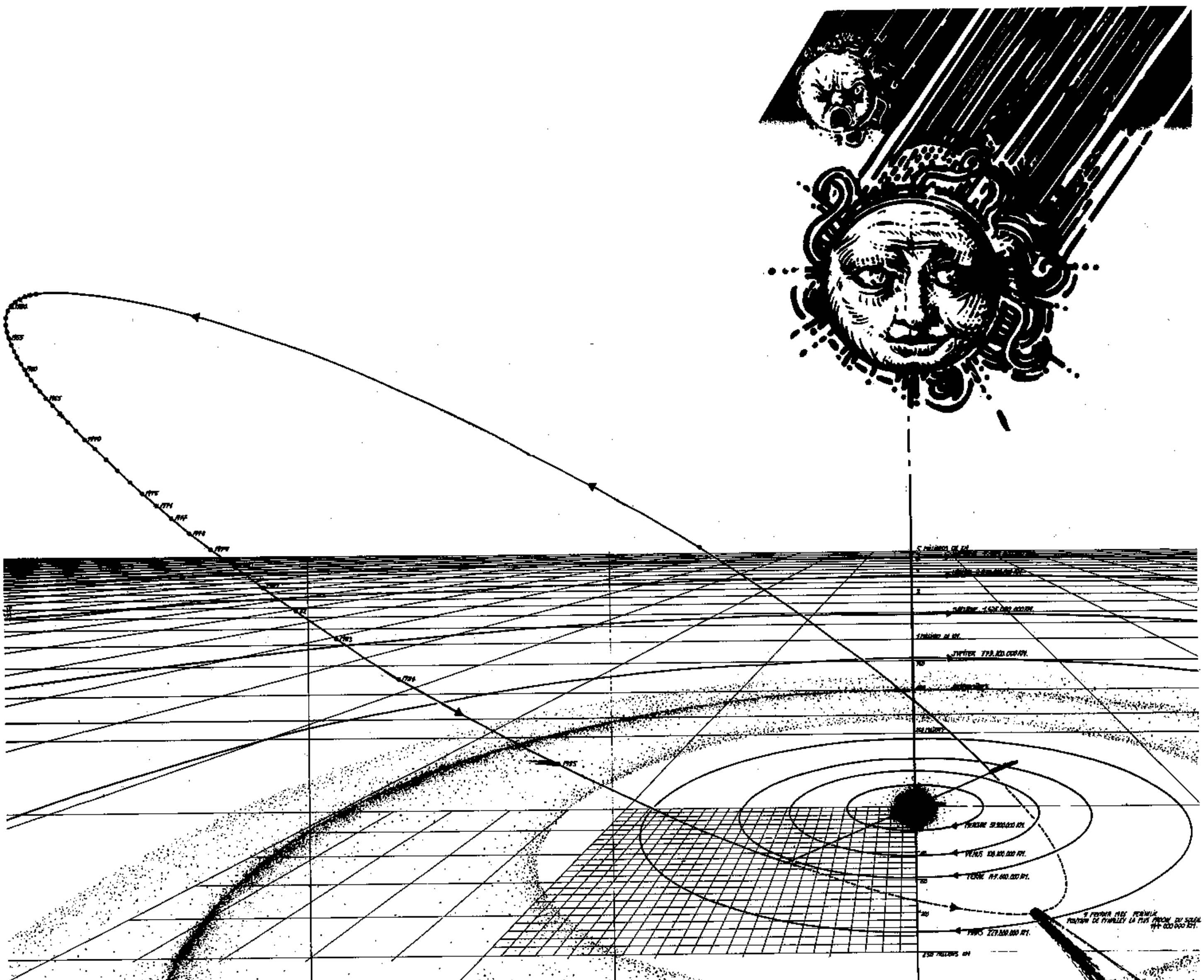
(à suivre) ■

LA QUEUE DE LA COMETE DE HALLEY

Limoges

"Comètes que l'on craint à l'égal du tonnerre
Cessez d'épouvanter les peuples de la Terre,
Dans une ellipse immense, achevez votre cours ;
Remontez, descendez près de l'astre des jours,
Lancez vos feux, volez et revenant sans cesse
Des mondes épuisés ranimez la vieillesse"

(Voltaire, épître à la Marquise du Châtelet - 1738)



Cet article, à l'aspect rétro, n'a que la prétention de rappeler quelques souvenirs à certains d'entre nous. On y trouve un petit problème de résolution de triangle qui permet une évaluation grossière de la longueur de la queue d'une comète. Il est inspiré d'un calcul présenté dans un bulletin de 1914 de la Société Astronomique de France.

Position du problème

On suppose qu'à un instant t, on voit la queue d'une comète C sous un angle $\widehat{\alpha}$ depuis la Terre T. (voir figure 1).

On suppose également que la queue de la comète est dans le prolongement du rayon vecteur de la comète (CS ; s étant le soleil) et que la figure S C T Q est plane.

On connaît :
- la distance Terre-Soleil : d (on la trouve dans les éphémérides).
- la distance Soleil-Comète : r et la distance Terre-Comète : (Elles sont données dans les éphémérides de la comète).

On cherche la longueur CQ de la queue de la comète.

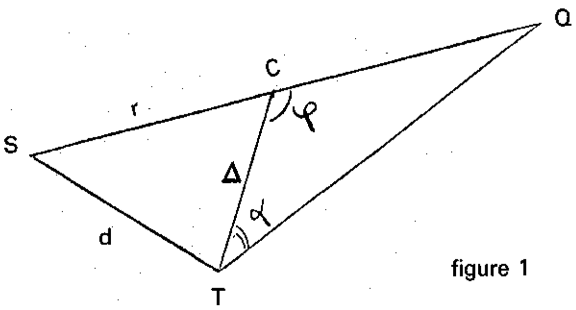


figure 1

Solution proposée

(les notations sont celles de l'époque !)

On pose $r + d + \Delta = 2\,p$

On a $$\mathrm{tg}\ \frac{SCT}{2} = \sqrt{\frac{(p-r)\,(p-\Delta)}{p\,(p-d)}}$$

On détermine ainsi l'angle $\widehat{SCT}$ puis l'angle $\widehat{Q}$ du triangle CTQ

$\widehat{Q} = \widehat{SCT} - \widehat{\alpha}$ ou $\widehat{Q} = 180° - (\alpha+\varphi)$ en posant $\varphi = \widehat{QCT}$

Dans ce triangle CT , on a enfin :

$$\frac{CQ}{\sin\alpha} = \frac{CT}{\sin Q} \quad \text{et} \quad CQ = \frac{\Delta \sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

CQ est ainsi exprimée en unités astronomiques.

Remarques

La formule proposée pour le calcul de l'angle $\widehat{SCT}$ n'est peut-être pas celle que l'on utiliserait aujourd'hui ! Le calcul de SCT, par exemple par l'égalité :
$d^2 = r^2 + \Delta^2 - 2\,r\Delta \cos SCT$ semble aussi direct !.

