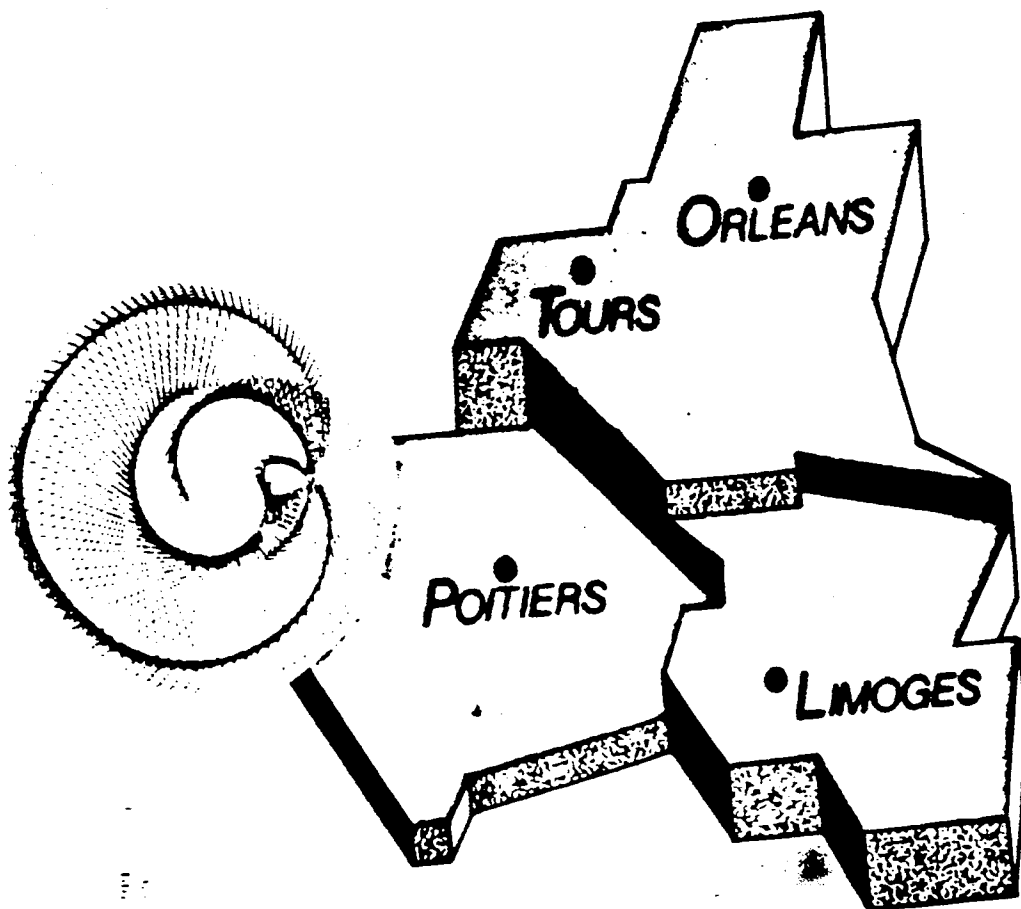
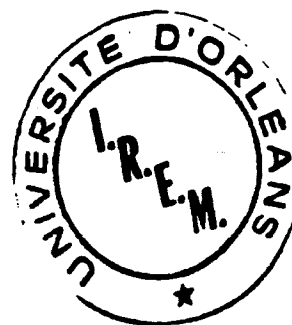


# PLOT

28

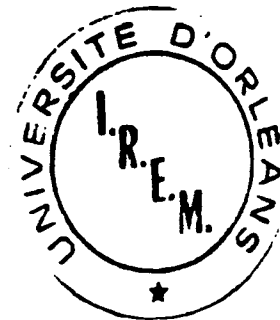


**Bulletin des régionales APMEP  
de Poitiers, Limoges et Orléans-Tours**

**3<sup>ème</sup> trimestre 1984 - 12,50 Francs .**

# plot

BULLETIN DES REGIONALES A.P.M.E.P.  
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS



## EDITORIAL

Après des vacances bien méritées, vous retrouverez, avec un peu de retard (veuillez nous en excuser), mais avec plaisir sûrement, votre publication et ses rubriques habituelles.

Innover dans sa tête, dans sa classe, dans son établissement, tel est le thème des Journées Nationales APMEP qui ont lieu à Sophia Antipolis cette année. Alors, si vous avez des idées en tête, si vous les avez expérimentées dans vos classes, pourquoi ne pas en faire part à tous les lecteurs du PLOT ? Le PLOT est votre Journal, et si vous voulez prendre plaisir à le retrouver, adressez-nous vos articles et faites en profiter tous les autres lecteurs.

Alors ..... tous à vos stylos, et bonne année scolaire.

L'équipe d'Animation.

### Equipe d'animation :

Michel Clinard, Roger Crépin, Michel Darche,  
Marie-Laure Darche, Patrick Marthe, Michel Mirault  
Pascal Monsellier, Serge Parpay.

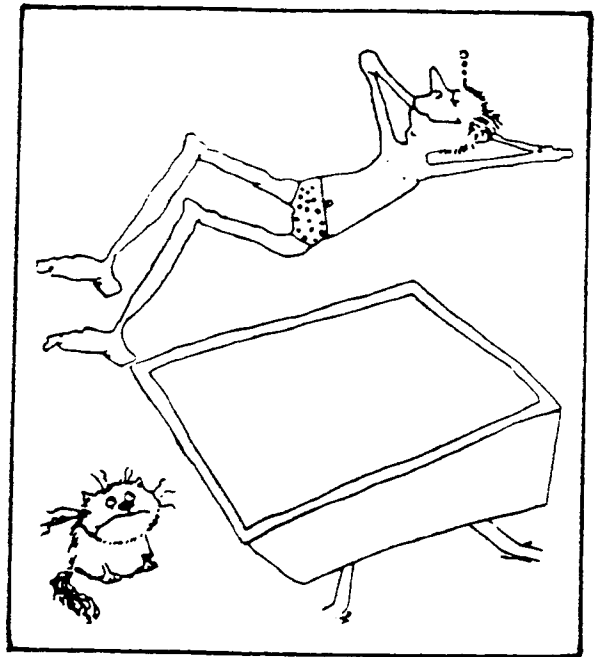
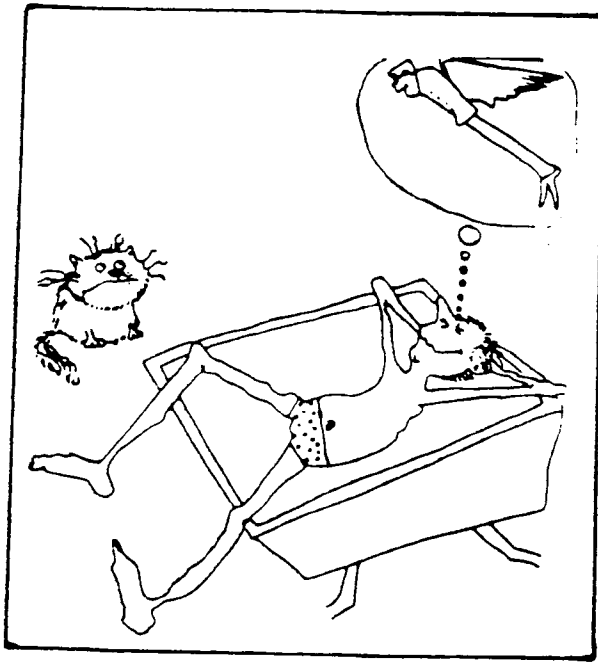
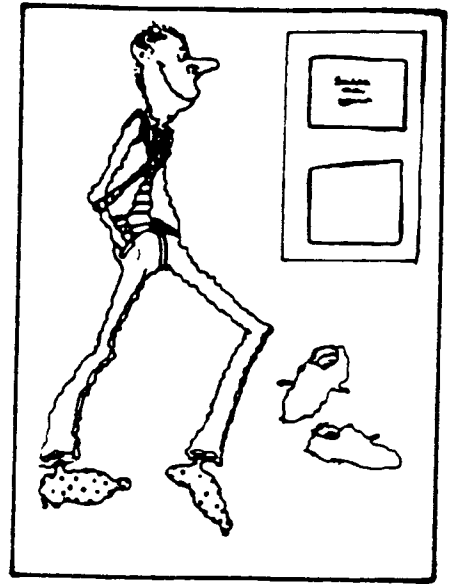
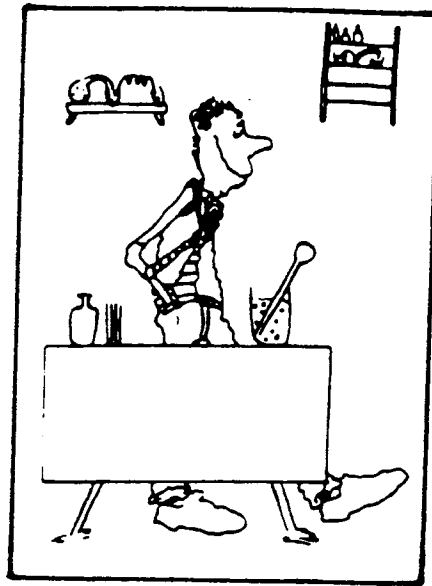
Dactylographie : Madeleine Schlienger  
Contrôle ventes et publicité : Pascal Monsellier  
Montage : Michel Mirault  
Fichier et routage : Patrick Marthe

..... Adresse du journal : IREM. Université, 45046 Orléans Cedex.... Directrice de publication : ... Marie-Laure Darche/Giorgi ..... numéro CPPAP : 63181..  
Imprimé par le Centre Régional de Documentation Pédagogique, 55, rue ND. de Recouvrance, 45000 Orléans..... Dépôt légal : 2è trimestre 1984.

ARCHIMEDE VU PAR

LUCE DUBROUILLON

4° C - Collège de VINEUIL.



# plot

BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

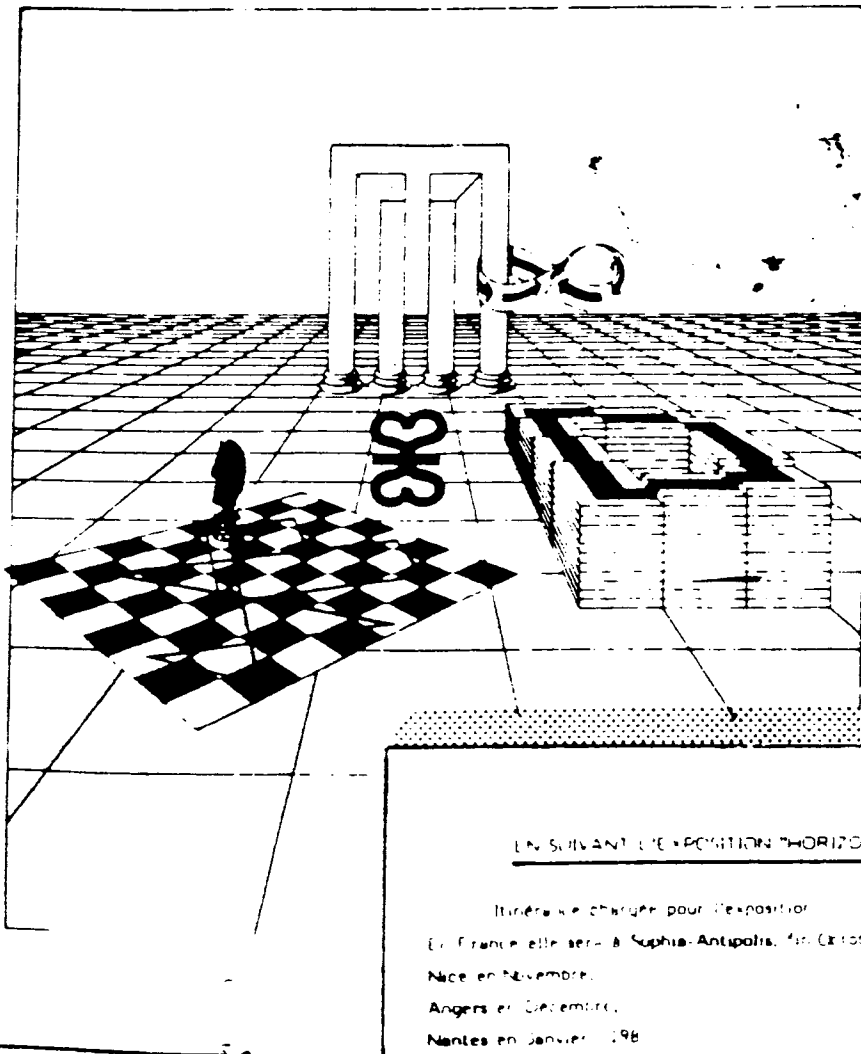
## Sommaire du n° 28

|   |    |
|---|----|
| Math, Géo et tout le tremblement<br>(M. Berger - P. Chevrier) | 5  |
| Pascal, l'Infini et les terminales A<br>(J. Guichard)         | 9  |
| La vie des Arbels<br>(G. Chauvat)                             | 16 |
| Chronique Australienne<br>(Rapport CIEM)                      | 18 |
| Trisection d'angles et Pliages<br>(J. Justin)                 | 28 |
| Réflexions d'un technologue<br>(J.C. Patrat)                  | 29 |
| Nombre d'Or<br>(J. Sauvy)                                     | 38 |
| Tous à vos rétros<br>(M. Mirault)                             | 39 |
| Mots croisés -  | 8  |
| Mots croisés (solution)                                       | 37 |
| Mosaïque Mathématique   | 4  |
| Petit X   | 17 |
| Mots  | 18 |
| Presse écrite et Mathématiques                                | 37 |
| Bon de Commande PLOT  | 41 |
| Brochures de l'APMEP  | 43 |
| Nos régionales.   | 41 |

---

(Toutes les publicités contenues dans le PLOT le sont à titre gratuit).

# MOSAIQUE MATHÉMATIQUE



## SOMMAIRE

- Peut-on diffuser la culture mathématique, ailleurs qu'à l'école ? M. DARCHÉ, J.M. KANTOR.
- Kaleïdoscopes : F. SICURINT.
- Anamorphoses : Noël BLOTTE.
- La perspective : Roger LAURENT, IUT de Sceaux.
- La géométrie de Riemann : M. BERLEH, Université Paris VII.
- La Géométrie Hyperbolique : B. YCARTE.
- Suggestions for the Museum : J. CONWAY - Cambridge, U.K.
- La notion de rigueur en mathématiques : Jean-Louis LUDJENNE, de l'Académie des Sciences.
- Bibliographie.
- Pour faire venir l'exposition.

## EN SUIVANT L'EXPOSITION "HORIZONS MATHÉMATIQUES"

Itinéraire chargé pour l'expositior

En France elle sera à Sophia-Antipolis, fin Octobre 1984  
 Nice en Novembre.  
 Angers en Décembre.  
 Nantes en Janvier 1985  
 St. Nazaire en Février.  
 Amiens en Mars Avril.  
 Caen en Mai.  
 Cherbourg en Juin

Une deuxième version de l'exposition s'apprête à circuler dans les pays étrangers (l'Afrique dès Février avec : Togo, Niger, Côte d'Ivoire, Mali, Sénégal, Mauritanie, puis l'Afrique du Nord).

Une très belle plaquette 21 x 29,7 en couleur accompagne dès maintenant l'exposition avec des articles de mathématiciens, qui touchent à des domaines mathématiques présents ou passés que l'on trouve dans l'exposition.

Prix de vente 50 F à commander à l'IREM d'Orléans, 45046 Orléans Cedex -

# MATH, GEO, et tout le tremblement

par : Maryse BERGER (Hist.Géo)  
Pierre CHEVRIER (Maths)

Lycée J.Macé, NIORT.

Travaillant en équipe pédagogique avec d'autres collègues dans une classe de seconde, nous avons prévu d'intervenir en commun sur les séismes : leur étude est au programme de géographie, la détermination d'un épïcentre peut donner lieu à un travail intéressant en math ; cf. l'article n° 19 de Lucien Augé dans (1).

Les élèves ont commencé, en cours de géographie, à travailler sur les pages "documents et travaux", relatives aux séismes, de leur manuel (2). L'un de ces documents posa problème et fut à l'origine du travail que nous présentons dans cet article.

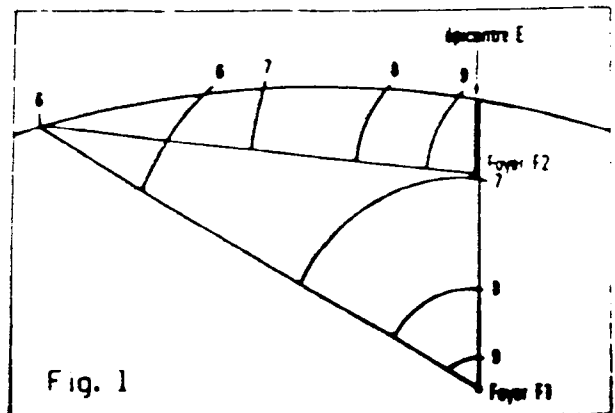


Notre intervention a été pluridisciplinaire effectuée ensemble dans le même temps et le même lieu. Son caractère fortuit fait qu'elle n'a pas été perçue comme artificielle par les élèves et a été bien acceptée, d'autant qu'elle a répondu à un besoin. Le problème sismique avait secoué certains d'entre eux, provoquant même chez quelques-uns des tremblements d'une forte intensité ; d'autres, plus rares y avaient dépensé toute leur magnitude et n'avaient plus aucune énergie ; il fallait donc y remédier.

Aucune connaissance approfondie n'est nécessaire à la compréhension de la suite. Pour une meilleure connaissance des phénomènes sismiques, nous renvoyons à la lecture de (3) ou (4).

Voici le schéma en question (fig.1) :

- Dans quel cas l'intensité du séisme en surface est-elle la plus forte ? Pourquoi ?
- Pourquoi dans le séisme du foyer F1, l'intensité en surface diminue-t-elle plus lentement quand on s'éloigne de l'épicentre E ?