Mais il faut se rappeler qu'en 1910 les calculs s'effectuaient avec les tables de logarithmes et on peut constater que la formule utilisée est particulièrement bien adaptée pour un calcul logarithmique. Aujourd'hui, nous avons besoin de prendre moins de précautions : la calculatrice ou le micro-ordinateur s'adaptent à toutes les situations !

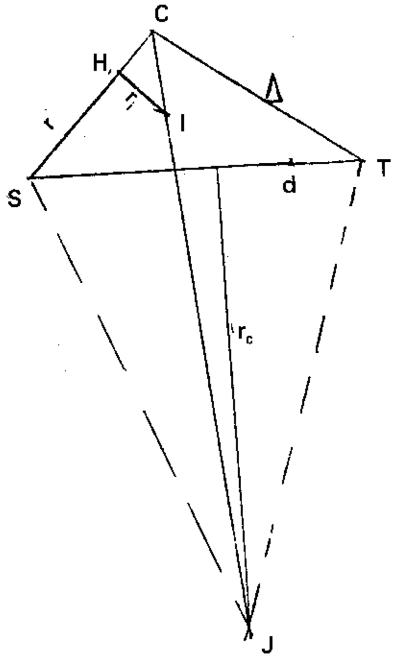


figure 2

$$\mathrm{tg}\ \frac{SCT}{2} = \sqrt{\frac{(p-r)\,(p-\Delta)}{p\,(p-d)}}$$

(voir figure 2)

Dans le triangle SCT, soient I le centre du cercle inscrit, H la projection orthogonale de I sur (CS), J le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{C}$.

On note : r_i : rayon du cercle inscrit

r_c, r_s, r_t : rayons des cercles exinscrits respecvement dans les angles $\widehat{C}, \widehat{S}, \widehat{T}$ du triangle CST.

On a : $$\mathrm{tg}\ \frac{C}{2} = \frac{HI}{HC} = \frac{r_i}{p-d}$$

Des calculs d'aire simples donnent :

aire SCT $= \frac{1}{2}\, r_i \times p$ et

(par exemple avec aire SCT = aire CSJ + aire CTJ − aire STJ)

$$r_i\, p = r_c\,(p-d) = r_s\,(p-\Delta) = r_t\,(p-r)$$

En utilisant la formule de Héron :

aire SCT $= \sqrt{p\,(p-r)\,(p-d)\,(p-\Delta)}$,

on obtient :

$$\mathrm{tg}\ \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-r)\,(p-\Delta)}{p\,(p-d)}}$$

Exemple et commentaire

Le 16 mai 1910, la queue de la comète de Halley a été vue sous un angle de 110°.
Les éphémérides donnent pour ce jour :
$d = 1{,}011$; $r = 0{,}813$; $\Delta = 0{,}224$ (en unités astronomiques)
on obtient mes $\widehat{SCT} = 148° \, 38'$ et $CQ = 0{,}3371$ UA,
soit en kilomètres : $CQ = 50\,396\,450$ km
On retient de cela que la comète de Halley développait une queue s'étendant sur 50 millions de km soit le tiers de la distance terre-soleil, ce qui est assez impressionnant !
Cette méthode n'est pas d'une grande précision : les mesures qu'elle requiert sont difficiles à réaliser. Déterminer les limites exactes de la queue d'une comète, sachant que la plupart des comètes visibles à l'œil nu (ou non) ne sont que des tâches floues et, de plus, basses sur l'horizon, relève souvent de l'exploit.

Quelques mots sur les queues cométaires

Malgré une grande variété, on classe les queues cométaires en deux types principaux selon la courbure qu'elles ont par rapport à la direction soleil-noyau de la comète.
Les queues de type I sont rectilignes et atteignent des longueurs assez grandes, parfois supérieures à la distance terre-soleil. Leur direction fait un angle voisin de 5° avec la direction soleil-noyau. Ces queues formées de plasma (le plasma étant un gaz ionisé) n'apparaissent, en général, qu'au voisinage du soleil, à moins de deux unités astronomiques de celui-ci.
Les queues de type II présentent deux différences essentielles : elles sont courtes, larges, beaucoup plus courbées et sont formées de poussières.
(Voir figure 3).

On a constaté que les comètes périodiques ont une queue de type II sauf... la comète de Halley qui, depuis des siècles, arbore une magnifique queue de type I. Quelques comètes, enfin, se singularisent en ayant une queue de chaque type (comète Mkros) ou en n'ayant pas de queue !
Pour terminer, signalons que la pression de radiation (exercée par la lumière) pour une part, et le vent solaire, pour une autre part, sont responsables de la formation des queues.

L'éclat d'une comète est fourni par la chevelure, le noyau étant trop petit et la queue trop ténue pour apporter une contribution significative à l'éclat.

"Nous avons ici une comète qui est bien étendue,
C'est la plus belle queue qu'il est possible de voir.
Tous les grands personnages sont alarmés
et croient que le ciel, bien occupé à leur perte,
en donne des avertissements par cette comète..."

Mme de Sévigné - Lettre au Comte de Bussy
2 janvier 1681

> ### *Problèmes chocs en guise de conclusion*
>
> *1 - Comment est dirigée la queue de la comète ?*
>
> *2 - Pourquoi fait-il froid l'hiver et chaud l'été ?*

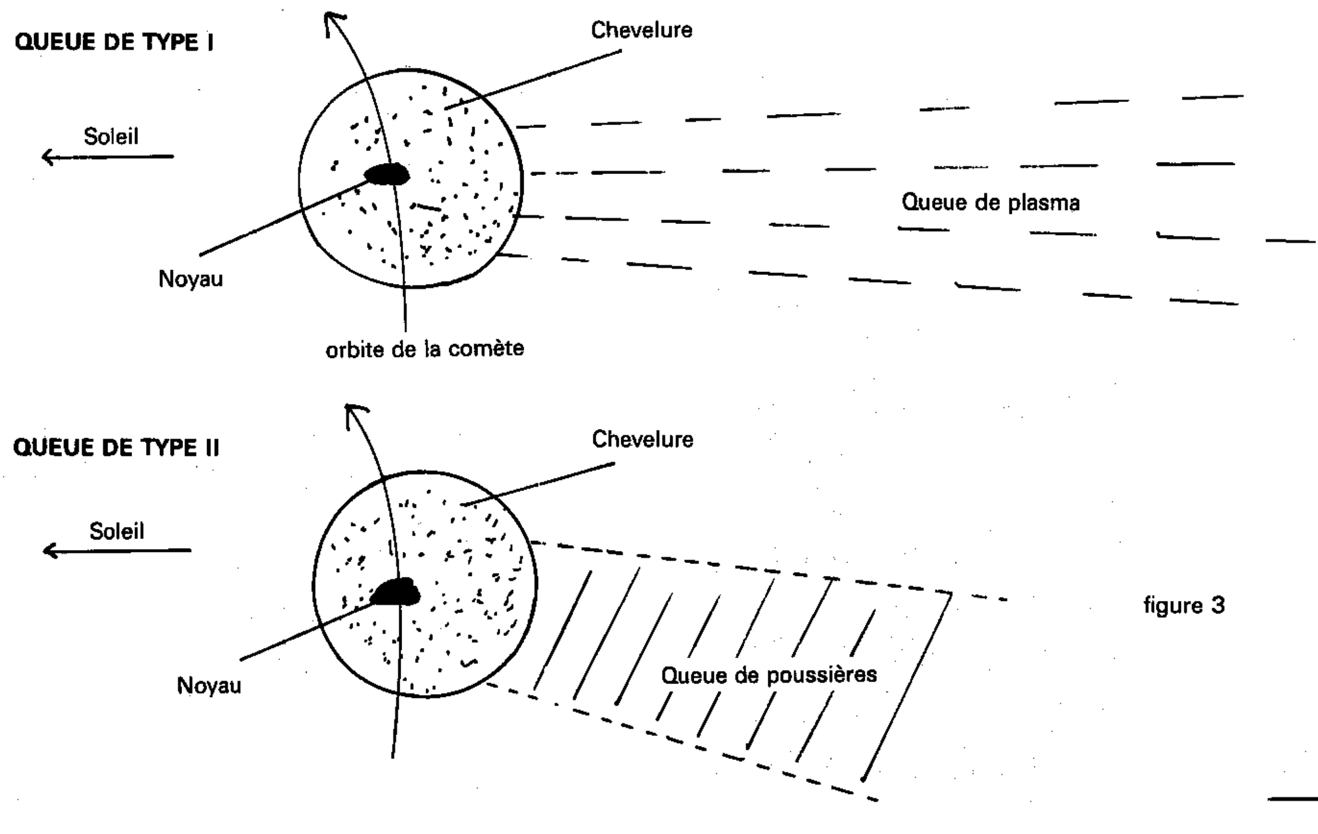
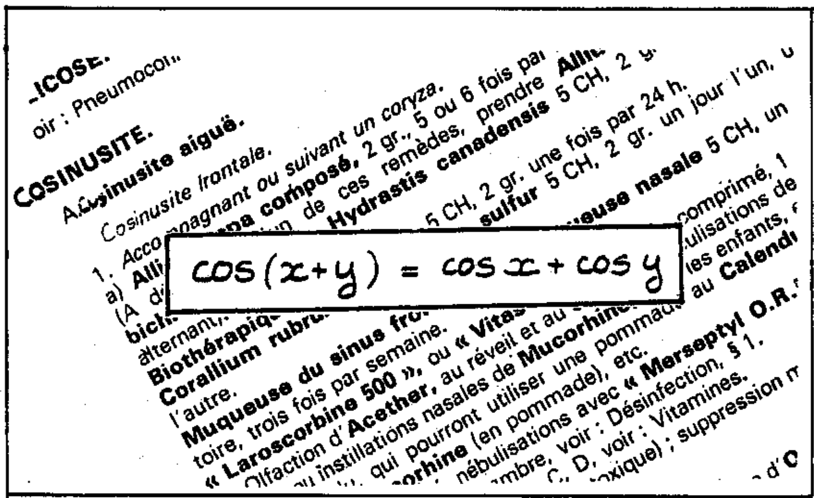


figure 3

Annexe 2

On peut même arriver en classe avec une "belle" erreur : voici un énoncé de problème sur ce thème, avec, en prime l'allure de la courbe... Etonnant, non ?



Enfin une formule "trigo" simple et facile à retenir :

$$\cos(x + y) = \cos x + \cos Y$$

Bien sûr, elle n'est pas vraie pour tous les x et tous les y... mais peut-être pour certains x et certains y.

C'est l'objet de ce problème : quel est l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$ (*).

En d'autres termes, on va étudier et tracer la courbe φ d'équation (*) dans un repère orthonormé. On prendra x et y en degrés.

A Symétries de la courbe $\mathcal{C}$

1 - Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$

2 - Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport au point O ;
En déduire que $\mathcal{C}$ est aussi symétrique par rapport à la droite $\Delta' : y = -x$

3 - Si A et B sont les points (180, 180) et (180, - 180), montrer qu'on peut restreindre le domaine d'étude à l'intérieur du triangle OAB.
Comment compléter alors le tracé de $\mathcal{C}$ dans tout le plan ?

B Affinons le régionnement :

Dans toute la suite, x appartiendra à [0,180]

1 - Montrer que (*) $\Leftrightarrow \sin\left(y + \frac{x}{2}\right) = \dfrac{2\sin^2 x/2 - 1}{2\sin x/2}$

2 - On pose $\varphi(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{2x}$.
Etudier et tracer le graphe de $x \rightarrow \varphi(x)$.
Puis résoudre les inéquations : $-1 \leq \varphi(x) \leq 1$

3 - On pose $x_0 = \text{Arc sin}\left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$

Montrer que $x \in [x_0, 180] \Leftrightarrow \varphi\left(\sin\dfrac{x}{2}\right) \in [-1, 1]$

Que peut-on en déduire pour ?

C De quelles fonctions $\mathcal{C}$ est-elle le graphe ?

1 - Montrer que le point $\left(x_0, -90 - \frac{x_0}{2}\right) \in \mathcal{C}$

2 - On suppose $y + \frac{x}{2} \in [-90, 90]$

A quelle région du plan cela correspond-il ?
Montrer que dans cette région, $\mathcal{C}$ contient le graphe Υ de la fonction $f : x \mapsto -\frac{x}{2} + \text{Arc sin}\,[\varphi(\sin x/2)]$

3 - Dresser un tableau de valeurs approchées de f pour x dans l'intervalle $[x_0, 180]$, et tracer le graphe Υ dans un repère orthonormé (1 cm = 20 degrés).

D Tracé de la courbe $\mathcal{C}$

1 - Tracer $\sigma_{\Delta'}(\Upsilon)$ où $\sigma_{\Delta'}$ est la réflexion d'axe Δ'. Soit $\mathcal{C}_1 = \Upsilon \cup \sigma_\Delta(\Upsilon)$

2 - On suppose à présent que $y + \frac{x}{2} \in [90, 180]$

Montrer que, si (x,y) est un point de $\mathcal{C}$, alors $y = \mathcal{Y}(x)$ (1) où $\mathcal{Y}(x) = -x - f(x) + 180$

Et que le graphe H de $\mathcal{Y}$ est l'image de $\mathcal{C}$, par l'application s : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -x - y + 180 \end{cases}$