Nous avons procédé avec les élèves à une analyse critique de ce document ; puis après que la question ait pu être reformulée de façon plus précise, une démonstration simple de la réponse a pu être présentée par le prof. de math :

1) L'épicentre est, par définition, le point à la surface du globe terrestre, situé à la verticale du foyer (le foyer est l'endroit où se produit le choc initial, plus ou moins profond) :

1) Ce n'est pas le cas sur le dessin, où la droite passant par le foyer et l'épicentre est seulement une verticale de la page du livre !

2) Aucune explication n'est donnée sur ce que représentent "les lignes autour des foyers".

Tout le monde c'est facilement accordé à penser qu'il s'agit de lignes d'égalité d'intensités (l'intensité mesurant l'importance des secousses). La terre étant représentée ici en coupe, en volume cela donne des surfaces d'égalité d'intensités.

Ceci étant admis, on ne sait pas comment sont construites ces lignes.

3) Il faut donc interpréter. Ces lignes semblent être des arcs de cercles centrés aux foyers. Vérification au compas : gagné ... presque :

"La ligne 9 autour de  $F_2$ " fait manifestement exception, et c'est très approximatif pour "les lignes 6 et 9 autour de  $F_1$ ".

Malgré les irrégularités, le schéma permet de formuler la première hypothèse :

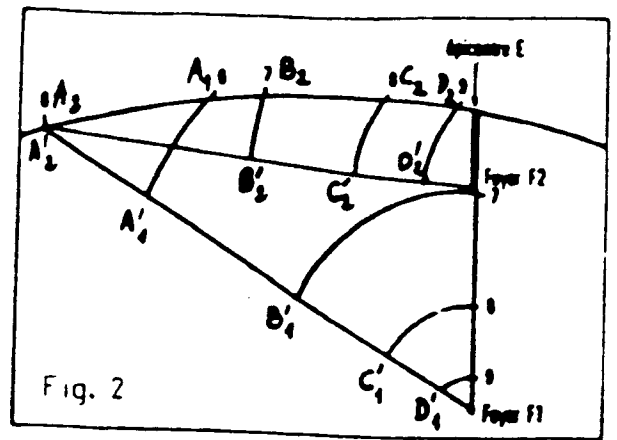
( $H_1$ ) L'intensité est la même pour des points situés à une même distance du foyer.

C'est une hypothèse simplificatrice, pédagogiquement louable, encore faut-il la préciser ! Elle correspond à certaines conditions géologiques théoriques (nature homogène du sous-sol, ...).

4) L'observation des distances entre les lignes permet de constater, même si elles sont irrégulières, que :  
Les distances entre les lignes d'intensités 8 et 9, de même qu'entre les lignes d'intensités 7 et 8 sont les mêmes pour les séismes de foyers  $F_1$  et  $F_2$ , ce qui correspond sur le schéma (fig.2) aux égalités :

$$C_1 D_1 = C_2 D_2 \quad \text{! =}$$

$$B_1 C_1 = B_2 C_2$$



d'où les nouvelles hypothèses :

( $H_2$ ) Les séismes de foyers  $F_1$  et  $F_2$  ont même magnitude (l'énergie libérée est la même).

( $H_3$ ) La différence des rayons des cercles (en coupe, en volume, des sphères) d'intensités  $i$  et  $i+1$  centrés au foyer ne dépend pas de la profondeur du foyer d'un séisme de magnitude donnée.

Bien qu'elles soient contredites par deux autres défauts du dessin :  $A_1 B_1 < A_2 B_2$  (la distance de la ligne 6 à la ligne 7 n'est pas la même) et  $F_1 D_1 < F_2 D_2$ .

5) Les (courbes) isoséistes sont les courbes des points de même intensité en surface.

Les hypothèses ( $H_1$ ), ( $H_2$ ), ( $H_3$ ) faites donnent, en surface, des isoséistes circulaires qui, en projection (sur le plan tangent à l'épicentre au globe terrestre), sont des cercles centrés en E, épicentre commun aux deux séismes de foyers  $F_1$  et  $F_2$ . Ce qui pourrait donner, la vue de dessus suivante : (fig.3).

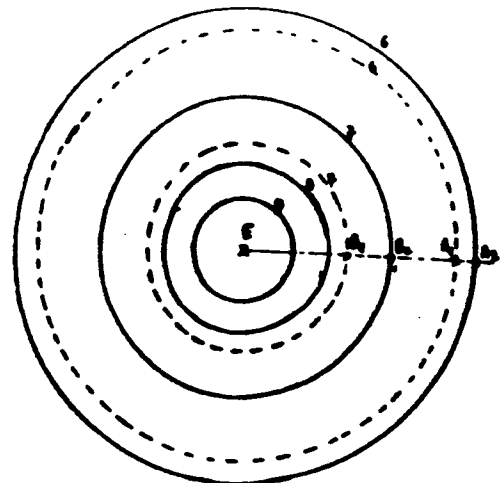


Fig. 3 les isoséistes en trait plein correspondent au foyer  $F_2$ , les isoséistes en pointillés au foyer profond  $F_1$ .

6 A ce stade du travail, la deuxième question accompagnant le schéma fig.1 a pu être reformulée de façon plus précise :

"Pourquoi la distance  $A_1B_1$  entre les courbes isoséistes 6 et 7 correspondant au séisme de foyer profond  $F_1$  est-elle supérieure à la distance  $A_2B_2$  des isoséistes 6 et 7 correspondant au séisme de foyer moins profond  $F_2$  ?"

On peut, bien sûr, généraliser, en remplaçant 6 et 7 par  $i$  et  $i+1$  ( $i$  pouvant varier), ou même  $i$  et  $i'$  ( $i < i'$ ).

Notons que, sur le schéma du livre (fig.1), la comparaison ne peut se faire ; seule la ligne 6 autour de  $F_1$  coupe la surface terrestre, la ligne 7 ne la coupant pas. Ainsi, sur la figure 2 où les points de la figure 1 ont été nommés, le point  $A_1$  existe bien, mais pas le point  $B_1$ .

7 Pour répondre simplement à la question ainsi reformulée, nous supposons que :

(H<sub>4</sub>) la surface d'étude des isoséistes est plane.

Cette hypothèse est légitimée par le fait que la profondeur du foyer d'un séisme ne dépassant pas 1/8 de rayon de la terre, la courbure de la surface contenant les isoséistes de plus fortes intensités est faible,

beaucoup plus faible que sur le dessin !

8 Reprenant l'idée du schéma du livre, et compte tenu des hypothèses H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>, H<sub>3</sub>, (H<sub>4</sub>), cela donne le schéma (fig.4).

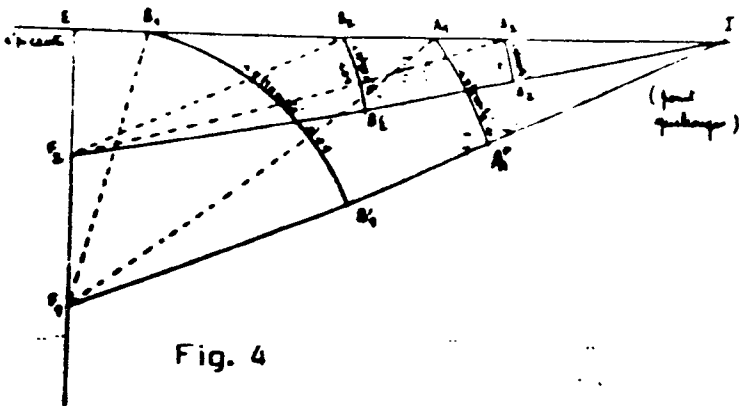


Fig. 4

On a les égalités :

$$F_1B_1 = F_1B'_1 = F_2B'_2 = F_2B_2 \text{ (intensité } i+1)$$

$$F_1A_1 = F_1A'_1 = F_2A'_2 = F_2A_2 \text{ (intensité } i)$$

et l'inégalité  $EF_1 > EF_2$

- Démontrons d'abord que l'isoséiste d'intensité  $i$  est plus éloignée dans le cas du foyer moins profond  $F_2$ . Cela revient à établir  $EA_2 > EA_1$  :

Le théorème de Pythagore nous donne dans les triangles rectangles  $EA_1F_1$  et  $EA_2F_2$  :

$$F_1A_1^2 = EF_1^2 + EA_1^2 \text{ et } F_2A_2^2 = EF_2^2 + EA_2^2$$

d'où, puisque  $F_1A_1 = F_2A_2$ ,

$$EF_1^2 + EA_1^2 = EF_2^2 + EA_2^2, \text{ égalité}$$

équivalente à

$$(1) EA_2^2 - EA_1^2 = EF_1^2 - EF_2^2$$

Comme  $EF_1 > EF_2$ , il en résulte

$$EA_2 > EA_1$$

- En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles  $EB_1F_1$  et  $EB_2F_2$ , on obtient, de façon analogue, l'égalité

$$(2) EB_2^2 - EB_1^2 = EF_1^2 - EF_2^2$$

d'où il résulte aussi  $EB_2 > EB_1$

On déduit de (1) et (2) que :

$$EA_2^2 - EA_1^2 = EB_2^2 - EB_1^2,$$

donc aussi bien :

$$EA_2^2 - EB_2^2 = EA_1^2 - EB_1^2,$$

soit encore :

$$(EA_2 - EB_2)(EA_2 + EB_2) = (EA_1 - EB_1)(EA_1 + EB_1),$$

ou :

$$(3) A_2B_2 \times (EA_2 + EB_2) = A_1B_1 \times (EA_1 + EB_1)$$

Or les inégalités  $EA_2 > EA_1$  et

$EB_2 > EB_1$  impliquent

$EA_2 + EB_2 > EA_1 + EB_1$ . Cette

dernière inégalité, conjuguée avec (3), prouve que :

$$A_2B_2 < A_1B_1,$$

ce qui répond à la question posée en (6).

### Epilogue pour mathématiciens :

Trouver une démonstration du résultat accessible aux élèves de seconde, sans faire l'hypothèse (H<sub>4</sub>).

Le problème se pose ainsi :

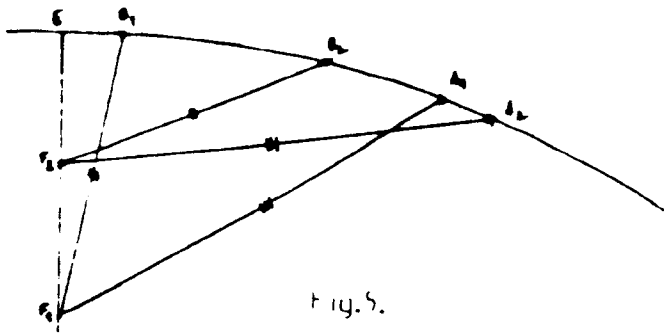


Fig. 5.

Les points  $E, B_1, B_2, A_1, A_2$  sont sur un même quart de cercle dont l'une des extrémités est  $E$ .  $O$  désignant le centre du cercle,  $F_1$  et  $F_2$  sont sur le rayon  $[OE]$  et tels que  $EF_1 > EF_2$

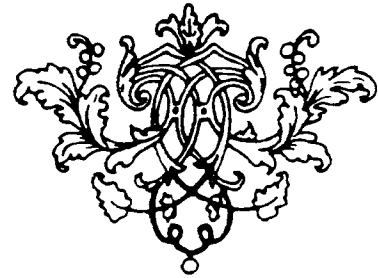
On a les égalités  $F_1B_1 = F_2B_2$  ;

$$F_1A_1 = F_2A_2$$

Il s'agit d'établir que  $A_2B_2 < A_1B_1$  ce qui équivaut à l'inégalité des longueurs des arcs.

## BIBLIOGRAPHIE.

- (1) Mathématique active en seconde (brochure n°43 de l'APMEP).
- (2) Géographie du temps présent. GREHG seconde. Hachette.
- (3) Séismes et volcans : Fascicule n° 217 de la collection "Que sais-je ?".
- (4) Les tremblements de terre. Bibliothèque "Pour la Science". Diffusion Belin.



# Mots Croisés

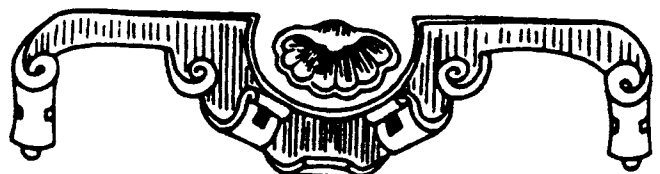
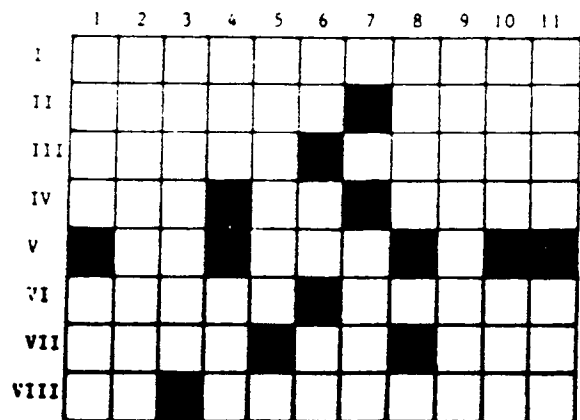
Michel Labrousse

### Horizontalement

- I. Servent au repérage
- II. N'est pas pour autant imaginaire ! - Pronom
- III. Publie - Précède Bator en Morquie
- IV. Fonction abrégée - Possessif  
De tels paquets éternels sont difficiles
- V. Négation - Particule
- VI. Période - Cont des os
- VII. Imaginaire sans lettre ! - Nombre - Ecole
- VIII. Sert à dessiner - Sert à repérer

### Verticalement

1. Ensemble de points...lumineux  
Va parfois avec la manière
2. Sert au repérage
3. Sert à repérer
4. Début d'une retenue ou fin d'un prêt  
Roi d'Israël
5. Se perd bien que son port reste
6. Deux d'Orléans - Or symbolique - Coutumes
7. Utilisé par le mathématicien qui conclut
8. Nombre
9. Coniques
10. Ruminant - Vont avec les autres
11. Une direction en fournit deux - Puissance .....  
Automobile



# PASCAL, L'INFINI et les terminales A

Jacqueline GUICHARD - PARTHENAY

Nous vous présentons le compte rendu d'une activité math-philo en TA. Cet article devrait intéresser bon nombre d'entre nous tentés par un travail interdisciplinaire et donner des idées d'activités dont nous espérons pouvoir rendre compte dans de prochains numéros du PLOT.

A propos d'un (double) texte de Pascal reproduit dans : MATHEMATIQUES Terminales A2/A3, R.Gauthier - G.Mison, Cedic 1983, p.47 :

**L'infini en mathématiques vu par un homme de "science et de foi".**

Un texte de Blaise Pascal (1623-1662)

(Les trois ordres).

à tous ces grands de chair. La grandeur de la sagesse, qui n'est nulle sinon de Dieu est invisible aux charnels et aux gens d'esprit. Ce sont trois ordres différenciés de genre. Les grands génies ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire, leur lustre et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles, et elles n'ont pas de rapport. Ils sont vus non des yeux, mais des esprits, c'est assez.

Les saints ont leur empire, leur éclat, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles. Ils n'ont nul rapport, par excellence, et content ni d'être...

Tous les corps, les éléments, les étoiles, la terre, les montagnes, ne valent pas le moindre des esprits ; car il connaît tout cela, et soi ; et les corps, rien.

Tous les corps ensemble, et tous les esprits ensemble, et toutes leurs productions, ne valent pas le moindre mouvement de charité. Cela est d'un ordre infiniment plus élevé".

On n'augmente pas une quantité continue lorsqu'on lui ajoute, en tel nombre qu'on voudra, des quantités d'un ordre d'infiniité supérieur. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides. On envoie pour parler en nombres d'une en arithmétique que les grandeurs simples, radicaux ne comptent pour rien par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes, les cubes par rapport aux puissances quatrièmes. Il faut donc ne pas tenir compte : dès grandeurs d'ordre inférieur étant donné qu'elles ont une valeur nulle par rapport à celle de l'ordre considéré...

La distance infinie des corps aux esprits figure la distance infiniment plus infinie des esprits à la charité, car elle est surnaturelle. Tout l'éclat des grandeurs n'a point de lustre pour les gens qui sont dans les recherches de l'esprit. La grandeur des gens d'esprit est invisible aux rois, aux riches, aux capitaines,

Le texte cité dans cet ouvrage est en fait deux. Il rapproche judicieusement, mais sans le dire et sans donner leur référence, deux textes de Pascal, le premier, extrait de la fin du traité de LA SOMMATION DES PUISSANCES NUMERIQUES,

et qui correspond au premier paragraphe du présent texte, /"On n'augmente pas... de l'ordre considéré"/ ; le second, constituant une partie de la pensée 308 (numérotation Lafuma).

Les considérations du premier sont, comme le traité dont il est extrait, de nature mathématique ; elles rejoignent les arguments par lesquels Pascal tranchera le débat avec le chevalier de Méré sur les indivisibles, et reposent sur la notion d'ordre ou de genre. Dans L'ESPRIT DE GEOMETRIE, Pascal rappelle l'axiome dit d'Archimède pour définir cette notion de genre :

*"Les grandeurs sont dites être de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre".*

énoncé dans les ELEMENTS DE GEOMETRIE d'Euclide : L.V, déf.4.

On a donc là un critère qui permet de déterminer si deux grandeurs sont de même genre : il peut y avoir entre elles comparaison parce qu'il y a proportion ; l'une peut ajouter ou retrancher quelque chose à l'autre ; on peut passer de l'une à l'autre par itération d'une opération. Mais les raisons qui font que des opérations sont possibles à l'intérieur d'un genre, rendent toute opération impossible d'un genre à l'autre. Ces opérations n'auraient pas de sens parce qu'il n'y a pas entre les deux genres de commune mesure : on ne peut passer à l'infini par addition ou multiplication du fini, pas plus que l'on ne passe au fini par itération de l'infiniment petit.

*"... un indivisible multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas du même genre que l'étendue, par la définition des choses du même genre".*

L'ESPRIT DE GEOMETRIE.

Et, corrélativement, le fini n'ajoute ni ne retranche rien à l'infini, parce que la distance du premier au second est infinie :

*"L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien, non plus que un pied à une mesure infinie ; le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient pur néant".*

Pensée 418 : Infini rien. ✂

Le retour au texte latin de ce traité de LA SOMMATION DES PUISSANCES NUMERIQUES permet de lever une difficulté de compréhension pour un lecteur non averti.

Compte tenu du raisonnement et des exemples, alors que le texte dit que :

*"On n'augmente pas une quantité continue lorsqu'on lui ajoute en tel nombre qu'on voudra, des quantités d'un ordre d'infinitude supérieur",* il attendrait plutôt "d'un ordre d'infinitude inférieur", comme le dit d'ailleurs la traduction de l'édition des Oeuvres complètes de Pascal au SEUIL, (1963). Il faudrait en fait entendre une différence, qui peut paraître subtile, entre "ordre inférieur" et "ordre d'infinitude inférieur", un ordre inférieur à un autre étant d'un ordre d'infinitude supérieur à celui-ci, au sens où il est infiniment moindre en grandeur ou puissance ou valeur, selon les domaines considérés. Il faudrait donc entendre sous infinitude "infiniment petit". Si l'on suit le texte latin à la lettre, on obtient une traduction, plus lourde peut-être, mais qui ne souffre aucune ambiguïté à ce propos :

*"... in continua quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas nihil ei superaddere".*

*"... dans une quantité continue, des quantités en aussi grand nombre et de quelque genre qu'on voudra, ajoutées à une quantité d'un genre supérieur, n'y ajoutent rien de plus".*

La seconde partie de ce texte, extrait de la Pensée 308, est l'expression sur le plan métaphysique de ce que la première partie exprimait en langage mathématique.

Il s'agit de hiérarchiser les trois ordres :

- l'ordre des grandeurs physiques et cosmologiques,
- l'ordre des grandeurs spirituelles,
- l'ordre des grandeurs religieuses,

selon un ordre de valeur qui fait du dernier l'ordre infiniment supérieur, ordre suprême, parce que divin, d'une distance à l'ordre inférieur qui est telle que notre esprit ne peut la mesurer, la comprendre, mais dont il peut avoir une représentation, une image (cf. "figure") par la distance infinie qui sépare l'ordre des corps de celui des esprits. Il s'agit donc de hiérarchiser ces trois ordres, en rappelant que :

● chaque ordre a ses grandeurs qui ont

leurs valeurs, leurs attraits, "leur éclat"... et leurs hommes :

- biens matériels de ce monde, valeurs de chair pour l'ordre corporel : éclat du pouvoir politique, de celui de la richesse ou de la force armée qui font des rois, des riches et des capitaines les puissants et les enviés de ce monde ;
- biens spirituels du savoir, valeur de l'esprit pour l'ordre spirituel où brillent les grands génies ; Pascal prendra dans le cours de cette Pensée l'exemple d'Archimède :

"Archimède sans éclat\* serait en même vénération. Il n'a pas donné des batailles pour les yeux, mais il a fourni à tous les esprits ses inventions. O qu'il a éclaté aux esprits".

- biens divins, valeurs de charité où brillent les saints ;

● ces trois ordres n'étant pas de même genre, un abîme infini les sépare. leurs grandeurs n'ont pas de rapport :

- l'inférieur ignore les valeurs de l'ordre supérieur : il ne peut les voir ni les comprendre :

"... il y en a qui ne peuvent admirer que les grandeurs charnelles comme s'il n'y en avait pas de spirituelles. Et d'autres qui n'admirent que les spirituelles comme s'il n'y en avait pas d'infiniment plus hautes dans la sagesse".

- le supérieur est insensible à l'éclat des valeurs de l'ordre inférieur ;

● par conséquent, les valeurs d'un ordre sont sans valeur au regard de celles de l'ordre supérieur : même ajoutées les unes aux autres, elles ne sont rien, et ne peuvent rien lui ajouter ni lui retrancher. Elles sont comme :

"L'unité jointe à l'infini /qui/ ne l'augmente en rien..."

selon la Pensée 418, déjà citée, c'est pourquoi,

\* même s'il n'avait pas été un proche du roi de Syracuse.

"Il eût été inutile à Archimède de faire le prince dans ses livres de géométrie, quoiqu'il le fût".

Pensée 308.

On peut donc en déduire que c'est par un saut que l'on peut passer d'un ordre à l'ordre supérieur ou à l'ordre inférieur, et non pas, respectivement par multiplication ou soustraction des valeurs de l'ordre où l'on se trouve.

Les différents éléments de ce texte peuvent être organisés dans le tableau synoptique suivant :

|   | CHARITÉ   | ORDRE DIVIN<br>infiniment plus élevé | GRANDEUR DE LA SAGESSE : LES SAINTS | ORDRE<br>à tout |
|---|---|--------------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| l'inférieur ignore l'ordre plus inférieur |   |                                      |                                     |                 |
| l'inférieur ignore                        | ORDRE<br>spirituel<br>se connaît et connaît les corps |                                      | ORDRE<br>à tout                     | ORDRE<br>à tout |
|   |   | ORDRE<br>à tout                      | ORDRE<br>à tout                     | ORDRE<br>à tout |
|   | ORDRE<br>à tout                                       | ORDRE<br>à tout                      | ORDRE<br>à tout                     | ORDRE<br>à tout |

Chaque ordre a :

- ses grandeurs, son éclat, ses types d'hommes
- ses grandeurs sont incomparables, sans communes mesure avec celles des autres ordres :
  - celles des ordres supérieurs sont invisibles pour les ordres inférieurs
  - l'ordre supérieur est insensible à l'éclat des grandeurs des ordres inférieurs
  - qui ne peuvent rien lui ajouter ni lui retrancher.

Le rapprochement de ces deux textes rend sensible l'unité de la pensée de Pascal dans le domaine mathématique et dans le domaine métaphysique. C'est la même structure : la hiérarchie des ordres, c'est le même principe, fondé sur la notion de genre commun, qui permettent de penser ici et là la différence irréductible d'un genre à un autre. Il est tentant de demander laquelle, de la pensée mathématique ou de la pensée métaphysique, a pu déterminer l'autre.

Mais n'est-ce pas là une question impossible ? Outre les difficultés ou les impossibilités à dater tel ou tel écrit, les champs de pensée sont probablement moins séparés dans la tête du penseur qu'ils ne sont, pour les besoins de l'analyse, dans les écrits des commentateurs.

### ANNEXE I.

#### Activité Math-Philo.

A l'initiative de ma collègue de Mathématiques en TA 2, Marie-Claire CASTAGNET, et dans le but d'aider les élèves à surmonter les difficultés, rencontrées dans le cours sur les limites, à comprendre que :

$$\lim f-g = -\infty,$$

$$\text{quand } \lim f = A \text{ et } \lim g = +\infty,$$

ce double texte a été distribué à la classe de TA A1-A2, avec l'indication de ses références, du fait que "radices" est un mot latin, et avec la traduction modifiée de la fin de la première phrase : "...d'un ordre inférieur".

Les élèves ont eu à le lire en dehors du cours, avec comme consigne générale de rechercher ce qui est commun aux deux textes :

- 1) en dégagant le sens du principe exprimé dans le premier texte et la règle qu'en tire Pascal :
  - . ce qui les obligeait à repérer l'énoncé du principe, à le distinguer des exemples qui l'illustrent, et à repérer l'énoncé de la règle dans "il faut..." ;
- 2) en essayant de repérer, dans le second texte, l'expression de ce principe, dans les rapports entre les trois ordres que Pascal décrit :
  - . ce qui les obligeait à repérer ces trois ordres, leurs grandeurs, les hommes qui les incarnent.

Il avait été décidé de prendre une heure de mon cours de philosophie pour reprendre collectivement ce travail en présence du professeur de mathématiques,

Il avait été décidé de prendre une heure de mon cours de philosophie pour reprendre collectivement ce travail en présence du professeur de mathématiques, afin que les élèves puissent contrôler ce qu'ils avaient compris et poser des questions sur ce qui les avait arrêtés, demander des compléments d'informations... En fait, sur le terrain, une heure s'est révélée insuffisante.

Les questions des élèves ont orienté plus de la moitié de l'heure sur le second texte, ce qui a conduit à mettre en évidence les différents ordres de grandeur, leur incommensurabilité, à se référer à d'autres passages de la Pensée 308 (exemple d'Archimède...), et enfin à voir s'il était possible de transposer les résultats de cette étude pour comprendre le premier texte.

L'analyse du début de ce texte a conduit à fournir aux élèves l'axiome d'Archimède comme moyen de déterminer si deux grandeurs sont de même genre. Certains élèves ont été arrêtés par la compréhension des exemples, ne comprenant pas que : "une ligne soient formée de points et que des points n'ajoutent rien aux lignes". On pourrait à ce propos envisager un travail sur la divisibilité et les arguments de Zénon d'Elée.

La fin de l'heure s'est terminée, à partir de l'utilisation de l'axiome d'Archimède, sur ce qui est apparu comme une confusion entre nombre et quantité continue.

Une nouvelle heure s'imposait, ainsi que la recherche d'une stratégie qui fasse percevoir aux élèves la nécessité de distinguer les deux (nombre et quantité continue) et l'enjeu de cette distinction : la distance du fini à l'infini.

- 1) premier temps : faire appréhender la notion de quantité continue par le biais de l'idée d'une "série de nombres que l'on somme dans un processus à l'infini", "qui tend vers une limite infinie", "une fonction et non un nombre".....
- 2) montrer que le problème ne se pose pas de la même façon pour un nombre et une quantité ou grandeur continue, ou encore, qu'on ne peut pas entendre, sous "grandeurs simples", "nombres simples", dans l'exemple pris par Pascal.

Car, si on applique l'axiome d'Archimède : "Les grandeurs sont dites de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre", un nombre donné et son carré sont de même genre :

Exemple :

3 et 9, puisque  $3+3+3+3 = 3 \times 4 = 12$ , qui surpasse 9.

Par contre, si on fait une sommation de nombres allant vers l'infini, on obtient une grandeur qui est d'un autre ordre que ces nombres eux-mêmes.

Pour rendre tout cela sensible, nous avons travaillé à partir de l'exemple suivant :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n.$$

Le calcul de  $S$  a été fait en rappelant l'astuce utilisée par GAUSS enfant, alors que le maître demandait à sa classe de faire la somme des 100 premiers nombres entiers :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1.$$

$$(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1) = 2S$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Plus  $n$  grandit, plus la valeur-somme  $S$  s'approche de  $\frac{n^2}{2}$ .

Dans ce résultat, qui n'est qu'un exemple fini, il faut envisager que  $n^2$  et  $n$  sont la représentation finie de deux grandeurs continues. Ce résultat permet de saisir que c'est  $n^2$  qui détermine la somme alors que  $n$  devient négligeable, et, à l'infini, a une valeur nulle, c'est-à-dire qui ne pèse rien, alors qu'elle est elle-même infinie.

On peut facilement fournir une aide à la représentation en faisant faire le calcul de la somme avec des valeurs qui sont encore intuitivement appréciables :

$$n = 10, 100, 1000, 10000.$$

Une telle étude fournit des moyens pour saisir :

- 1) la différence entre "valeur nulle" et " $= 0$ ", puisque la quantité continue  $n$  tend vers l'infini,
- 2) donc, par là-même, l'idée de rapport qui détermine - celle d'ordre de grandeur, puisque c'est par rapport à la quantité continue  $n^2$  qu'elle a une valeur nulle, et non en elle-même,
- 3) et en même temps, l'idée d'infinis d'ordres ou de genres différents, puisque quand  $n$  tend vers l'infini, il a une valeur nulle par rapport à l'infini vers lequel tend  $n^2$ .

A l'issue de l'heure précédente, un élève nous avait dit : "ce que je ne comprends pas, c'est  $+\infty - \infty$ "...

Il m'a semblé qu'on tenait là un moyen d'approcher ce problème d'une manière autre que formelle, et de montrer que les mêmes principes peuvent fonctionner pour montrer que  $\infty - \infty$  est a priori indéterminé et que  $\infty + \infty = \infty$ .

En effet, pour ce qui est de  $\infty + \infty = \infty$ , on ne connaît pas a priori leur ordre respectif. Mais, soit l'un des deux infinis est d'un ordre inférieur à l'autre, et il ne lui ajoute rien ; soit ils sont de même genre, et on peut concevoir que, puisqu'il s'agit d'infini, l'ajouter à lui-même ne lui ajoute rien, puisqu'il est déjà tout, en son genre.

Pour ce qui est de  $\infty - \infty$ , tant qu'on n'a pas d'indication sur l'ordre de grandeur de chacun de ces infinis, on ne peut rien dire. Le résultat sera différent selon qu'ils seront de même genre ou de genre différent.

En fait, on pourrait aller plus loin. L'utilisation du principe des ordres de grandeur énoncé par Pascal permettrait aux élèves de Terminale A de calculer les limites infinies.

Au cours de philosophie suivant, les élèves ont répondu à un bref questionnaire d'évaluation de ce travail "math-philo":

| QUESTIONS   | TA.1<br>15 élève.  | TA.2<br>15 élève.                                    | TOTAL<br>30              |
|---|--|--|--------------------------|
| - Travail intéressant ?   | OUI<br>44,5 %<br>NON<br>55,5 %<br>INDIFFERENT<br>0 %         | OUI<br>66,5 %<br>NON<br>33 %<br>INDIFFERENT<br>0,5 % | 44,5 %<br>33 %<br>42,5 % |
| - A-t-il permis de mieux comprendre certaines notions mathématiques ? | PAS DU TOUT<br>0 %<br>UN PEU<br>55,5 %<br>BÉaucoup<br>44,5 % | OUI<br>66,5 %<br>NON<br>33 %                         | 0 %<br>27 %<br>33 %      |
| - Travail à l'ordre du jour ?   | OUI<br>85,5 %<br>NON<br>14,5 %                               | OUI<br>46,5 %<br>NON<br>53,5 %                       | 85 %<br>15 %             |
| - remarques, suggestions  | REPHIL<br>22 %<br>SANS REP.<br>78 %                          | OUI<br>66,5 %<br>NON<br>33,5 %                       | 62 %<br>38 %             |

- (1) 35 % des réponses disaient la même chose, en des termes différents et souvent plus brefs que ce propos de TA 1 : "Je pense que ce travail fait en cours de philosophie avec la collaboration d'un professeur de math. nous a permis de voir la relation qui existe entre les mathématiques et la philosophie, deux matières jugées trop souvent dissociées, sans aucun rapport".

Enfin, cette remarque d'un TA 2 ne suffirait-elle pas, à elle seule, à inciter à ce genre de travail :

"Ce travail math-philo m'a permis de comprendre que les mathématiques ne sont pas, comme je pensais, quelque chose d'inutile, sans intérêt, mais permettent au contraire de comprendre certains problèmes qui peuvent être philosophiques ou autres".

De l'esprit de géométrie.

Mais le même Euclide qui a ôté à l'unité le nom de nombre, ce qui lui a été permis, pour faire entendre néanmoins qu'elle est au contraire du même genre, il définit ainsi les grandeurs homogènes : "Les grandeurs, dit-il, sont dites être de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre". Et par conséquent, puisque l'unité peut, étant multipliée plusieurs fois, surpasser quelque nombre que ce soit, elle est de même genre que les nombres précisément par son essence et par sa nature immuable, dans le sens du même Euclide qui a voulu qu'elle ne fût pas appelée nombre.

Il n'en est pas de même d'un indivisible à l'égard d'une étendue ; car non seulement il diffère de nom, ce qui est volontaire, mais il diffère de genre, par la même définition, puisqu'un indivisible multiplié autant de fois qu'on voudra, est si éloigné de pouvoir surpasser une étendue, qu'il ne peut jamais former qu'un seul et unique indivisible ; ce qui est naturel et nécessaire, comme il est déjà montré. Et comme cette dernière preuve est fondée sur la définition de ces deux choses, indivisible et étendue, on va achever et consommer la démonstration.

Un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et l'étendue est ce qui a diverses parties séparées.

Sur ces définitions, je dis que deux indivisibles étant unis ne font pas une étendue.

Car, quand ils sont unis, ils se touchent chacun en une partie ; et ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas séparées, puisque autrement elles ne se toucheraient pas. Or, par leur définition, ils n'ont point d'autres parties : donc ils n'ont pas de parties séparées ; donc ils ne sont pas une étendue, par la définition de l'étendue qui porte la séparation des parties.

On montrera la même chose de tous les autres indivisibles qu'on y joindra, par la même raison. Et partant un indivisible, multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas de même genre que l'étendue, par la définition des choses du même genre.

Voilà comment on démontre que les indivisibles ne sont pas de même genre que les nombres. De là vient que deux unités peuvent bien faire un nombre, parce qu'elles sont de même genre ; et que deux indivisibles ne font pas une étendue, parce qu'ils ne sont pas du même genre.

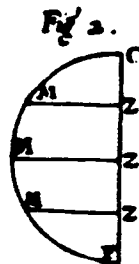
D'où l'on voit combien il y a peu de raison de comparer le rapport qui est entre l'unité et les nombres à celui qui est entre les indivisibles et l'étendue.

Mais si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres ; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser ; de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue. Et on en trouvera un pareil entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps ; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles non plus que les indivisibles d'étendue, et par la même raison. Et alors on trouvera une correspondance parfaite entre ces choses ; car toutes ces grandeurs sont divisibles à l'infini, sans tomber dans leurs indivisibles, de sorte qu'elles tiennent toutes le milieu entre l'infini et le néant.

Voilà l'admirable rapport que la nature a mis entre ces choses, et les deux merveilleuses infinités qu'elle a proposées aux hommes, non pas à concevoir mais à admirer ; et pour en finir la considération par une dernière remarque, j'ajouterai que ces deux infinis, quoique infiniment différents, sont néanmoins relatifs l'un à l'autre, de telle sorte que la connaissance de l'un mène nécessairement à la connaissance de l'autre.