Déterminer la nature de s.
Utilisez s pour tracer H à partir de $\mathcal{C}_1$

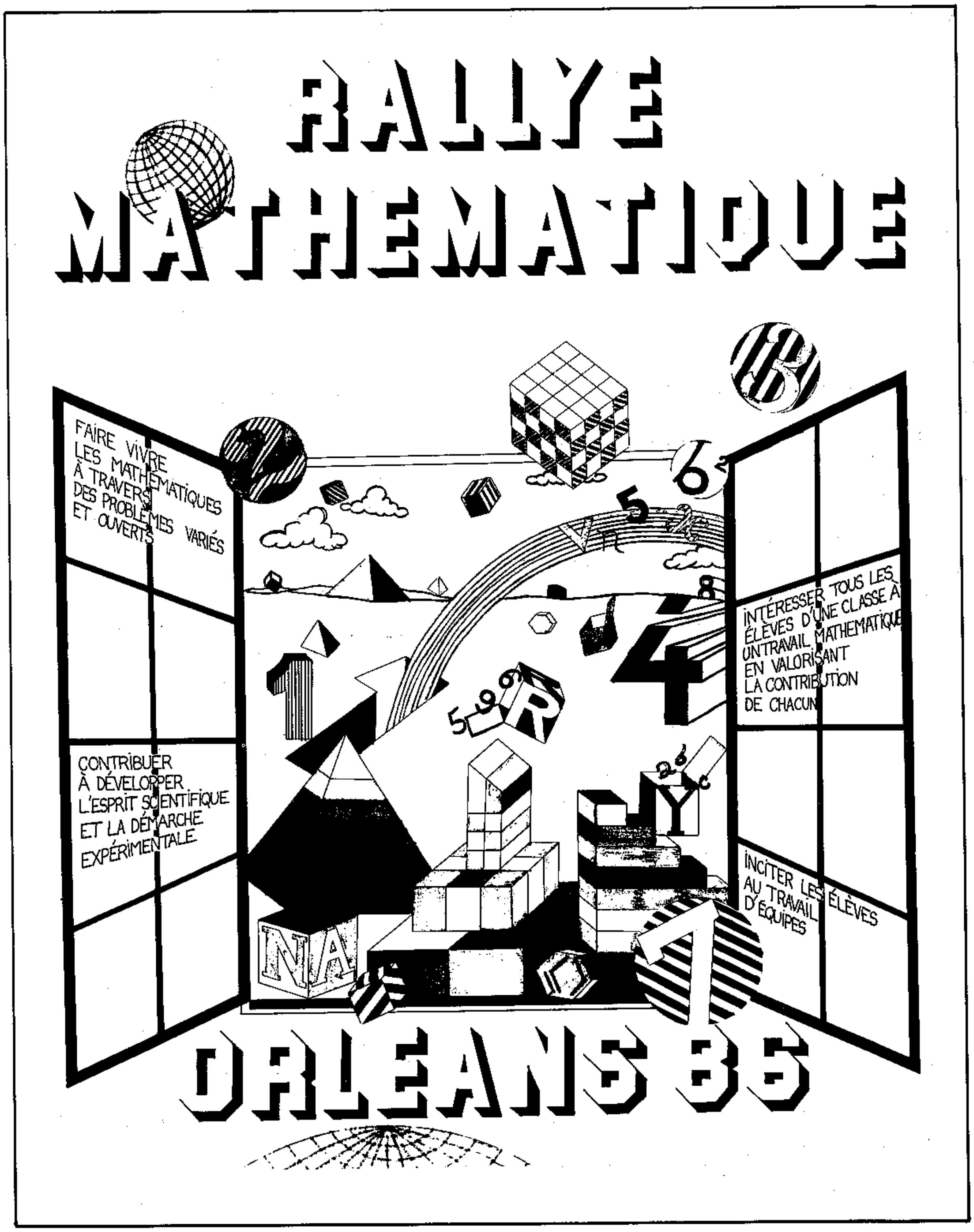
3 - Compléter C_1, U H pour obtenir le tracé de $\mathcal{C}$ pour $x \in [-180, 180]$ et $y \in [-180, 180]$

4 - Enfin, dans un autre repère orthonormé (1 cm = 40 degrés), compléter le tracé précédent pour obtenir l'allure de $\mathcal{C}$, dans tout ce plan.

CONCOURS, RALLYES, OLYMPIADES, DU NOUVEAU...

Catherine ROLLIN
et Pierre DAUDIN

Comment motiver les élèves, leur donner le goût de "faire des mathématiques" ? Obsédante question pour tous les enseignants Concours, rallyes, olympiades sont une des réponses possibles, réponses qui, en même temps, posent... question ! Quelle formule trouver pour "accrocher" aussi bien les "bons" élèves et les "autres", tout en gardant un esprit de compétitivité, d'émulation entre élèves, entre classes, entre écoles. Voici deux exemples différents qui innovent dans cette voie à Orléans et en Côte d'Ivoire.



A Orléans, Mars 86

Un rallye pas comme les autres Pourquoi !

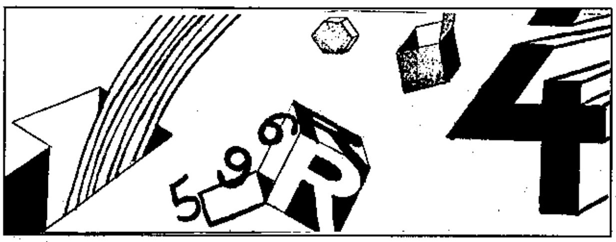
Parce qu'"ORLEANS 86" est un rallye mathématique organisé entre des groupes-classes d'un même niveau (3ᵉ des collèges et 2ᵈᵉ des lycées) et non un concours individuel entre élèves.

Ses objectifs didactiques et pédagogiques, communs aux autres rallyes, sont entre autres, de contribuer à développer l'esprit scientifique et la démarche expérimentale, de faire vivre les mathématiques à travers des situations-problèmes les plus diverses,... Mais il a aussi des objectifs plus spécifiques, par exemple :
- intéresser tous les élèves d'une même classe à une activité mathématique,
- les inciter à travailler en équipes.

Ce rallye est organisé par une équipe composée des IPR de l'Académie, d'Universitaires de l'IREM et de Professeurs de collège et lycée.

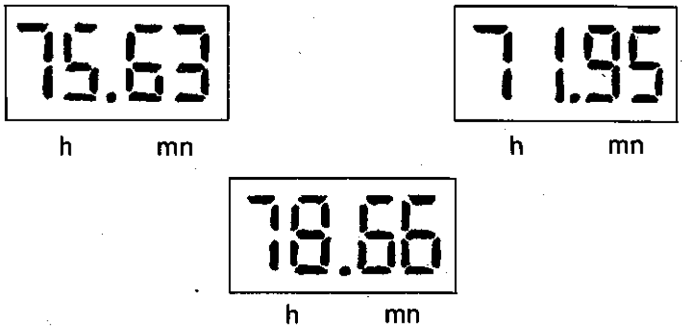
Après deux épreuves préparatoires qui donnent l'occasion aux professeurs d'entraîner leurs classes à cette nouvelle forme de compétition, aura lieu l'épreuve finale à l'issue de laquelle seront désignées les classes gagnantes. Chaque épreuve consiste à gérer la résolution d'un lot de 12 exercices scolaires ou non, variés dans leurs thèmes (géométrique, numérique...), dans leurs difficultés (de 3 niveaux différents) et dans leurs genres (manipulatoire, combinatoire...). Chaque classe s'organise comme elle l'entend. Les élèves se répartissent les tâches en équipes, confrontent leurs solutions pour chaque exercice, en choisissent une seule qu'ils rédigent sur le dossier-réponse remis au début de l'épreuve.