Histoire de la roulette.

J'ai voulu faire cet avertissement pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens ; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là.



Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, la somme des plans ; et ainsi quand je considérerai par exemple (dans la fig.2) le

nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes ; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Expression cosmologique du principe des ordres de grandeur :

Pensée 199. H.

### "Disproportion de l'homme"

Car enfin qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout, infiniment éloigné de comprendre les extrêmes ; la fin des choses et leurs principes sont pour lui invinciblement cachés dans un secret impénétrable.

Egalement incapable de voir le néant d'où il est tiré et l'infini où il est englouti.

Que ferait-il donc sinon d'apercevoir quelque apparence du milieu des choses dans un désespoir éternel de connaître ni leur principe ni leur fin. Toutes choses sont sorties du néant et portées jusqu'à l'infini. Qui suivra ces étonnantes démarches ? l'auteur de ces merveilles les comprend. Tout autre ne le peut faire.

Manque d'avoir contemplé ces infinis les hommes se sont portés témérairement à la recherche de la nature comme s'ils avaient quelque proportion avec elle.

C'est une chose étrange qu'ils ont voulu comprendre les principes des choses et de là arriver jusqu'à connaître tout, par une présomption aussi infinie que leur objet. Car il est sans doute qu'on ne peut former ce dessein sans une présomption ou sans une capacité infinie, comme la nature.

Quand on est instruit on comprend que la nature ayant gravé son image et celle de son auteur dans toutes choses elles tiennent presque toutes de sa double infinité.

toutes les sciences sont infinies en l'étendue de leurs recherches, car qui doute que la géométrie par exemple a une infinité d'infinités de propositions à exposer. Elles sont aussi infinies dans la multitude et la délicatesse de leurs principes, car qui ne voit que ceux qu'on propose pour les derniers ne se soutiennent pas d'eux-mêmes et qu'ils sont appuyés sur d'autres qui en ayant d'autres pour appui ne souffrent jamais de dernier.

Mais nous faisons des derniers qui paraissent à la raison, comme on fait dans les choses matérielles où nous appelons un point indivisible, celui au-delà duquel nos sens n'aperçoivent plus rien, quoique divisible infiniment et par sa nature.

De ces deux infinis des sciences celui de grandeur est bien plus sensible, et c'est pourquoi il est arrivé à peu de personnes de prétendre connaître toutes choses. Je vais parler de tout, disait Démocrite.

Mais l'infinité en petitesse est bien moins visible. Les philosophes ont bien plutôt prétendu d'y arriver, et c'est là où tous ont achoppé. C'est ce qui a donné lieu à ces titres si ordinaires, **Des principes des choses, Des principes de la philosophie**, et aux semblables aussi fastueux en effet, quoique moins en apparence que cet autre qui crève les yeux : **De omni scibili**.

On se croit naturellement bien plus capable d'arriver au centre des choses que d'embrasser leur circonférence, et l'étendue visible du monde nous surpasse visiblement. Mais comme c'est nous qui surpassons les petites choses nous nous croyons plus capables de les posséder, et cependant il ne faut pas moins de capacité pour aller jusqu'au néant que jusqu'au tout. Il la faut infinie pour l'un et l'autre, et il me semble que qui aurait compris les derniers principes des choses pourrait aussi arriver jusqu'à connaître l'infini. L'un dépend de l'autre et l'un conduit à l'autre. Ces extrémités se touchent et se réunissent à force de s'être éloignées et se retrouvent en Dieu, et en Dieu seulement.

Connaissons donc notre portée. Nous sommes quelque chose et ne sommes pas tout. Ce que nous avons d'être nous déroble la connaissance des premiers principes qui naissent du néant, et le peu que nous avons d'être nous cache la vue de l'infini.

Notre intelligence tient dans l'ordre des choses intelligibles le même rang que notre corps dans l'étendue de la nature.

# La vie des ARBELS

3ème épisode :

La reproduction des Arbels.



Feuilleton géométrique de  
Gérard Bel-CHAUVAT.

[N'est-il pas plaisant de retrouver ici les coefficients binômiaux, le triangle de Pascal et la formule du binôme ... ?]

Nos deux premiers épisodes reproduisaient le texte intégral, délicieusement parfumé d'un romantisme pubère, de deux "devoirs à la maison" donnés en classe de Troisième. Cet épisode-ci, de par son sujet plus délicat n'a pas fait l'objet d'un tel devoir ; en fait le texte suit de près une fiche élaborée par des collègues du Lycée Grandmont (Tours) qu'il me plaît de saluer ici et maintenant ...

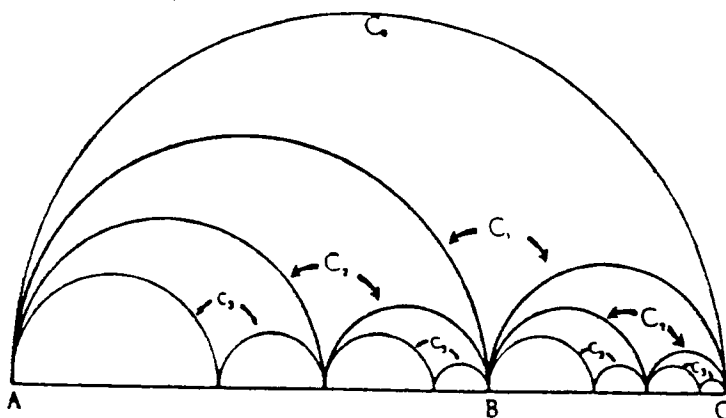
Sujet délicat ? certes puisque nous abordons la célèbre question du sexe des arbels et le problème controversé de leur reproduction ! les premiers arbelogues (Pappus d'Alexandrie - IV<sup>e</sup> siècle avant notre ère, Michel Darchimède - plus tard) se perdaient en conjecture et n'envisageaient que la reproduction des arbels centrés (i.e.  $k = \frac{1}{2}$  voir 2ème épisode).

Il est temps de vous dire la vérité : LES ARBELS SONT HERMAPHRODITES - quel terme affreux, dites ?! mais ce n'est pas tout : ET AUTOGAMES !!

Voyez sur la figure 1 une étape de cette autofécondation : arbels-mère et filles ayant toutes le même rapport  $k$ . La première génération (arbel-mère) est limitée par les courbes  $C_0$  et  $C_n$  ...

- 1) Quel est le nombre de demi-cercles constituant  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  ? et leurs diamètres ? (en fonction de

$$k = \frac{AB}{AC} \text{ ).}$$



- 2) Comment les longueurs  $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$  des courbes  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  varient-elles ?

- 3) Quelles sont les aires  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  des domaines limités par la courbe  $C_0, (C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$  et le segment  $[AB]$  ?

Exprimer  $A_n$  en fonction de  $k$  et  $n$ . Cette aire peut-elle être inférieure à  $\pi \cdot 10^{-3}$  ?

[Unité d'aire : carré de côté AC]

Cette étude vous fait penser aux fractals ? ... c'est le moment de relire l'article de M.Darche et P.Monsellier in PLOT n°9 !

La courbe  $C_\infty$  est-elle fractale ?

Si oui quelle est sa dimension au sens de Hausdorff ?

**abonnez-vous!**

**irem**  
de grenoble

## Petit x

**JOURNAL POUR LES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES  
ET DE SCIENCES PHYSIQUES DU PREMIER CYCLE**

«Petit x» a été créé il y a un an par l'I.R.E.M. de Grenoble pour favoriser la diffusion de réflexions, de compte rendus, de travaux et d'activités réalisés dans les classes.

Pour vous qui ne connaissez pas «Petit x» voici quelques thèmes abordés en 1983 : l'instrumentation de notions mathématiques en 4ème (les C.P.F.N., la pratique des « problèmes ouverts » dans les classes, l'enseignement de l'électronique, la valeur absolue, etc.). Et il y a aussi les activités pour la classe et... le musée de «Petit x».

Pour en savoir plus, nous vous invitons à vous abonner à «Petit x».

Vous hésitez ? Sachez que l'année à venir est pleine de promesses. Dans les prochains numéros vous trouverez des articles sur la géométrie des transformations en 4ème, la démonstration, les problèmes langagiers en 6ème-5ème et surtout un numéro spécial consacré au calcul algébrique.

Alors n'hésitez plus.

Abonnez-vous ! Faites abonner votre collège !

---

### BULLETIN D'ABONNEMENT 1984

retourner à

I.R.E.M. de Grenoble (Petit x)  
B.P. 41

38402 Saint-Martin-d'Hères  
FRANCE

Je renouvelle mon abonnement à «Petit x» pour l'année 1984 au tarif :


France et C.E.E. : 96 F.

Mars C.E.E. : 126 F.

NOM :

Prénom :

Adresse :

Ci-joint le règlement de  à l'ordre de Monsieur l'Agent Comptable de l'I.R.E.M.

• Cacher à son usage

Le quatrième congrès international sur l'enseignement mathématique vient de se tenir à Adélaïde, capitale de l'un des états du sud de l'Australie.

Il a rassemblé 1984 (sic !) participants dont 800 australiens, une centaine de francophones, cent vingt japonais dont beaucoup sont membres de l'Association des Professeurs de Mathématiques A.M.I. du Japon, (nous vous en reparlerons dans le supplément *PLIAGES* du *PLOT*), et une très très grande majorité d'anglophones.

Le prochain congrès, en 1988, aura lieu en Hongrie, patrie de Bolvai (1802-1860).

Nous vous proposons ci-après un document préparant les interventions sur le thème "Informatique et Mathématique". Ce thème, en pleine maturation, a attiré beaucoup de participants. Si les présentations concrètes ont souvent été décevantes (à l'exception, entre autres, des travaux français), les réflexions générales, comme toujours, devraient permettre à ceux qui s'interrogent sur l'évolution technologique rapide de l'enseignement de prendre un peu plus de recul par rapport au phénomène informatique.

Ce document constitue une étape dans ces réflexions.

## MOTS

vous connaissez ?

6 fascicules  
plus de 50 rubriques  
(angles, approximation, ensemble, équation,  
proportionnalité...)

*Le dernier fascicule paru est consacré à*

## GRANDEUR MESURE

### MOTS

*n'est ni un dictionnaire, ni un lexique,  
ni un manuel*

### MOTS

*présente les réflexions d'une équipe à propos  
de mots ou de phrases couramment employés*

### MOTS

*est vraiment l'ouvrage qui vous manque !*



---

L'INFLUENCE DES ORDINATEURS  
ET DE L'INFORMATIQUE  
SUR LES MATHÉMATIQUES ET LEUR  
ENSEIGNEMENT.

---

Premier rapport C.I.E.M.  
(Commission Internationale sur  
l'Enseignement des Mathématiques)

Avec :

RF. CHURCHHOUSE, B. CORNU,  
AP. ERSHOV, AG. HOWSON, JP. KAHANE  
F. PLUVINAGE, A. RALSTON,  
JH. VAN LINT, M. YAMAGUTI.

Les ordinateurs et l'informatique sont en train de bouleverser toutes les sociétés de notre époque. Comme la machine à vapeur a introduit la première révolution industrielle, l'ordinateur introduit ce qu'on appelle souvent la seconde révolution industrielle. Les perspectives sont immenses : suppression de travaux répétitifs ou pénibles, nouveaux besoins, nouveaux métiers, nouvelles qualifications.

Le développement des sciences physiques a accompagné la première révolution industrielle. On doit s'attendre à ce que les sciences nouvelles, liées à l'informatique, accompagnent la seconde. La communication, l'informatique, l'organisation, vont poser une série de problèmes qui peuvent avoir un rôle moteur dans le développement scientifique, autant que les problèmes dont l'origine est le monde physique.

D'un autre côté, l'ordinateur permet de traiter les énormes calculs nécessités par la théorie et les expériences à mener dans presque toutes les grandes disciplines scientifiques, de la physique des hautes énergies à la biologie moléculaire.

Les mathématiques n'échappent pas à ce mouvement.

Elles sont la plus ancienne des sciences, et celle dont les valeurs apparaissent les plus permanentes. Elles sont la science la plus répandue ; des millions d'hommes participent à son enseignement, et cela dans tous les pays du monde. Elles jouent un rôle de base et de référence à la fois pour les autres sciences - y compris l'informatique - et pour les hommes dans leur activité quotidienne. En même temps elles évoluent, en fonction de leur dynamique interne pour une part, en fonction de facteurs externes d'autre part. Parmi ces facteurs externes, les ordinateurs et leurs usages jouent aujourd'hui un rôle majeur.

C'est pourquoi la CIEM a pris l'initiative d'organiser une réflexion internationale sur le thème : influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement. Comme première étape, elle soumet à la discussion le présent rapport, organisé autour de trois grandes questions :

1. De quelle façon les ordinateurs et l'informatique influent-ils sur les notions mathématiques, les valeurs, la progression de la science mathématique ?
2. De quelle façon de nouveaux cursus d'études peuvent-ils répondre aux besoins et aux possibilités ?
3. De quelle façon l'usage des ordinateurs peut-il aider l'enseignement mathématique ?

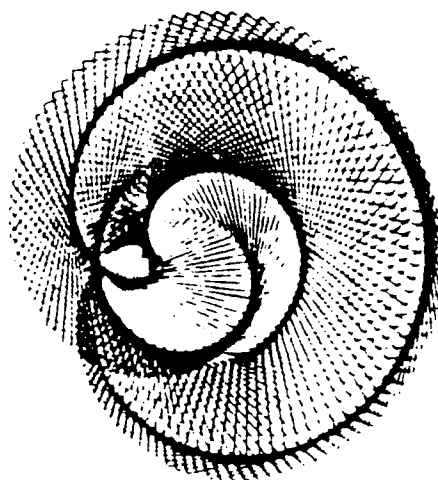
Deux aspects sont essentiels : l'influence de la technologie, qui permet de faire mieux, plus vite, et autrement, et l'influence des concepts fondamentaux de l'informatique, au premier rang desquels se trouve l'algorithmique.

## I. L'EFFET SUR LES MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques ont toujours dépendu des moyens de calcul et des moyens d'écriture. La numération décimale de position, l'écriture symbolique, les tables de valeurs numériques ont précédé les notions modernes de nombre réel ou de fonction. On a calculé les intégrales, puis écrit le signe d'intégration, avant de dégager les concepts d'intégrale de Riemann ou le Lebesgue. On peut s'attendre à ce que les nouveaux moyens de calcul et d'écriture qu'offrent les ordinateurs et l'informatique permettent l'émergence de nouveaux concepts mathématiques. Mais déjà aujourd'hui, ils mettent en valeur des notions et des méthodes, anciennes ou nouvelles, qui n'avaient pas leur place dans les mathématiques classiques. Et sur les notions les plus classiques, ils permettent un regard neuf.

Prenons la notion de nombre réel. C'est un point sur la droite  $\mathbb{R}$ , et cette représentation est efficace pour comprendre l'addition et la multiplication. C'est aussi un point d'accumulation de fractions, par exemple des fractions continues qui donnent la meilleure approximation d'un réel par des rationnels. C'est aussi un développement décimal illimité. C'est aussi un nombre écrit en virgule flottante. L'expérience que peut donner la simple calculatrice de poche peut valoriser les trois derniers aspects. L'algorithmique des fractions continues -qui n'est autre que celui d'Euclide- va redevenir classique. Des opérations compliquées (exponentiation, sommation, séries, itération de fonctions) deviendront simples. Des opérations simples (addition) produiront des problèmes nouveaux : sommer dans un ordre ou dans un autre (à partir des grandes ou à partir des petites valeurs) ne donne pas le même résultat numérique.

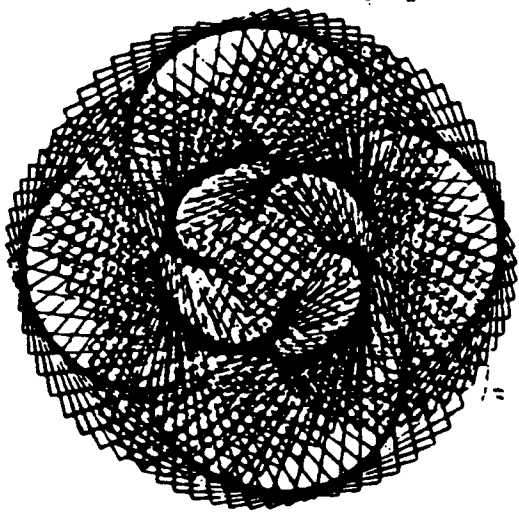
Prenons la notion de fonction. L'enseignement connaît d'une part les fonctions usuelles et les fonctions spéciales -c'est-à-dire les fonctions tabulées du 17ème au 19ème siècle-, d'autre part la notion générale de fonction introduite par Dirichlet en 1830. Encore aujourd'hui, classiquement, résoudre une équation différentielle consiste à la ramener à des intégrations, et si possible à des fonctions usuelles. Cependant, ce qui est en jeu dans les équations fonctionnelles, c'est le calcul effectif et l'étude qualitative des solutions. Les fonctions auxquelles on s'intéresse sont donc les fonctions calculables, et non plus seulement les fonctions tabulées. Les théories de l'approximation et de la superposition des fonctions -bien antérieures aux ordinateurs- se trouvent valorisées. Le champ des fonctions usuelles s'étend, et des fonctions réputées inusuelles s'introduisent naturellement dans la discrétisation de problèmes non linéaires.



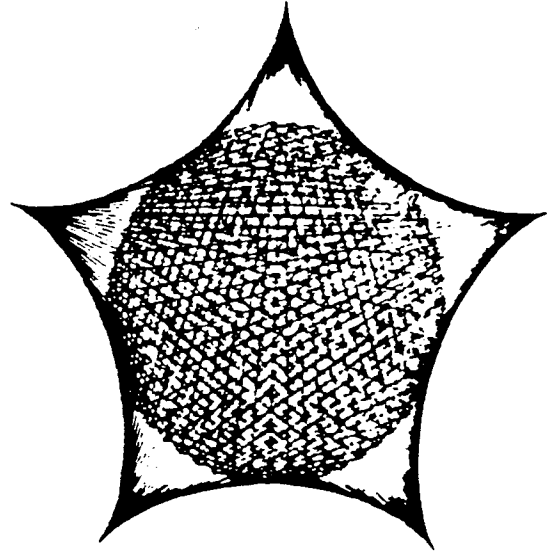
Prenons les ensembles de points, liés aux systèmes dynamiques, à l'itération des transformations, ou aux processus stochastiques. L'usage des ordinateurs a ravivé leur étude, aussi bien chez les physiciens que chez les mathématiciens, et suscité une nouvelle terminologie : attracteurs étranges, fractals.