Grâce au concours matériel et financier de nombreux organismes ou entreprises, une distribution de prix est prévue.

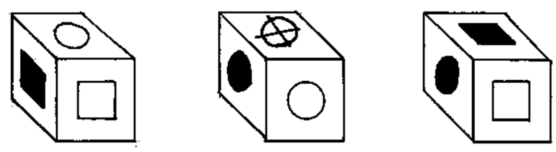


Voici des exercices proposés à la première épreuve d'essai de 2 heures :

A Cette horloge a un affichage numérique défectueux : il y a toujours, et pour chaque chiffre, soit un segment allumé en trop, soit un segment qui manque. Sachant que ces trois affichages ont été relevés pendant une période inférieure à 40 minutes (présentés ici dans un ordre qui n'est pas nécessaire chronologique), quelle heure était-il véritablement lors du dernier affichage ?



B Voici trois vues du même cube dans trois positions différentes :



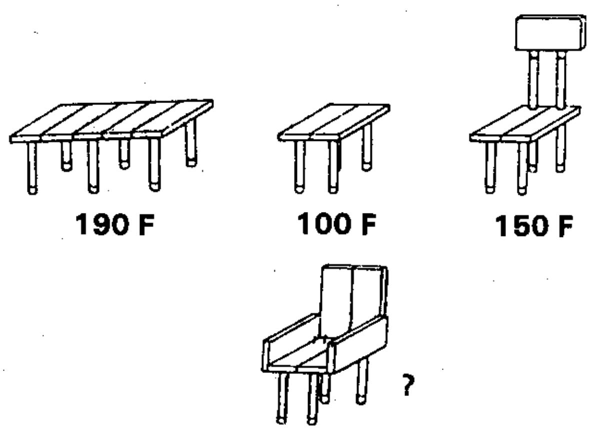
Sur chacune des six faces du cube, on a dessiné une des 5 figures :

□ ■ ⊕ ○ ●

L'une de ces figures se trouvent donc nécessairement sur deux faces différentes.
Quelle est cette figure, sachant que dans les trois vues ci-dessus, elle n'est jamais sur la face inférieure ?

C Lequel des deux nombres :
A = 1985 (1 + 2 + ... + 1986)
et B = 1986 (1 + 2 + ... + 1985) est le plus grand ?

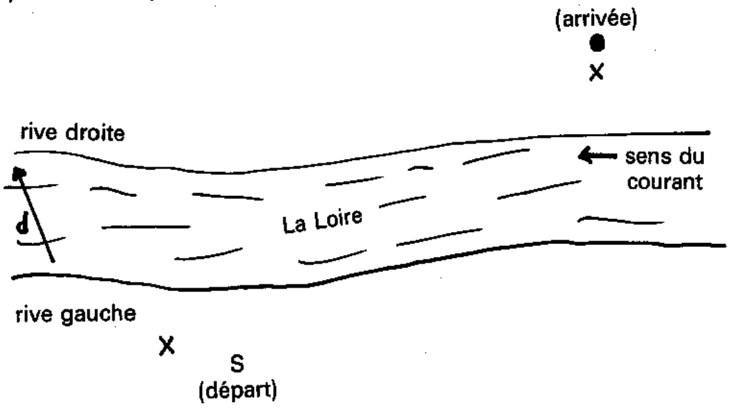
D Ce marchand de meubles en kit est très logique quand il fixe ses prix.
D'après vous, combien devrait coûter le fauteuil ?



E Un peintre met deux heures pour peindre un mur. Un autre peintre met trois heures pour peindre le même mur.
Combien de temps auraient mis les deux peintres pour peindre ensemble ce même mur ?

F Traversée de la Loire

Jeanne désire rejoindre le point O en partant de S, à pied sur terre et à la nage dans l'eau. Sachant qu'à cause du courant elle ne peut nager dans l'eau que selon la direction d, tracer sur la feuille n° 12 le trajet le plus court possible.



Après cette première épreuve préparatoire, les professeurs et les animateurs ont confronté leurs pratiques et leurs observations. Il est apparu :

- que les différentes classes se sont organisées de manière très diverse tant dans la phase de recherche que dans la phase de rédaction,
- que la validation nécessaire des solutions par le groupe ou par la classe n'a pas été systématique ; les élèves ne sont peut-être pas habitués à une telle pratique,
- que les élèves les moins motivés par les mathématiques ont participé activement aux recherches : "c'est présenté différemment, alors on a plus envie de chercher !"*, "ça fait moins math !"*,
- que les élèves ont réellement pris conscience de l'efficacité du travail en équipe : "c'est mieux de travailler en groupe, ça nous a drôlement aidé !"*