Sur ces exemples, il apparaît que les ordinateurs et l'informatique ont suscité de nouvelles recherches, remis à l'ordre du jour des questions étudiées il y a longtemps, rendu possible l'étude de questions nouvelles. Sur chacun de ces aspects, nous souhaitons que la discussion fasse apparaître de nouveaux éléments.

Les mathématiques ont toujours eu un aspect expérimental. Euler a insisté sur le rôle de l'observation dans les mathématiques pures : "les propriétés que nous connaissons des nombres ont été généralement découvertes par l'observation, et découvertes bien avant que leur validité ait été confirmée par la démonstration... C'est par l'observation que nous découvrons sans cesse des propriétés nouvelles, qu'ensuite nous nous efforcerons de prouver". Les ordinateurs multiplient brusquement nos possibilités d'observation et d'expérimentation en mathématiques. Dans l'équation des ondes non linéaire, la solution -soliton a été découverte par expérimentation numérique avant de devenir un objet mathématique, et de donner lieu à une théorie rigoureuse. Dans l'itération des transformations rationnelles, ce sont des dessins obtenus par ordinateur qui ont guidé les recherches récentes. Il y a tout un nouvel art de l'expérimentation qui se développe, dans toutes les branches des mathématiques. Des calculs autrefois impraticables deviennent aisés ; il s'agit de bien les mener. Des visualisations sont possibles, et elles constituent un facteur d'unité entre mathématiciens, en leur offrant des sujets d'études que différents spécialistes peuvent mener en commun. On peut dire que le nombre et la variété des stimulus auxquels on est en mesure de soumettre les êtres mathématiques pour apprécier leurs réactions ont considérablement augmenté. La conscience de ces possibilités nouvelles a pénétré l'ensemble de la recherche mathématique depuis quelques années. Mais elle n'a pas encore pénétré dans l'enseignement. C'est pourtant de caractère expérimental, praticable maintenant à grande échelle, qui est sans doute le plus prometteur pour le renouveau de l'enseignement des mathématiques.



L'informatique oblige à un nouveau regard sur la notion de variable, et sur le lien entre symbole et valeur. Ce lien est fortement exploité en mathématiques (par exemple dans le symbolisme du calcul différentiel). En informatique, la nécessité de réaliser, de matérialiser les valeurs, pose ce problème d'une nouvelle façon. Le symbolisme des fonctions n'est pas entièrement transposable. Cela conduit à des langages de types différents : langages fonctionnels, ou langages impératifs, basés sur le concept de l'état des variables.



Les mathématiques sont aussi, et restent, une science de la preuve. Mais le statut de la preuve n'est pas immuable. Le niveau de rigueur et de formalisation dépend des époques et des domaines ; de même la "beauté" de la preuve. Il y a une vingtaine d'années, la mode était aux preuves non constructives pour les théorèmes d'existence : méthode des idéaux pour les p.q.c.d., principe des tiroirs pour l'approximation rationnelle, axiome du choix en analyse fonctionnelle, méthodes probabilistes sans constructions explicites, etc... Aujourd'hui le point de vue a changé. Chaque fois que c'est possible, on utilisera dans la preuve un algorithme, permettant d'obtenir effectivement l'objet cherché.

Les ordinateurs ont un autre effet sur le statut de la preuve, que la fameuse démonstration du théorème des quatre couleurs a mis en évidence. Jusqu'ici, les preuves les plus énormes étaient complètement rédigées, et l'appel aux informations extérieures (tables, références) était parfaitement contrôlé.

En principe un mathématicien solitaire était censé pouvoir suivre et vérifier la totalité d'une preuve grâce à la rédaction.

On voit apparaître des nouveaux types de démonstration : preuves numériques, où interviennent de grands nombres, de grandes quantités, non manipulables à la main, et preuves algorithmiques, basées sur l'effectivité d'algorithmes. Avec la preuve assistée par ordinateur, une pratique nouvelle s'introduit. Elle ne semble pas encore codifiée. Elle le sera sans doute dans l'avenir.

Les algorithmes ont joué un rôle important, depuis Euclide, et plus encore depuis la naissance de l'algèbre. C'est le concept mathématique le plus important pour l'informatique.

Nous avons rappelé le rôle des algorithmes comme outils dans la preuve. Ils peuvent être des outils essentiels du calcul. Le simple exemple du produit de deux matrices  $n \times n$  vaut d'être cité : l'algorithme de Strassen (1968) réduit de 8 à 7 les produits numériques à effectuer pour deux matrices  $2 \times 2$  ; généralisé aux matrices  $n \times n$ , il permet de réduire le nombre de produits numériques à  $n^{2.7}$  au lieu de  $n^3$ , ce qui est de grande importance pratique pour les grandes valeurs de  $n$ .

Enfin, les algorithmes constituent un sujet d'études par eux-mêmes, nécessitant un apport mathématique important : des théories et des raisonnements mathématiques interviennent pour étudier la complexité, l'effectivité des algorithmes, pour établir des preuves d'algorithmes, et également pour élaborer des algorithmes. Citons par exemple le rôle des invariants et des points fixes dans la preuve d'algorithmes.

Il faut souligner que de plus en plus, les algorithmes sont appelés à jouer un rôle central dans la société : ils interviennent dans la vie des entreprises, dans les technologies, dans l'automatisation ; des problèmes mathématiques ont ainsi une portée pratique considérable.

Les systèmes symboliques permettent désormais des calculs littéraux difficiles, et il faut prendre la mesure de leurs performances actuelles, et de leur

rôle dans la recherche mathématique, comme de leur influence possible dans l'enseignement supérieur. L'informatique élargit le champ des recherches mathématiques sur le calcul formel.

## II. L'EFFET SUR LES PROGRAMMES.

Les programmes résultent généralement d'une longue tradition, et ils évoluent en fonction de deux facteurs principaux : les besoins de la société et l'état de la discipline. Les besoins de la société sont très divers : dans chaque pays, les études préparent à différentes professions, qui ont chacune leurs exigences ; entre les différents pays, les priorités nationales peuvent être différentes. A priori, les besoins sociaux introduisant donc dans les programmes un élément de diversité et même de dispersion. La référence à la discipline est généralement un facteur d'unité, lorsque les spécialistes s'entendent sur ce qui est essentiel. Et cette unité répond aussi à un besoin social, qui est d'avoir en commun des connaissances et un langage.

Nous avons donc à envisager deux grandes séries de questions : les premières relatives aux besoins sociaux exprimés, aux expériences locales, aux politiques nationales ; les secondes relatives aux possibilités nouvelles, aux inflexions d'ensemble à préparer, aux choix inspirés par l'état présent de la science et de la technique.

Voici trois questions inspirées par le contexte social (le cadre national, l'enseignement scientifique, l'environnement industriel).

### Question 1.

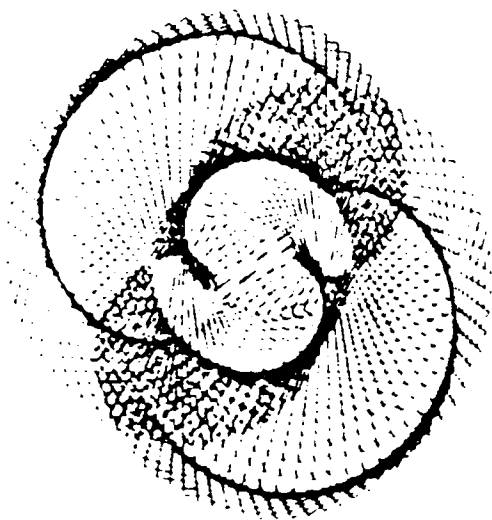
Dans chaque pays y a-t-il de nouveaux programmes de mathématiques définitifs, provisoire, expérimentaux - motivés par l'introduction des ordinateurs et de l'informatique ? Les réponses partielles que nous avons font état de programmes expérimentaux.

### Question 2.

Les mathématiques servant à bien d'autres disciplines -physiciens, ingénieurs, biologistes, économistes, etc...- quels sont les changements suggérés par l'importance croissante des ordinateurs et de l'informatique dans ces disciplines ? Les réponses partielles que nous avons viennent des informaticiens eux-mêmes.

### Question 3.

Quelles sont les mathématiques nécessaires à la culture scientifique de base -au niveau universitaire- dans le nouvel environnement industriel ? Les réponses partielles que nous avons -venant d'informaticiens- font état d'une demande théorique forte : l'usage des ordinateurs et de l'informatique exigerait plus de mathématiques, et mieux comprises, et conduirait à un nouvel équilibre entre les mathématiques "pures" et les mathématiques "appliquées".



Arrêtons-nous à ce point avant de poser une nouvelle série de questions.

...

L'informatique aura sans doute trois effets majeurs sur l'orientation des enseignements. D'abord, des systèmes mathématiques symboliques vont rendre simples et rapides des questions autrefois ardues et compliquées. Aujourd'hui déjà, il existe des programmes pour calculer des intégrales définies, résoudre des équations différentielles, voire calculer des solutions explicites de certaines équations fonctionnelles. D'après, l'enseignement des mathématiques peut insister moins qu'autrefois sur la mise en oeuvre des moyens classiques d'intégration. Par contre, l'enseignement doit permettre à l'étudiant de faire face à des problèmes plus nombreux en faisant appel aux systèmes disponibles, et pour cela de com-

prendre les mathématiques sous-jacentes. Plus il y aura de programmes disponibles, et mieux il faudra connaître la théorie mathématique pour s'orienter.

Ensuite, l'informatique fait appel à des mathématiques discrètes : combinatoire, graphes, codage. Les applications de l'informatique à la gestion, à la communication, à l'information, font peu usage du calcul différentiel et intégral, mais elles mettent en oeuvre des structures variées sur des ensembles finis. Il convient d'examiner si les mathématiques discrètes peuvent être substituées à certaines parties classiques de l'analyse dans la formation de base des étudiants, et si certains concepts fondamentaux de l'analyse peuvent être abordés à partir de l'étude de situations discrètes. La place des séries, par exemple, dans les cours d'analyse, peut s'en trouver modifiée.

Enfin, l'effet général sur les mathématiques a des conséquences nécessaires dans leur enseignement, dans l'importance donnée aux sujets et aux méthodes, dans l'ordre choisi pour l'exposition des matières.

Dans tous les domaines, on peut songer aux expériences numériques et visuelles destinées à fonder l'intuition. On peut favoriser une présentation algorithmique des théories et des preuves.

Ces réflexions conduisent à poser une deuxième série de questions :

### Question 4.

Quelles sont les mathématiques sous-jacentes aux systèmes mathématiques symboliques ? Comment doivent-elles être introduites dans les programmes ?

### Question 5.

Quelles sont les mathématiques discrètes à introduire ?

### Question 6.

Quels sont les changements envisageables dans l'ordre des matières enseignées (séries avant intégrales, statistiques avant probabilités, probabilités avant intégration...)?

### Question 7.

En particulier, quels sont les éléments de

logique, d'analyse numérique, de statistiques, de probabilités, de géométrie, qui peuvent être introduits dès le début des cursus universitaires ?

#### Question 8.

Quels sont les changements envisageables dans la présentation des sujets, particulièrement sous l'influence des algorithmes disponibles (méthode de Newton pour la résolution des équations, fractions continues pour les nombres réels, polynômes d'interpolation pour le calcul approché des intégrales, triangulation en algèbre linéaire, etc....) ?

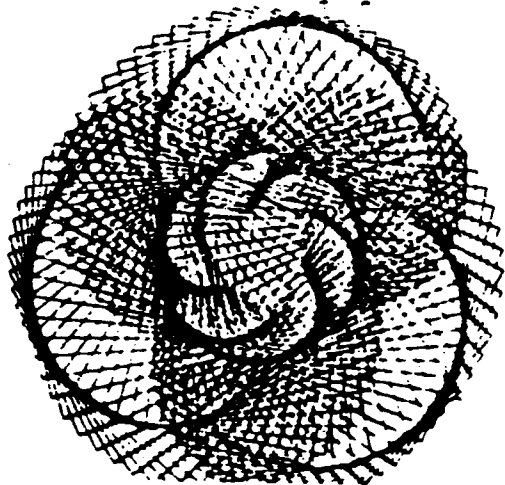
#### Question 9.

La plus importante. Quelles sont les suppressions possibles dans les enseignements de base (17-18ans) ?

Les changements que l'informatique et les ordinateurs apportent aux programmes vont évidemment avoir des conséquences sur la formation dont les enseignants auront besoin. Outre les éléments d'informatique qui leur seront nécessaires, il faudra les préparer à enseigner les mathématiques d'une manière nouvelle. Ce problème va se poser aussi bien au niveau de la formation continue, qu'à celui de la formation initiale des enseignants. Nous posons donc la question suivante :

#### Question 10.

Quels sont les éléments d'informatique à introduire dans la formation des enseignants, et comment peut-on les préparer à enseigner les mathématiques dans le nouveau contexte dû à l'informatique ? Des expériences partielles existent déjà sur ce thème.



### III. L'AIDE A L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES.

#### 3.1. Quelques causes générales de changement dues aux ordinateurs.

L'emploi des ordinateurs oblige à ne plus seulement voir dans le domaine expérimental une source d'idées mathématiques et un terrain pour les illustrations des résultats, mais un lieu de confrontation permanente théorie-pratique. Mais ceci pose le problème, dans la formation des professeurs comme des étudiants, de promouvoir l'attitude expérimentale (observation, essais, contrôle de variables, mises à l'épreuve) au même titre que l'attitude mathématique (conjecture, preuve, vérification). Cela suffit-il pour parler, comme certains, de "Mathématiques expérimentales" ?

L'outil fait apparaître un triangle étudiant-professeur-ordinateur là où il n'y avait jusqu'à présent qu'une relation duale. N'y a-t-il pas un risque de réduction du travail proposé aux étudiants sur l'ordinateur à des activités simplistes, "sans risque" pour les professeurs, de façon à ne pas trop modifier la traditionnelle relation étudiant-professeur ?

Les étudiants ne peuvent manquer d'être informés (dans leur milieu ou par les médias) de la généralité d'emploi des ordinateurs ainsi que des périphériques associés, voire des systèmes d'interconnexion avec des banques de données. Ils ont aussi vu des sorties graphiques spectaculaires sur écran, imprimante ou traceurs de courbes. Il en résulte que les étudiants ont de nouvelles attentes par rapport à l'enseignement en général et des mathématiques en particulier. Comment faire utiliser l'ordinateur par les étudiants pour répondre à ces attentes nouvelles ?

Outre les changements d'intérêts auxquels conduit l'informatique, il convient d'attirer l'attention sur les changements de difficulté des exercices et des problèmes. Non seulement l'usage de l'ordinateur change l'ordre de difficulté des exercices, mais il change les difficultés relatives des diverses façons de résoudre un même exercice. Comment prévoir ces nouvelles hiérarchies et en tenir compte dans les propositions d'exercices ?

### 3.2. Objectifs et conditions de travail.

L'ordinateur peut être utilisé comme un "tableau noir" par le professeur. De la même façon, on procède dans les sciences expérimentales à des démonstrations de cours. Dans le cas de l'ordinateur, une interaction beaucoup plus forte avec l'auditoire est possible, par le choix des entrées-machine. Ce type d'utilisation a été expérimenté à différents endroits, mais ne pourra se répandre que moyennant l'élaboration de logiciels nombreux et variés. Quel doit être le "cahier des charges" pour de tels logiciels ?

L'ordinateur peut être aussi l'objet d'une utilisation pour des "travaux pratiques" : manipulation expérimentale d'objets mathématiques, et donner lieu à des programmes de travail ouvert (exemples : traitements statistiques de données d'une étude, explorations géométriques, manipulation de fonctions, ...).

On voit se développer également les "logiciels-ressource", pour le soutien et l'approfondissement. Ces logiciels, appelés à être disponibles dans des "centres multi-média" au sein des établissements, constituent un moyen de communication, au même titre que le document écrit, le film, etc... Ils peuvent fournir à l'étudiant un moyen d'autoévaluation permanente.

L'élaboration des logiciels demande de réunir les compétences de mathématiciens, d'informaticiens et de praticiens de l'enseignement. Comment répartir le travail et au sein de quelles structures, pour espérer produire des logiciels satisfaisants ?

Enfin, une autre utilisation de l'ordinateur en milieu scolaire ou universitaire est l'utilisation en formule "club". Après une période initiale de familiarisation, c'est des utilisateurs que viennent principalement les demandes précises de traitement. Cette forme de travail s'adresse non seulement aux élèves, mais aussi à leurs professeurs. Quels besoins en formation de formateurs détermine-t-elle ?