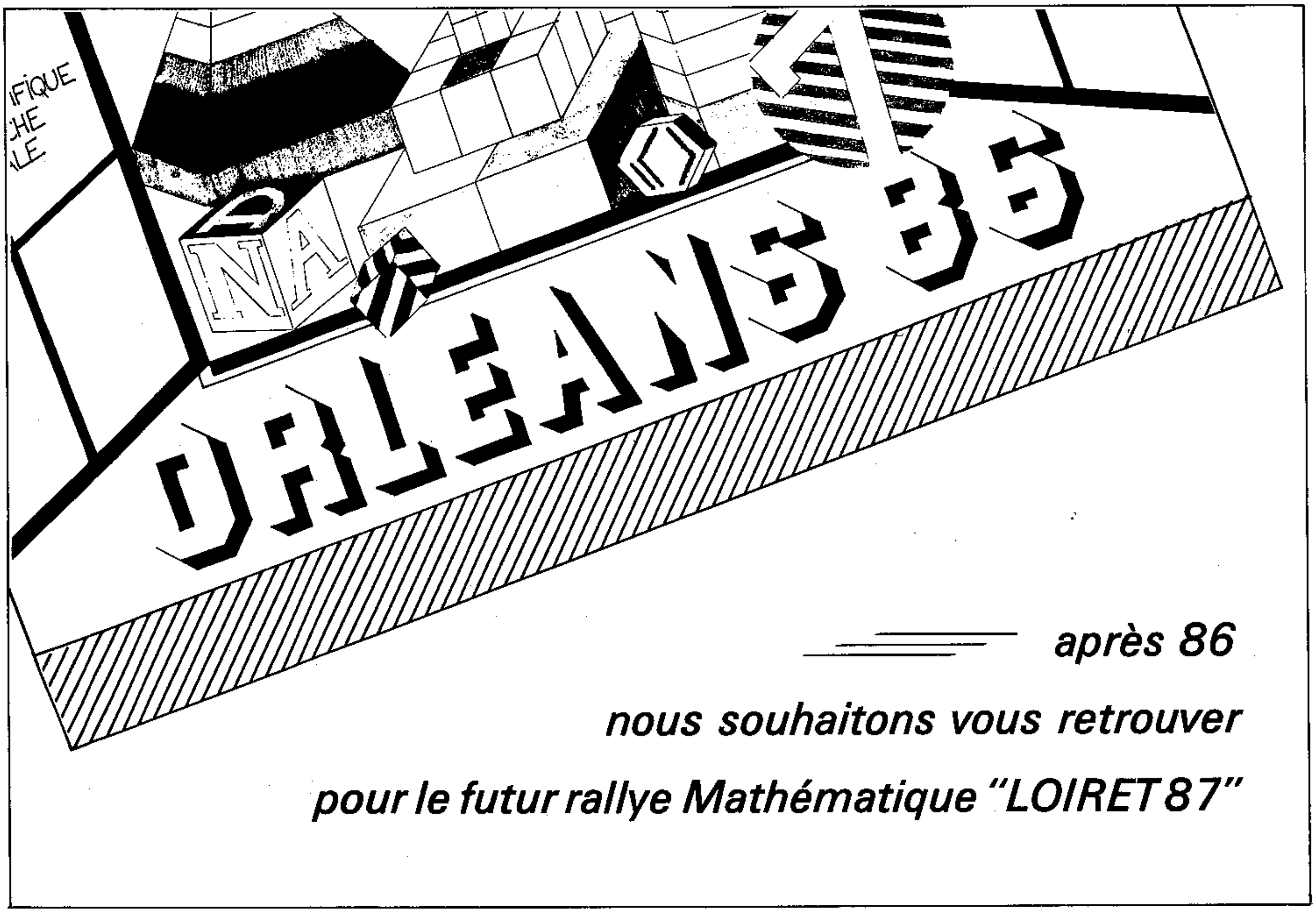
Ces deux derniers points rejoignent particulièrement certaines pré-occupations de l'équipe organisatrice :

- d'une part : proposer des exercices très diversifiés, de plusieurs niveaux de difficulté, en nombre suffisant pour que tous les élèves, y compris les plus faibles, participent,
- d'autre part : rechercher, créer, inventer pour les épreuves futures des activités mathématiques qui privilégient le travail d'équipe et le rendent indispensable.

C'est avant tout l'observation des classes en situation de recherche qui nous permet d'avancer dans l'élaboration de telles activités.

Devant le succès rencontré par le Rallye "ORLEANS 86", l'équipe d'animation envisage d'étendre cette manifestation à l'ensemble des classes de troisième et de seconde du département et d'organiser l'an prochain le Rallye Mathématique qui sera alors baptisé "LOIRET 87".

** propos recueillis en classe de troisième*



En côte d'Ivoire : le prix Houphouet-Boigny de mathématiques

A l'occasion de la présentation de l'exposition "Horizons Mathématiques" à Abidjan et Bouaké en Mai-Juin 1985, la SMCI, Société Mathématique de Côte d'Ivoire, présidée par Saliou Touré, a focalisé les média ivoiriens, presse, radio et télévision sur les mathématiques dans les pays africains (voir article à paraître dans le bulletin national de l'APMEP n° 353 de juin 1986).

Le point culminant de ces manifestations a été l'organisation, dans tout le pays, du Prix "Houphouet-Boigny" de mathématiques qui s'est déroulé dans tout le pays, sur cinq niveaux : 6^e-5^e, 4^e-3^e, 2de, 1^e et T^{le}, Deug.

Avant les nouvelles épreuves 86, voici quelques unes des questions posées et qui ont permis à dix lauréats d'être accueillis pendant dix jours en France à l'occasion de l'ouverture de la Cité des Sciences et de l'Industrie de La Villette.

Rappelons enfin que les expositions "H.M." circulent actuellement en Champagne-Ardennes pour la version française (Reims, Sedan, Chaumont,...) et, pour la version africaine, à Nouakchott puis à Conakry avant d'aller vers l'équateur à partir d'octobre avec, en premier, le Cameroun.

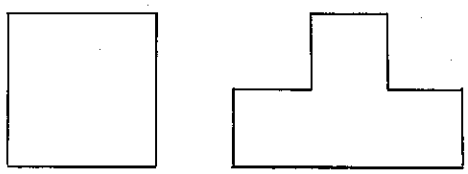
Puzzle (6^e - 5^e)

a) Trouver un découpage du carré 1 en deux morceaux de façon à pouvoir reconstituer la figure 2 avec les morceaux.

b) Trouver un découpage du carré 1' en trois morceaux de façon à pouvoir reconstituer le losange 3 avec les trois morceaux.

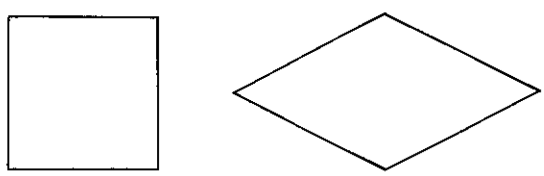
c) En déduire un découpage de la figure 2 en 4 ou 5 morceaux de façons à pouvoir reconstituer le losange 3 avec les morceaux.

a)



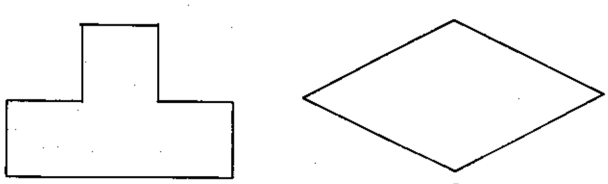
1 2

b)



1' 3

c)

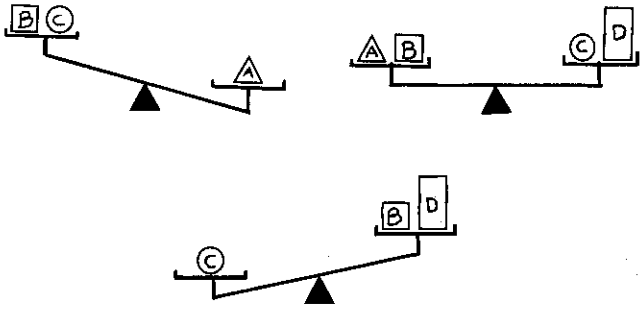


2 3

Pesées (4^e - 3^e)

1) Les réels a, b, c et d sont les masses de quatre objets A, B, C et D.

On a effectué les trois pesées suivantes avec une balance à deux plateaux :



Ranger les quatre réels a, b, c et d dans l'ordre croissant en justifiant la réponse.

2) On dispose maintenant d'une balance à deux plateaux mais on n'a pas de masses marquées.

a) On possède 9 pièces de monnaie. On sait que l'une des pièces est fausse et qu'elle est plus légère que les autres. Comment, en deux pesées, retrouver la pièce fausse ?