### 3.3. Traitements.

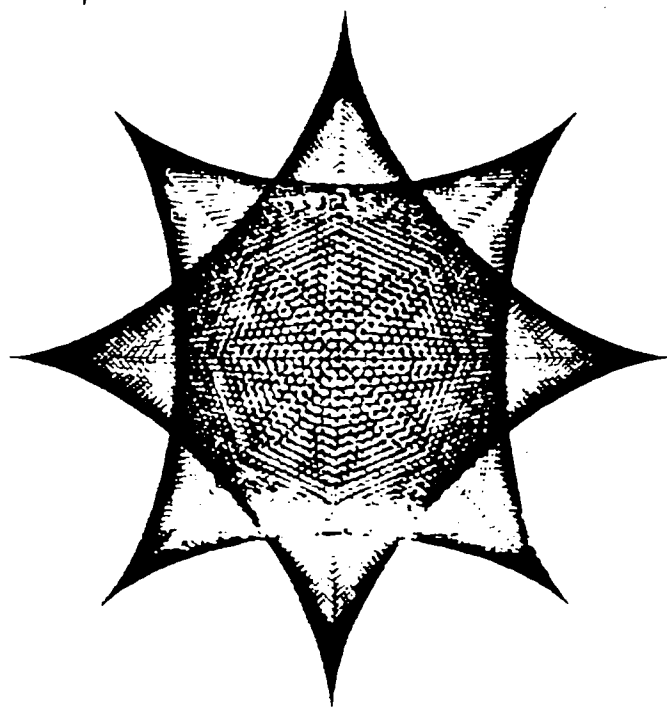
Les périphériques utilisés (écran, imprimante, table traçante, ...) déterminent différentes façons d'utiliser l'informatique. L'adaptation aux mathématiques

pose des problèmes généraux, comme celui de la manipulation de l'écriture symbolique qui, comme chacun sait, n'est pas linéaire au contraire de la suite des caractères d'un texte courant.

Nous pouvons considérer la question des traitements à partir des besoins qui s'expriment dans divers secteurs des mathématiques faisant l'objet d'un enseignement au niveau qui nous intéresse.

A travers ces secteurs, on notera le rôle central de la visualisation, de l'expérimentation, de la simulation, et de l'aide à l'élaboration de conjectures.

Tout d'abord, un certain nombre de concepts fondamentaux sont utilisés dans l'enseignement des mathématiques, souvent de façon implicite : logique intuitive, concept de variable, de fonction, etc... Quelle précision l'informatique peut-elle apporter par rapport à ces concepts ?



Statistiques et probabilités, traitement de données.

L'ordinateur rend possibles les traitements en vraie grandeur. Des problèmes de découpages de données en classes ne sont plus pertinents. Par ailleurs, la simulation est un outil qui tient en probabilités la place que tient le tracé de figures en géométrie. Ainsi, il est possible, grâce à des tirages pseudo-aléatoires, de se mettre réellement dans tous les types de situations de paris, décisions, tests pensables.

## Géométrie.

La production d'images (exemples : vues en perspective d'objets de l'espace, orbites) et la conception assistée par ordinateur (logiciels de tracés) sont extrêmement propices au développement des intuitions. Ils rendent possible l'exploration d'objets et de figures géométriques, et ils donnent accès à de nouvelles figures.

Quels changements le tracé par utilisation d'ordinateurs introduit-il par rapport à la géométrie issue de la règle et du compas ?

## Algèbre linéaire.

L'approche algorithmique fournit des outils de démonstration mathématiques (par exemple le pivot de Gauss), et conduit à poser de façon différente l'étude de questions comme l'inversibilité, la résolution de systèmes, la décomposition des matrices. En outre, la visualisation peut donner un support à l'intuition, par exemple pour l'étude des valeurs propres et de la diagonalisation. Des méthodes comme celle du simplexe ne méritent-elles pas une place dans l'enseignement ?

## Analyse.

Sous l'effet des systèmes symboliques, les exercices du type dérivation, recherche de primitives, développements limités, sont destinés à diminuer. En contrepartie, la représentation graphique des fonctions, les résolutions approchées d'équations numériques ou fonctionnelles, présentent des objets privilégiés de réflexion. L'expérimentation peut être l'occasion de découvrir et de formuler des propriétés qualitatives, avant de les démontrer : allure d'une famille de courbes. Avec l'approximation se posent les problèmes de convergence, à commencer par les suites et les séries. Outre l'aspect qualitatif de la notion de convergence, l'étude numérique conduit naturellement à l'aspect quantitatif : rapidité de convergence. Enfin, la discrétisation fournit un champ d'expérimentation, par exemple pour les équations fonctionnelles.

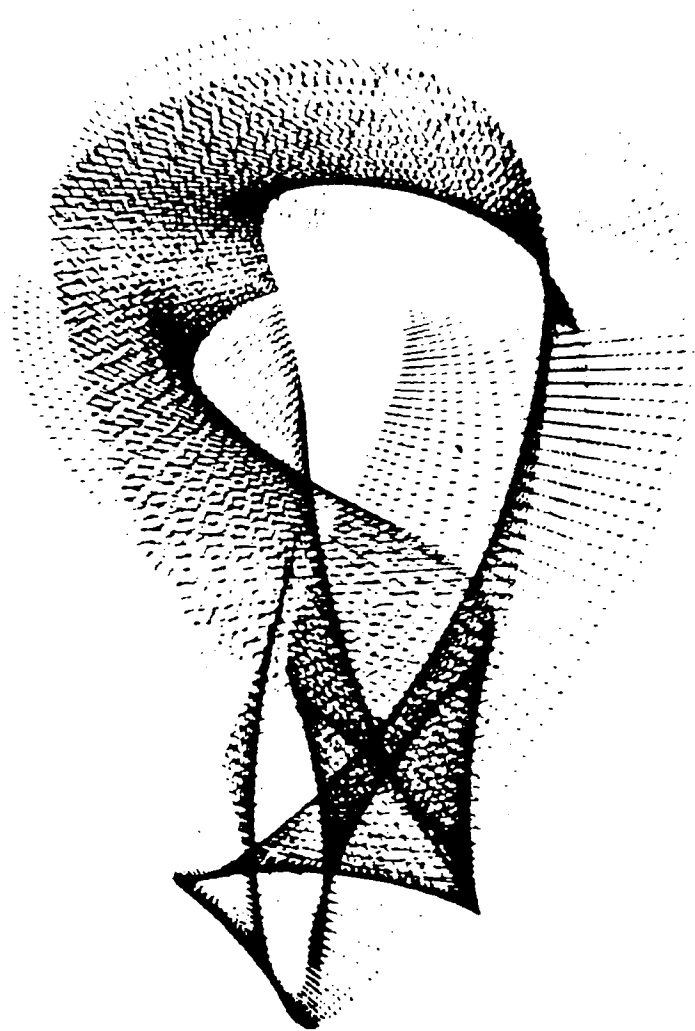
## Ensembles, combinatoire, logique.

Les traitements obligent à donner des définitions opératoires (le dénombrement des surjections  $S(n,p)$  est un exemple simple de récursivité, à condition de définir "opératoirement" une surjection). Dans ce secteur, la production rapide de

nombreux résultats est un moyen d'exploration pour imaginer des conjectures. L'apprentissage de formules présente-t-il alors un intérêt aujourd'hui dans ce domaine ?

## Nombres, analyse numérique.

Les nombres d'une machine sont très différents des nombres du mathématicien, même quand ils ont le même aspect. Ceci conduit à explorer les différences et, en passant, à se préoccuper de principes d'écriture des nombres. Par ailleurs, doit-on attendre des répercussions, au niveau de l'enseignement, du calcul parallèle utilisé pour la recherche en analyse numérique ?



A ces domaines traditionnels objets d'une attention nouvelle s'ajoutent les études résultant directement des particularités des traitements sur machine : ceux-ci sont discrets. Il importe donc de se soucier des débouchés théoriques d'un matériel discret (équations aux différences) ; d'ores et déjà, des cours complets de mathématiques discrètes sont proposés à des étudiants. S'agit-il effectivement d'un nouveau thème d'enseignement ?

### 3.4. Contrôles.

Pour le professeur, le contrôle de l'apprentissage des étudiants est souvent entendu au sens restrictif d'évaluation, alors que le contrôle de l'enseignement est généralement méconnu. La pratique du soutien individuel est un contrôle de ce type rendu possible par le recours à l'ordinateur, tant pour les propositions d'exercices que pour la gestion des fichiers individuels. En évaluation, le choix de sujets d'examens ou concours par ordinateur et la passation sur ordinateur n'ont guère été expérimentés jusqu'à maintenant ailleurs que dans les secteurs d'enseignement de l'informatique elle-même. Faut-il prévoir la généralisation d'examens "sur ordinateur" et, si oui, comment élaborer les épreuves ?

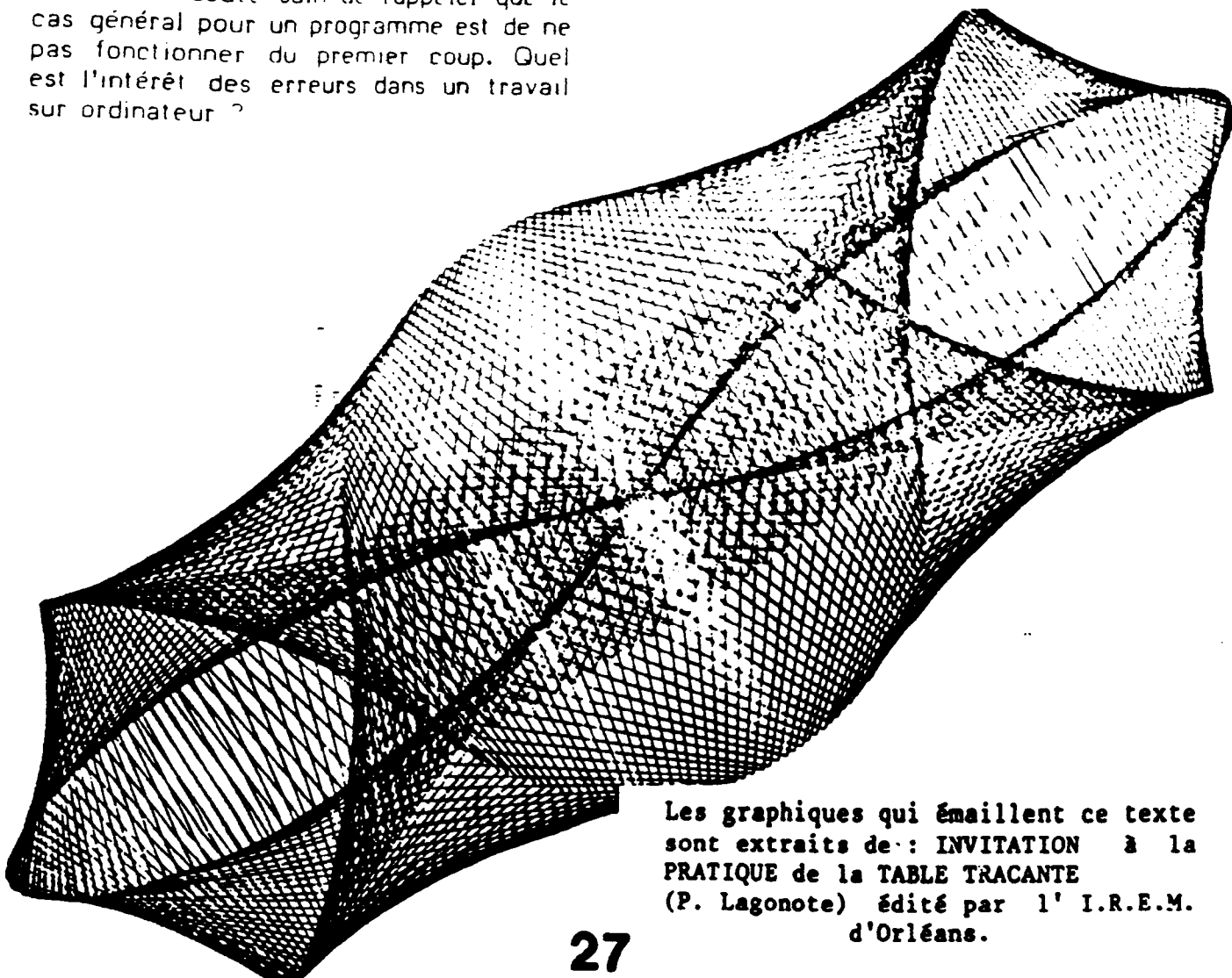
Mais le terme de contrôle désigne aussi le contrôle expérimental. La confrontation de sorties-machine avec des résultats mathématiques prend tout son intérêt avec la pratique d'un tel contrôle. Au terme de ce rapport, il était temps de mentionner l'utilité de ce qui n'est pas conforme aux prévisions, ce qui ne fonctionne pas parfaitement bien. Il est sans doute sain de rappeler que le cas général pour un programme est de ne pas fonctionner du premier coup. Quel est l'intérêt des erreurs dans un travail sur ordinateur ?

### 3.5. La formation des professeurs.

Nous avons évoqué plus haut le problème du contenu de la formation des enseignants. Il convient de se poser également celui de la forme de cette formation, en particulier pour la formation continue des actuels professeurs. Quel est l'effort de formation à prévoir en formation "légère" ? En formation "lourde" (au moins un an de décharge complète d'enseignement) ? Mais ceci ne peut suffire dans une perspective d'évolution des matériels et des logiciels.

Dans cette perspective l'ouverture de centres d'appuis prévus pour le suivi scientifique des opérations, la mise à jour des logiciels et l'expérimentation pédagogique semble nécessaire au niveau local. Il serait en effet regrettable que l'informatique ait pour conséquence que seules des structures lourdes, éloignées de beaucoup d'enseignants, soient en mesure de prendre les décisions d'enseignement. Quels réseaux (locaux, régionaux, nationaux, internationaux) convient-il d'implanter, et quelles connexions faut-il prévoir entre eux ?

Grenoble, le 5 mars 1984.



Les graphiques qui émaillent ce texte sont extraits de : INVITATION à la PRATIQUE de la TABLE TRACANTE (P. Lagonote) édité par l' I.R.E.M. d'Orléans.

# Trisection d'angles et Pliages

Jacques JUSTIN - Sceaux

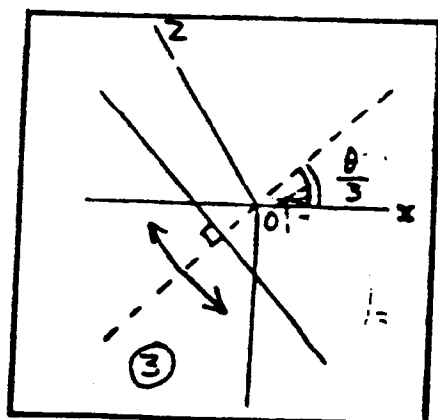
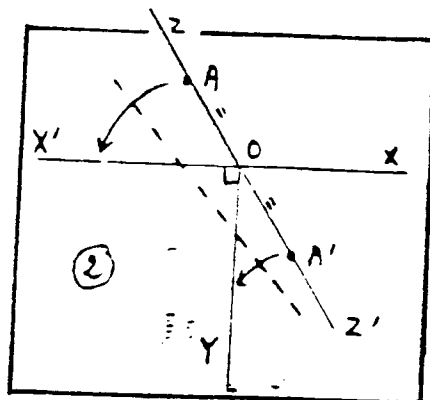
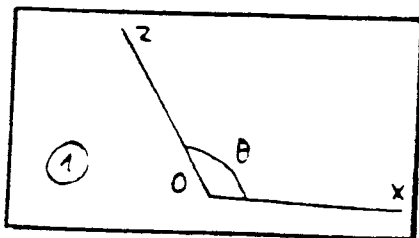
Trois grands problèmes ont intéressé les mathématiciens depuis les Grecs :

- La duplication du cube qui trouva sa solution grâce à la cissoïde de Dioclès
- La trisection d'un angle qui donna naissance aux trisectrices (voir PLOT-matériel 83 : traceurs de courbes)
- La quadrature du cercle que Dinostrate solutionna avec la ... trisectrice d'Hippias appelée quadratrice.

Ces problèmes ont la particularité supplémentaire de ne pas avoir de solution, n'utilisant que la règle et le compas.

Jacques JUSTIN nous montre ici que règle et compas sont inutiles : une simple feuille de papier suffit !

Rappelons que Jacques JUSTIN est l'un des animateurs du Mouvement Français des Pliés de Papiers qui édite une revue trimestrielle "Le Pli" (Cf. PLOT n° n° 27) et qui nous a apporté son soutien dans l'élaboration du PLOT-matériel 84 sur PLIAGES dont le second numéro paraîtra d'ici la fin de l'année.



1. Notons  $\theta$  l'angle  $x \hat{O} z$  à trisecter et choisissons-le compris entre un et deux droits pour simplifier.

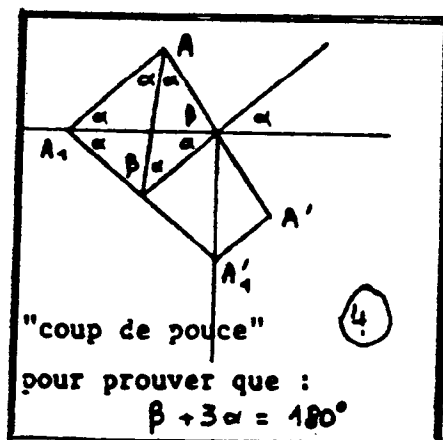
2. Pliez suivant  $ox$  et  $oz$  pour obtenir les plis  $x'x$  et  $z'z$ . Puis pliez suivant  $oy$  perpendiculaire à  $xx'$ .

Choisissez un point  $A$  arbitrairement sur  $oz$  et son symétrique  $A'$  par rapport à  $O$  sur  $oz'$ .

Amenez alors  $A$  sur  $ox'$  et, en même temps  $A'$  sur  $oy$ . Pliez et dépliez.

3. Pliez à nouveau pour obtenir la perpendiculaire au pli précédent passant par  $O$ . Vous obtenez une droite qui trisecte l'angle  $xoz$ .

4. Il vous reste à trouver la démonstration. Jacques JUSTIN vous met sur la voie en proposant le "coup de pouce" ci-contre (Extrait de "Résolution par le pliage de l'équation du 3ème degré et applications géométriques").