Je sais, dit Koffi, *il faut commencer par partager les 9 pièces en trois tas de trois pièces chacun.*

Terminer le raisonnement.

Palindromes (2de)

1) Soient a et b deux nombres réels positifs.

Comparer $(a + b)/2$ et $\sqrt{ab}$.

2) Trouver deux entiers naturels a et b tels que leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{a}$ et leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ soient deux entiers naturels de deux chiffres dont l'un se déduit de l'autre en inversant l'ordre des chiffres.

Trigo (1re - T^e)

1) On considère l'équation en x :

$$E_n \quad : \cos^n x + \sin^n x = 1$$

Trouver les solutions dans $[0,2\pi]$ de l'équation (E_n), pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

Pour les amateurs de sujets d'olympiades, rallyes,... deux références :

- une revue, **le Nouvel Archimède,** qui propose et décortique régulièrement des problèmes nouveaux et (délectables !) BP 222 - 80002 Amiens cedex. Abonnement annuel 100 FF.

- un livre : **les mathématiques par les problèmes** par Akkar, Akkar et El Mossadeq Sochapress. Casablanca 1985. On y trouvera une somme impressionnante de sujets (plus de 5000 !) classés par thème avec des solutions pour la plupart. Une façon originale de parcourir l'évolution des programmes à travers tous les pays qui participent à ces olympiades. ■

PROGRAMME DE L'ECOLE ELEMENTAIRE

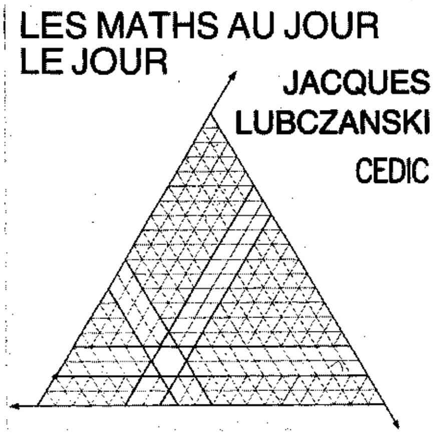
France - 1986

Nous commençons ici, sous forme de fiches, la présentation des nouveaux programmes de mathématiques de l'école élémentaire au lycée en France. Nous les accompagnerons régulièrement des commentaires et propositions de mise en œuvre faits par les équipes de l'APMEP qui travaillent sur le sujet inépuisable des nouveaux ou futurs programmes.

	C.P.	C.E.	C.M.
ARITHMETIQUE	Classement et rangement des objets et des collections d'objets selon des critères simples ou composés. Ecriture et nom des nombres de un ou deux chiffres selon la numérotation décimale. Découverte des nombres de plus de deux chiffres. Utilisation des écritures additives. Distinction du nombre ordinal et du nombre cardinal. Comparaison de deux nombres. Utilisation des signes : = (égal) ≠ (différent de), < (inférieur à) > (supérieur à). Ecriture d'une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant. Problèmes faisant intervenir la somme de deux ou plusieurs nombres. Familiarisation avec l'utilisation des parenthèses ; construction, utilisation et mémorisation de la table d'addition. Construction et utilisation de la technique opératoire, de l'addition en particulier avec retenue. Problèmes exprimés sous la forme : a + = c. Initiation au calcul mental.	Ecriture et nom des entiers naturels, comparaison et utilisation des signes : =, ≠, <, >. Problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, désignation d'un nombre par des écritures différentes. Transformation des additions, soustractions et multiplications pour élaborer les techniques opératoires. Utilisation des propriétés des opérations, acquisition des procédures de calcul mental et mise en œuvre systématique : utilisation des parenthèses. Calcul sur les nombres. Connaissance et maîtrise des techniques opératoires. Construction, utilisation et mémorisation de la table de multiplication. Reconnaissance de problèmes relevant de la division, détermination du quotient et du reste par une méthode empirique de calcul. Ordre de grandeur et encadrement d'un résultat. Utilisation, dans l'ensemble des entiers naturels, des fonctions numériques $n \longmapsto n + a$ et $n \longmapsto n \times a$, et leurs réciproques, problèmes relevant de ces fonctions.	Ecriture, nom et comparaison des entiers naturels. Nécessité d'introduire de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres s'écrivant sous forme de fractions simples. Ecriture et nom des nombres décimaux. Désignation d'un nombre décimal par l'addition, la multiplication, la soustraction et la fraction, passage d'une écriture à une autre. Comparaison des nombres décimaux (intercalation, encadrement). Problèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division, élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites, et des procédés de calcul approché (ordre de grandeur et encadrements). Reconnaissance et utilisation des fonctions numériques : $n \longmapsto n + a$ et $n \longmapsto n \times a$, et leurs réciproques, définies dans l'ensemble des nombres décimaux. Problèmes relevant de ces fonctions et plus particulièrement de la proportionnalité (exeemple de la règle de trois). Application des procédures de calcul mental dans l'ensemble des décimaux, en utilisant des techniques opératoires, et les propriétés des fonctions numériques étudiées.
GEOMETRIE	Repérage dans l'espace (les objets par rapport à soi). Déplacement de l'élève et construction d'itinéraires en tenant compte de contraintes. Utilisation des quadrillages, des diagrammes, des tableaux. Reconnaissance et organisation des formes et des figures simples : Courbes et domaines : intérieur, extérieur. Rosaces, frises, pavages, mosaïques, puzzles. Tracés à la règle.	Repérage des cases ou des nœuds d'un quadrillage, utilisation de ces repérages. Reproduction, description, représentation (à l'aide de procédés conventionnels) et construction d'objets géométriques (solides, surfaces, lignes) : Manipulation et classement des objets physiques. Utilisation des instruments papier-calque, papier quadrillé, règle, équerre, compas, gabant. Mise au point des techniques de reproduction et de construction : calque, pliage, découpage, patrons et solides. Utilisation d'un vocabulaire géométrique et d'une syntaxe logiquement articulée. Application à des objets géométriques des transformations ponctuelles (symétrie, translation).	Reproduction, description, représentation et construction de différents objets géométriques (solides, surfaces, lignes). Application à des objets géométriques des transformations ponctuelles (translation, rotation, symétrie). Utilisation des instruments, papier-calque, papier quadrillé, règle, compas, gabant. Mise au point des techniques de reproduction et de construction, report des distances, reproduction, agrandissement ou réduction d'un dessin fait sur fond quadrillé, tracé de parallèles ou de perpendiculaires. Utilisation d'une syntaxe logiquement articulée et d'un vocabulaire géométrique, cube, arête, sommet, face, sphère, boule, triangle, quadrilatère, parallélogramme, rectangle, losange, carré, côté, diagonale, cercle, disque.
MESURE	Repérage d'événements dans la journée et dans la semaine. Mise au point d'une procédure pour classer et ranger des objets selon leur longueur et selon leur masse.	Repérage des événements dans la journée, la semaine, les mois, l'année : comparaison des durées (expression verbale et représentation symbolique). Classement et rangement d'objets selon leur longueur et selon leur masse. Connaissance des unités du système légal (longueur) et usuel (masse).	Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée, utilisation des systèmes de mesure, expression, par un nombre ou par un encadrement du résultat d'un mesurage. Utilisation des unités du système légal et usuel. Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur ou de poids. Utilisation des instruments de mesure double décimètre, balance, montre, etc. Détermination d'un périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume d'un pavé. Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné.

A-PLOT-STROPHE

Pour la classe - Petite rubrique sur les revues, livres, matériels qui peuvent être utiles pour l'apprentissage des mathématiques.



Les maths au jour le jour.

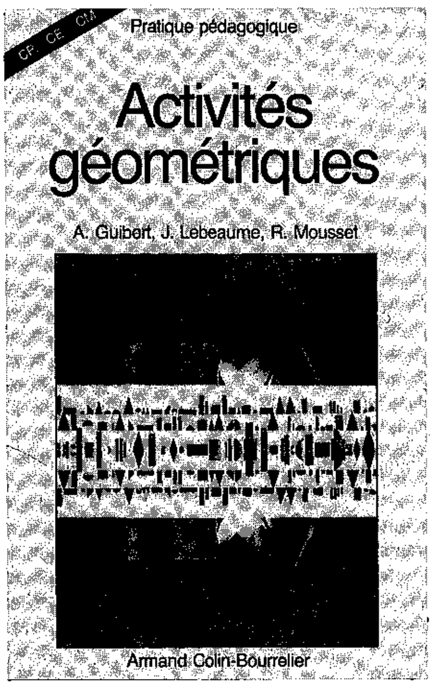
par Jacques Lubczanski. Cédic. 1985. 128 pages.

Chaque jour qui passe apporte son lot d'informations en tout genre : brutales ou insipides, inattendues ou répétitives, impertinentes (et... pertinentes). Chaque jour qui suit les remplace par d'autres. C'est l'ère médiatique.

Jacques Lubczanski, dans son livre, fait un arrêt image sur certaines de ces informations : chômage, absentéisme, contraception, salaires, la force Manta, le trésor de... Rackham le Rouge, s'interroge, pose des questions et, plus loin, apporte des éléments de réponse où l'on voit apparaître des outils mathématiques enseignés au lycée et parfois au collège.

Voilà enfin un livre qui vous permettra de répondre à la question mille fois posée "mais, en fin de compte(!), à quoi ça sert les maths ?" Un exemple ? les pneus Kléber-Colombes et le contrôle de qualité. Vous pourrez y lire comment trouver, pour l'entreprise, le profit maximum. Il faut pour cela décider de rejeter les pneus qui donnent un résultat négatif à au moins 4 contrôles sur 9, sachant qu'ainsi, sur 1000 pneus on en rejette 275 dont 219 normaux ! et que sur les 725 conservés il y en a encore 65 de défectueux !!! C'est le "coût du risque" Etonnant non ?

En plus de l'esprit critique qu'il développe, ce livre vous donne une piste pour développer, avec vos élèves, votre sagacité à l'écoute des informations glanées au fil des radios locales, de la cinquième chaîne ou de la presse. Ceux qui sont familiers des publications de l'Apmep ou des problèmes chocs du PLOT y trouveront aussi des réponses à des problèmes rencontrés dans cette presse (la plus objective !!!).



Activités géométriques

par Guibert, Lebeaume et Mousset. Colin-Bourrelier, éd. 1985. 128 pages.

Ce livre rassemble une grande variété d'idées géométriques qui permettront aux instituteurs (mais aussi aux autres) de faire réaliser divers objets de l'espace en tenant compte de leurs propriétés géométriques.

Bien cadré par rapport aux différents niveaux de l'école élémentaire, il est présenté en série de séquences pédagogiques accompagnées de commentaires et d'idées de prolongements. S'il est fait avant tout pour un cadre scolaire, ce livre permettra aussi aux publics moins jeunes de s'initier à l'approche d'une géométrie, celle que les didacticiens appellent maintenant la micro-géométrie, c'est-à-dire la géométrie de la feuille de papier ou de l'écran ou des objets qui tiennent dans les mains.

En cela la très belle image de couverture laisse espérer un autre ouvrage sur d'autres géométries, plus larges : les géométries des objets et des espaces que l'on peut embrasser du regard, une chambre, une maison, ou, plus grand encore, la ville avec ses problèmes de repérage ou la surface de la Terre ou l'espace avec leurs problèmes de courbure.

A lire ça vient de sortir !

L'univers mathématique de David et Hersh (Gauthier-Villard 1985. 406 pages. 230 F
Ces deux mathématiciens américains dont un est encore en activité, brossent un impressionnant panorama de l'histoire des mathématiques. Agréable et facile à lire malgré ses 400 pages. Un nouvel exemple de ce que peuvent faire des chercheurs qui cherchent à... vulgariser leur science, à la rendre accessible à un large public. Deux regrets pour la traduction : le titre qui en anglais était plus signifiant : the mathematical experiences - l'histoire qui s'arrête dix ans avant la parution du livre en français alors que, depuis, elle a beaucoup avancé. Une façon peut-être de confirmer la démonstration des auteurs : les mathématiques, une science en mouvement.

1985 - Images des mathématiques supplément au n° 62 du courrier du CNRS (48 pages. 20 F).
Huit essais de vulgarisation par des chercheurs français dont Alain Connes (médaille Fields).

Le Matin des Mathématiques (Belin - France culture. 1985. 182 pages).
La transcription d'interview réalisés sur France culture.

Un peu de tout pour faire des Mathématiques N. Picard et M.A. Jolivet. Cédic 1986. 168 pages.

Concrétisation de la mathématique éd. Cité des Sciences et de l'Industrie. Paris 1986, quatre ans de séminaire en vue de construire l'espace mathématique du Musée de La Villette.

Attention, Statistiques ! J. Klatzmann, éd. La Découverte. Paris 1986. 125 pages. 58 F, pour tous ceux qui suivent de près les campagnes électorales.

Pour votre livre des records
111...111 (1031 un) est le cinquième nombre premier constitué de 1 mis à bout. Nous vous laissons trouver les précédents et sachez que le prochain aura plus de dix mille chiffres (H. Dubner, 1985).

Lu dans la presse "on a trouvé le plus grand nombre premier ! $2^{216091} - 1$"
(le journaliste a oublié d'ajouter "connu à ce jour" - Novembre 1985)
g(4) = 19 !!! (1986 - Deshouillers, Dresset, Balasubramanian) Quid ? tout entier est somme d'au plus 19 bicarrés, conjecture de Waring... 1770. On savait déjà que g(2) = 4 (Lagrange - 1770), g(3) = 9 (Wieferich - 1909), g(5) = 37 (Chen - 1964).