# Réflexions d'un TECHNOLOGUE

GÉOMETRIE

par J-C PATRAT . Poitiers

*S'il est un domaine où l'évolution technologique frappe un grand coup c'est bien le dessin technique et son utilisation dans la conception et la fabrication assistée par ordinateur qui ont complètement bouleversé le monde industriel et celui de l'automobile en particulier. Avec cet article d'un technologue de l'IREM de POITIERS, J.C. Patrat, nous vous proposons ici (et dans le numéro suivant) de réfléchir sur l'impact que pourrait avoir cette (r)évolution sur les programmes scolaires de mathématiques et sur la place que pourrait prendre le dessin technique dans la géométrie non comme banc d'essai d'"outils" mathématiques, mais comme raison d'être des éléments théoriques de la géométrie et de façon plus pragmatique comme mode de communication, comme moyen de prévision et d'anticipation.*

## I. INTRODUCTION.

Ne pas savoir tenir sa langue est sans doute un gros défaut. Ne pas avoir tenu la mienne lors d'un repas à la cantine à côté de mathématiciens de l'IREM et de l'APM m'a valu de leur faire un exposé de mes "visions" sur la géométrie et me vaut aujourd'hui d'écrire ces quelques lignes pour la revue PLOT.

Réfléchir à la géométrie, avec un recul suffisant, n'est pas simple surtout quand on a le sentiment culpabilisant de parler de plus en plus un "patois mathématiques".

Revenons à la géométrie. La géométrie ? Mais qu'est-ce que c'est ?

"La géométrie est l'art de faire des raisonnements exacts sur des figures fausses".

Curieux souvenir de mes années de lycée ; souvenir anachronique en ces temps de mathématiques modernes où les enseignants, imitant LAGRANGE, veulent tout faire avec du "baratin" ; souvenir qui renaît avec l'apparition des nouveaux programmes de mathématiques qui angoissent sans doute certains collègues mais qui redonnent espoir au technicien que je suis.

Pour le technicien, la géométrie ce serait plutôt : "l'art d'éviter de longs calculs en faisant des figures exactes".

La perfection n'étant pas de ce monde, la précision atteinte à l'aide de figures bien faites (de l'ordre de 1 %) est le plus souvent suffisante pour les applications industrielles.

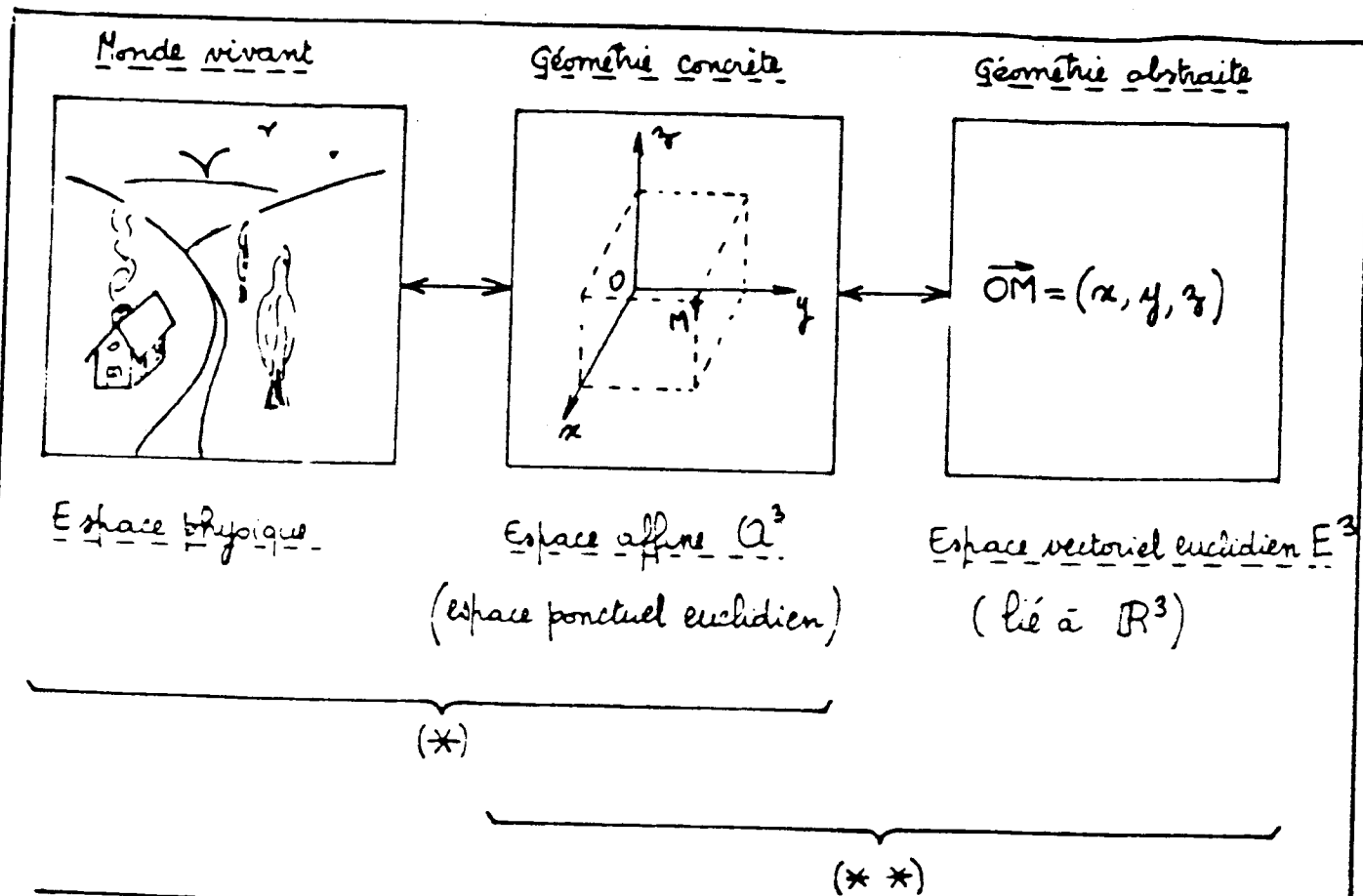
Se limiter à ces deux aspects contradictoires de la géométrie serait bien pauvre, aussi je définirai la géométrie comme étant le modèle d'étude de l'espace physique dans lequel nous vivons.



Joseph Louis Lagrange

## II. GEOMETRIE : MODELISATION DE L'ESPACE PHYSIQUE.

Le schéma ci-dessous illustre les modèles géométriques de l'espace physique utilisés dans la plupart des Sciences et principalement dans les Sciences et Techniques.



(\*) Domaines d'action privilégiés des constructeurs et fabricants. La technologie, le "Savoir-Faire", permettent d'imaginer et de créer des objets de l'espace physique.

(\*\*) Domaines d'action privilégiés du théoricien, du mathématicien, de l'ingénieur. La science, le "Savoir", permettent la prévision du comportement des objets physiques au moyen d'une "Modélisation" de ces objets et des phénomènes qui agissent sur eux.

## III. LES OUTILS DE LA GEOMETRIE.

Les mathématiciens et les techniciens sont des ouvriers du "savoir" et du "savoir-faire".

Comme tout bon ouvrier, ils doivent :

- posséder une boîte à outils bien garnie d'outils en bon état,
- savoir parfaitement se servir de tous les outils,
- savoir choisir l'outil le mieux adapté à la tâche à accomplir,
- savoir fabriquer de nouveaux outils.

Les outils de la géométrie se regroupent en deux familles distinctes :

- la famille des outils techniques,
- la famille des outils mathématiques.

### III.1. Connaissance et usage des outils techniques.

Parce que la géométrie réclame des tracés, des outils techniques sont nécessaires. Ils comprennent :

- des supports : feuille de papier qui reçoit le tracé  
planche à dessin qui fixe le papier.
- des crayons, plumes et encres qui exécutent le tracé
- des "guides de crayon" : La main, des règles, compas, pistolets.....

La qualité des tracés, plusieurs fois évoquée dans les programmes repose sur un bon usage des outils techniques.

Le bon usage des outils techniques requiert :

- des choix : papier (nature, poids), crayon (dureté), ....
- Un apprentissage :
  - . de la posture (relations entre le corps, la table et la chaîne)
  - . du geste (relations entre le corps, le crayon, la feuille et le tracé)
  - . de la prise en main du crayon (voir figure 2).

Cet apprentissage, basé sur des concepts ergonomiques, continue à tous les âges. L'enseignant, quel qu'il soit, doit veiller au maintien des "bonnes habitudes". Cette activité ne devrait jamais quitter l'esprit de l'éducateur.

- Un entretien : réglages, affûtages,...

Le compas est sans doute l'outil le plus mal utilisé et le plus mal entretenu. Il y aurait beaucoup à dire sur le compas, observons simplement la figure 3.

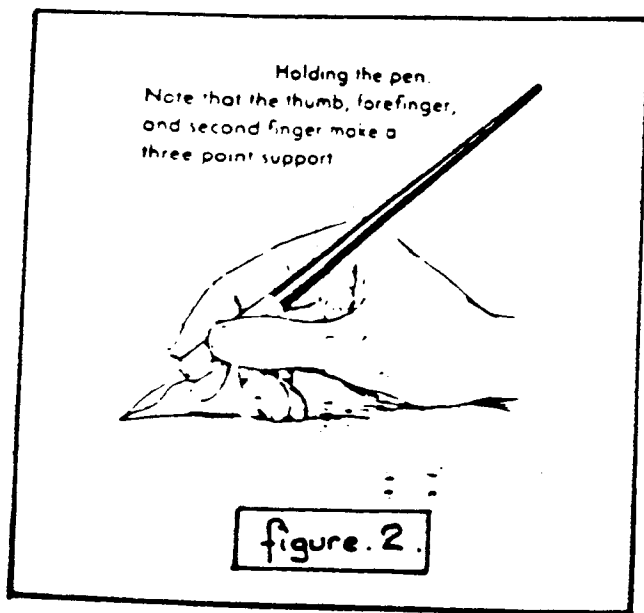


figure. 2.

### III.2. Connaissance et usage des outils mathématiques.

Les outils mathématiques : axiomes, postulats, principes, théorèmes, ..., sont l'affaire du théoricien, du mathématicien. Il n'est pas question pour moi d'empiéter sur ce domaine. Je vais par contre présenter certains "outils mathématiques" en indiquant l'usage principal qui en est fait dans le technique.

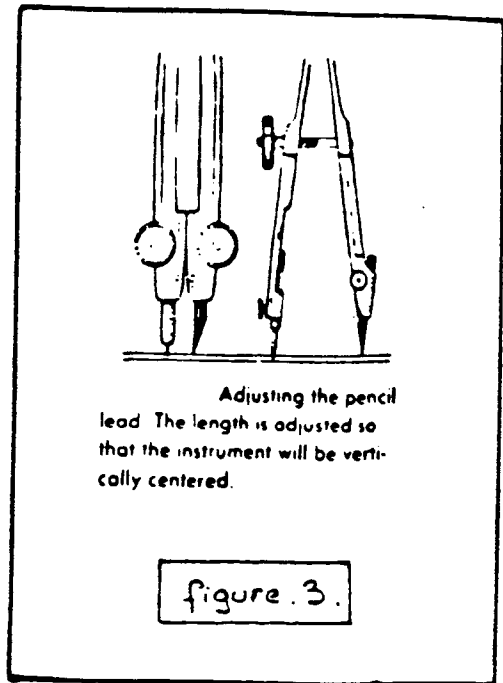


figure. 3.

#### III.2.1. Usage des vecteurs.

Fabuleux outil que le vecteur ! Il sert de modèle d'étude à de très nombreux phénomènes physiques : position, forces, vitesses....

Puissant outil que le vecteur ! Il "transporte sans peine" trois scalaires ! Je donne souvent comme image du vecteur celle d'une valise à trois compartiments spécialisés et comme image du torseur, celle d'une brouette de porteur à deux emplacements spécialisés. "Rouler" la brouette est moins pénible que de "transporter" six scalaires en l'absence de tout emballage ! Mais attention il y a un code de route à respecter !

Une définition correcte du vecteur dans  $E^3$  est toujours indispensable. Produits scalaires, produits vectoriels et changements de bases posent souvent des problèmes tant au niveau du calcul que de l'interprétation.

Produit scalaire :

Les applications sont nombreuses : calcul de distance, d'angle, de puissance, ...

Le calcul dans  $R^3$  ne pose généralement pas de problème.

L'interprétation dans  $\mathcal{Q}^3$ , indispensable au technicien, est souvent mal perçue :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V})$$

Produit vectoriel :

C'est le modèle d'étude du moment d'une force. Il est bon de rappeler la notion commune du moment d'une force : bras de levier que multiplie l'intensité de la force.

Le calcul dans  $E'$  pose des problèmes surtout lorsque plusieurs bases sont utilisées (ce qui est souvent le cas).

L'interprétation dans  $Q'$  est toujours mal perçue :

- direction : perpendiculaire à  $\vec{U}$  et à  $\vec{V}$ ,
- sens : règle du bonhomme d'Ampère
- intensité :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |\sin(\vec{U}, \vec{V})|$$

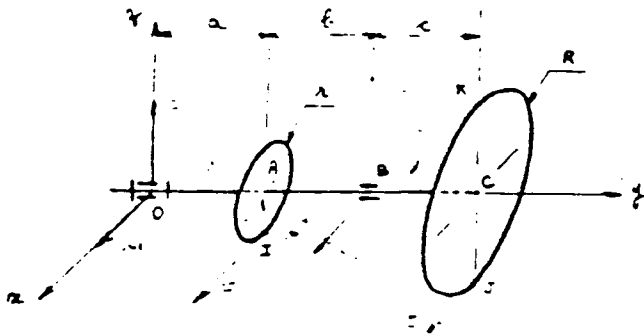
Changement de base

Une des plus grandes difficultés de la mécanique générale réside dans la

différence de "traitement" entre les vecteurs caractérisant des grandeurs intrinsèques (indépendantes de l'observateur, exemple : forces) et les vecteurs caractérisant des grandeurs liées à l'observateur (position, vitesse, accélération).

La pratique du calcul vectoriel est indispensable au technicien, mais il est des cas où une bonne maîtrise de l'interprétation dans  $Q'$  évite les définitions fastidieuses et les calculs interminables. L'exemple de l'étude de l'équilibre de l'arbre d'entrée d'un réducteur traité dans l'encadré en est un témoignage.

Etude de l'équilibre de l'arbre d'entrée d'un réducteur



A partir de la représentation des différentes forces sur le même perspectif côté de l'arbre, il est possible d'écrire directement les équations d'équilibre

|                           |                                   |
|---------------------------|-----------------------------------|
| $X_1 + F + X_2 + T/c = 0$ | $aS + aA + (a/c)Z_2 = 0$          |
| $Y_1 + A = 0$             | $-2F + R(T/c) = 0$                |
| $Z_1 + S + Z_2 = 0$       | $-aF - (a/c)Z_2 - (a/c)(T/c) = 0$ |

Le calcul vectoriel des moments nécessite une définition issue de la géométrie

|                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| $\vec{OA} = a\vec{j} - c\vec{k}$ | $\vec{OC} = (a/c)\vec{j} + R\vec{k}$ |
| $\vec{OB} = (a/c)\vec{j}$        | $\vec{OR} = (a/c)\vec{j} + R\vec{k}$ |

des efforts sur :  $\vec{j}$

|                         |   |                            |   |
|-------------------------|---|----------------------------|---|
| Action de la couronne : | $\begin{cases} T\vec{j} \\ \vec{0} \end{cases}_j$ | Action de la roue dentée : | $\begin{cases} F\vec{j} + A\vec{j} + S\vec{j} \\ \vec{0} \end{cases}_j$ |
|-------------------------|---|----------------------------|---|

Les trois premiers traveaux sont définis à partir des connaissances technologiques. Les efforts inconnus au niveau des paliers à roulements

sont définis de manière expérimentale :

|            |   |            |  |
|------------|---|------------|--|
| palier A : | $\begin{cases} X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k} \\ \vec{0} \end{cases}_A$ | palier B : | $\begin{cases} X_2\vec{i} + Z_2\vec{k} \\ \vec{0} \end{cases}_B$ |
|------------|---|------------|--|

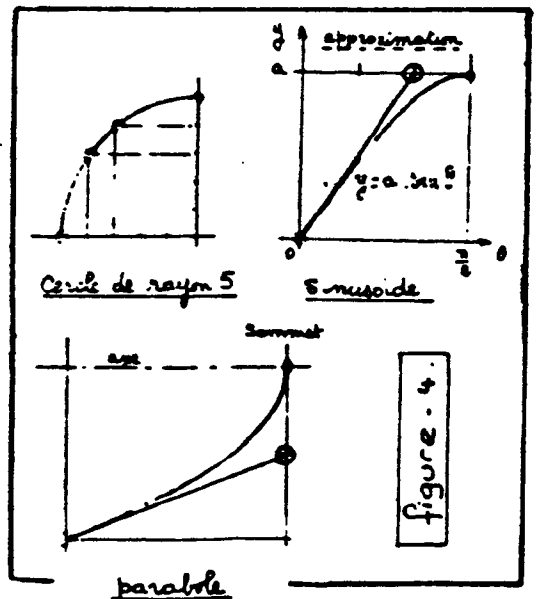
Même si dans certains cas il est possible de se passer de schémas, l'élaboration de ces définitions et les calculs vectoriels qui en découlent sont toujours beaucoup plus longs que le travail effectué dans  $Q'$  à partir du schéma.

III.2.2. Usage des courbes.

De nombreuses applications techniques font appel à une bonne connaissance des courbes classiques : cercle, sinus, coniques. (Voir encadré : étude d'une poutre)

D'autres courbes plus spécifiques se rencontrent également couramment : hélice (filetage) développante de cercle (engrenage), cycloïdes et dérivées (train d'engrenage, moteur Wenkel..)

La prise de notes de cours et la rédaction de rapports sont largement facilitées si l'on respecte quelques "trucs" dans les constructions (voir figure 4).



### III.2.3. Usage de la géométrie

#### Planimétrie

Les figures planes et volumes élémentaires doivent être connus avec le calcul des aires et des volumes.

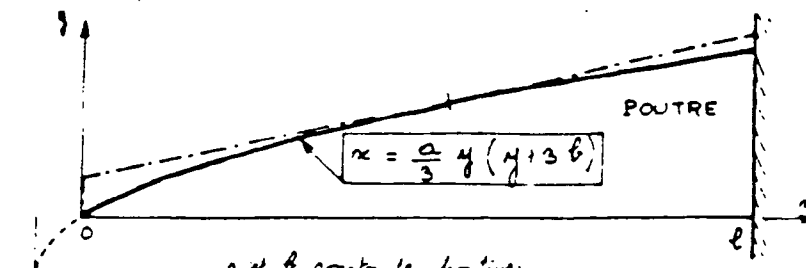
La trigonométrie et les relations dans les triangles sont largement utilisées.

Les méthodes de transformation (translation, symétrie, rotation, homothétie, affinité, inversion, ...) sont utilisées surtout pour leurs implications dans  $\mathcal{Q}$ .

La recherche des liens géométriques est très largement utilisée (voir encadré : étude d'une pelleuse).

Etude d'une poutre

La notion d'égalité des résistances conduit à une évolution parabolique de la hauteur de la poutre



$x = \frac{a}{3} y (y + 3b)$

$a$  et  $b$  constantes positives

La réalisation d'une forme parabolique à l'aide des techniques de la mécanique soudure n'est pas simple. Au lieu de faire une forme trapézoïdale, la parabole étant remplacée par l'une de ses tangentes (trait mixte).

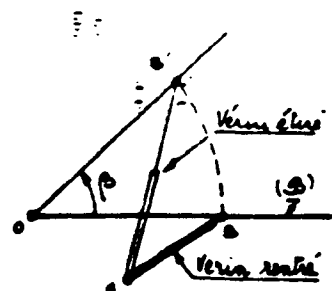
Problème La construction la plus rentable est-elle qui utilise le moins de matière (surface minimale du trapèze). Quelle tangente choisir?

Etude d'une pelleuse

Le lien de la zuelle est lié au bâti de la pelleuse

Le bras B articulé sur le bâti en O doit balayer le secteur angulaire  $\beta$  lorsque l'on actionne le vérin hydraulique.

L'une des extrémités du vérin est liée en A au bâti, l'autre est liée en B au bras



Problème Trouver le lien du point A lorsque l'on déplace le point B sur le bras.

Peut-on choisir n'importe quel point B?

### III.2.4 Usage de la géométrie dans l'espace.

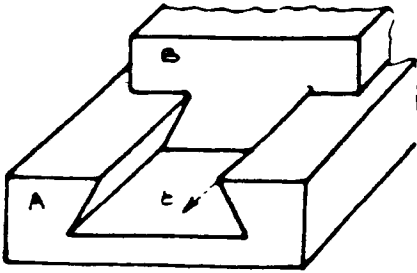
La géométrie dans l'espace est essentielle pour le dessinateur qui doit connaître les notions de perpendiculaire commune, les règles de projection de l'équerre, ....

La connaissance des surfaces est également indispensable :

- le plan, le dièdre (intersection, angle de deux plans) avec des applications directes dans l'étude des angles de coupe des outils d'usinage ;

## Degrés de Liberté

séparation A/B  
surface cylindrique quelconque

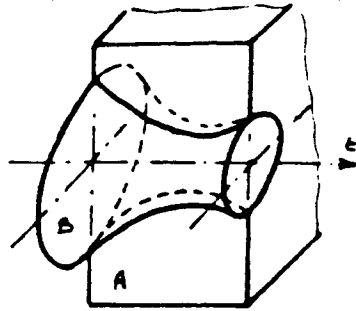


toute translation d'axe  $t$

conserve la surface

⇒ un degré de liberté en translation

rotation A/B  
surface de révolution quelconque



toute rotation d'axe  $t$

conserve la surface

⇒ un degré de liberté en rotation

- surfaces cylindriques, coniques (dégénérées ou non), de révolution... avec une application importante dans l'étude des degrés de liberté d'une liaison directe entre deux pièces (voir encadré : degrés de liberté),
- les intersections et développements de surfaces utiles en chaudronnerie :
- les propriétés de tangence des surfaces utiles pour l'étude de nombreux mécanismes (roulements, engrenages...).



## IV. APPLICATIONS PARTICULIÈRES DE LA GEOMETRIE DANS LE DOMAINE TECHNIQUE

### IV.1. Le dessin industriel.

#### IV.1.1. Les bases théoriques.

Le dessin industriel propose sur une feuille de papier (dimension 2) une série d'"images" appelées "vues" du volume d'une pièce (dimension 3). Pour chaque vue, le dessinateur réalise une application de  $\mathcal{Q}^3$  dans  $\mathcal{Q}^2$  appelée projection.

$\mathcal{Q}^3$  pièce  $\xrightarrow{\text{projection}}$   $\mathcal{Q}^2$  dessin: une vue

Les difficultés rencontrées par le dessinateur proviennent du fait que l'application projection n'est pas une bijection. L'histoire de la cartographie du globe témoigne de ces réelles difficultés il est plus facile de fabriquer la "sphère du football" que de cartographier la terre !

### IV.1.2. Les différents types de projection.

L'application projection est définie uniquement à l'aide de propriétés géométriques. Trois types de projection sont utilisées :

#### IV. 1.2.1. Projection oblique :

$$A \in \mathcal{Q}^3 \xrightarrow{P, \Delta} a \in P = \mathcal{Q}^2$$

tel que :  $Aa // \Delta$

(voir la figure 5)

#### IV. 1.2.2. Projection orthogonale : (figure 6).

Analogue à la projection oblique mais avec la direction de projection  $\Delta$  perpendiculaire au plan de projection P.

T.S.V.P...

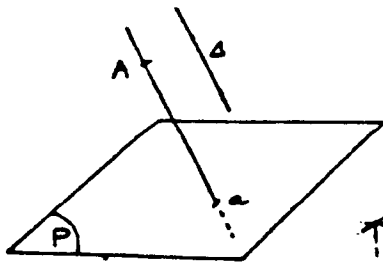


Figure 5.

$$A \in \mathcal{Q}^3 \xrightarrow{P, \Delta} a \in P = \mathcal{Q}^2$$

tel que  $Aa // \Delta$

P : plan de projection

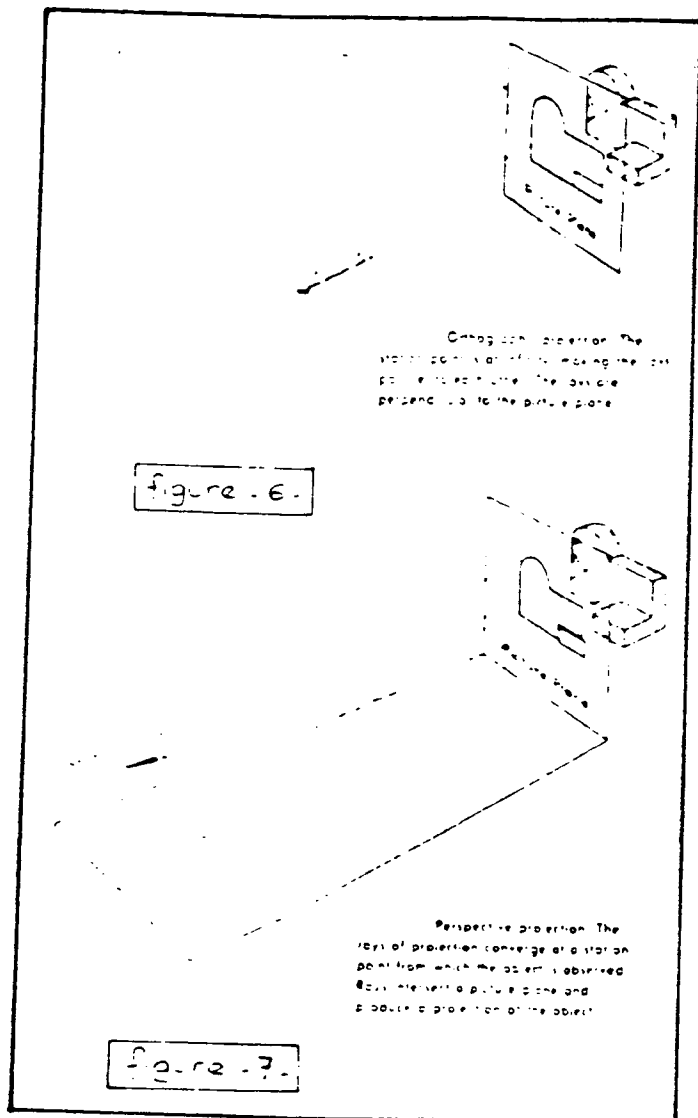
$\Delta$  : direction de la projection

a : projection de A sur P parallèlement à  $\Delta$

$Aa$  : droite projetante (rayon projectif)

IV. 1.2.3. Projection conique :  
figure 7.

Dans ce type de projection, les droites projetantes ne sont plus parallèles à une direction fixe  $\Delta$  mais convergent toutes vers un même point, sommet du "cône de projection".



Il est facile de matérialiser ces projections avec l'ombre portée d'une figure réalisée en fil de fer et placée dans le faisceau d'un rétroprojecteur ou dans la lumière du soleil.

IV. 1.3. Les différentes formes du dessin industriel.

IV. 1.3.1. Les vues du dessin industriel.

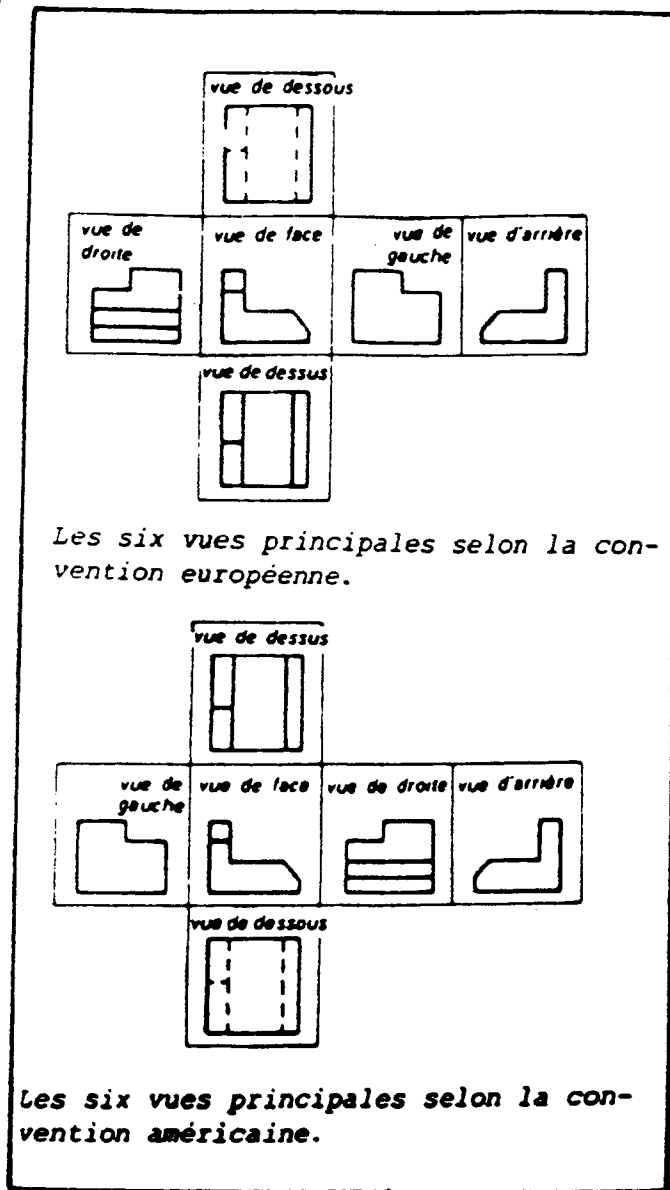
La pièce à dessiner, appelée encore "objet technique", est un ensemble organisé d'éléments géométriques ce qui permet de la placer dans une position privilégiée à l'intérieur d'un cube dont chaque face devient plan de projection. Les vues "s'inscrivent" sur chacune des faces

par projection orthogonale, puis le cube est "développé" pour ramener les six vues dans un même plan.

Deux méthodes existent :

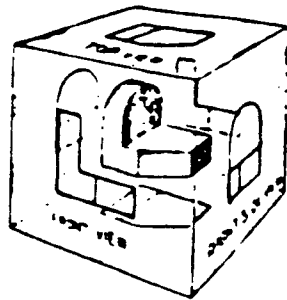
- La méthode européenne, la seule normalisée en France. Vous la trouverez présentée dans tous les manuels de "Documents du dessinateur".
- La méthode américaine, présentée dans l'encadré. Ces deux méthodes ne diffèrent que par la disposition relative des vues.

(voir encadré page suivante)

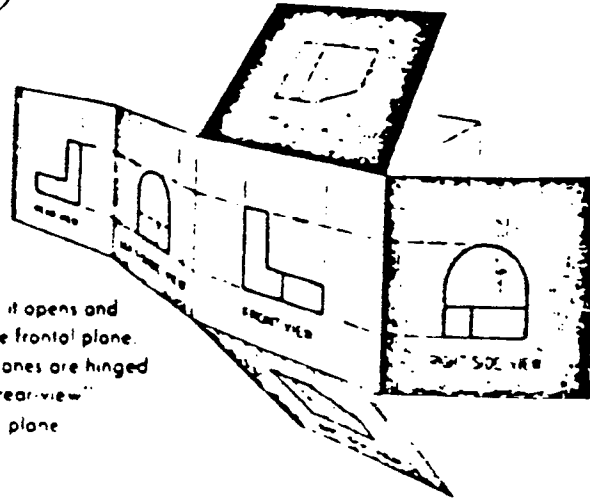


Dans chaque vue, beaucoup d'éléments sont vus en vraie grandeur, ce qui permet des dessins à l'échelle et une cotation aisée. Par contre, la notion de profondeur a complètement disparu et la lecture (compréhension des formes spatiales à partir des vues) est parfois difficile. Le plus souvent trois vues sont nécessaires et suffisent à définir complètement la pièce.

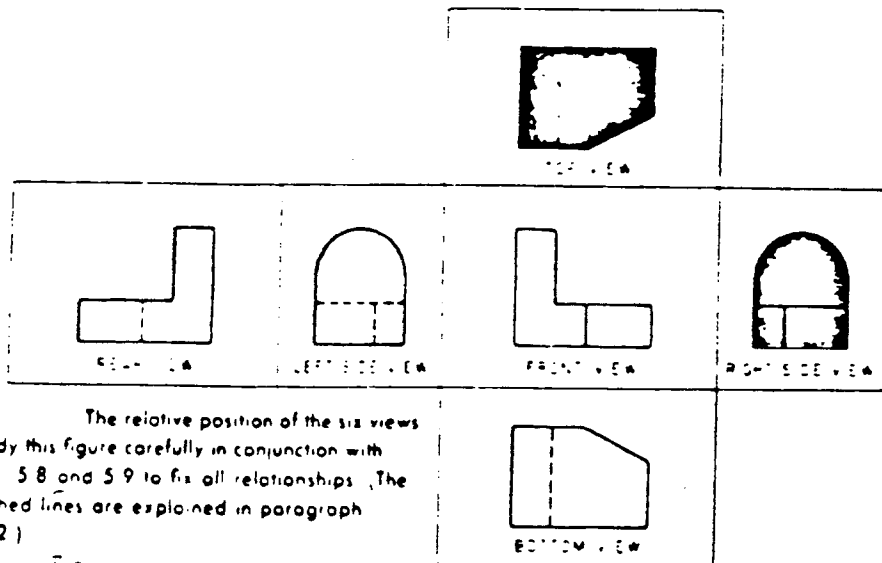
## La méthode américaine



"The transparent box" This encloses the object with another frontal plane behind, another horizontal plane below, and another profile plane to the left of the object.



The transparent box as it opens and all planes rotate to the plane of the frontal plane. Note that horizontal and profile planes are hinged to the frontal plane and that the "rear-view" plane is hinged to the left profile plane.



The relative position of the six views. Study this figure carefully in conjunction with Figs 5 8 and 5 9 to fix all relationships. (The dashed lines are explained in paragraph 5 12)

### IV. 1.3.2. Les perspectives.

Il en existe trois familles principales :

#### - perspective cavalière :

La pièce est placée dans une position privilégiée par rapport au plan de projection et projetée obliquement sur celui-ci :

Les perspectives cavalières sont faciles à construire mais présentent des distorsions importantes par rapport à la perception visuelle.

#### - perspectives axonométriques :

La pièce est placée dans une position quelconque par rapport au plan de projection et projetée orthogonalement sur celui-ci.

Les perspectives axonométriques correspondent à la vision de loin.

La perspective isométrique, la plus facile à construire, est très souvent utilisée.

#### - perspective naturelle ou conique :

La pièce est placée dans une position quelconque par rapport au plan de projection. La vue est obtenue par projection conique.

La perspective conique correspond à la vision monoculaire. Très utilisée dans les revues techniques, la publicité, etc, elle est la plus difficile à construire.

Un cube en fil de fer, un rétro-projecteur, le soleil et une plaque de bois permettent une visualisation directe de toutes ces perspectives.

Largement utilisée par tous les enseignants et à tous les niveaux, la perspective reste mal connue et incomprise par les élèves. Pourtant quel fantastique jeu de construction mathématique elle constitue ! Ne bâclez pas vos perspectives au tableau, étayez vos constructions du raisonnement géométrique qui les justifie, vous serez surpris vous-même des perspectives que vous pourrez faire, et vos élèves seront mieux préparés aux études techniques. Ne laissez pas ce travail aux seuls enseignants de construction ou de dessin d'art.

Suite de ce bel article de J-C Patrat dans le prochain numéro de PLOT sous le titre : " LA GEOMETRIE A TRAVERS LE DESSIN "

#### IV. 1.3.3. La géométrie descriptive.

La géométrie descriptive est un dessin industriel en deux vues appelé épure. Elle pourrait n'en constituer qu'un cas particulier si les objectifs visés étaient les mêmes, ce qui n'est pas le cas.

La géométrie descriptive est surtout utilisée pour résoudre des études ponctuelles comme la détermination en vraie grandeur d'arêtes situées dans une position quelconque par rapport aux plans de projection, la mesure d'angles, le développement de surfaces avec intersections....

Curieusement, c'est à vous, mathématiciens, qu'il revient d'enseigner la géométrie descriptive. Je serais fort surpris si une collaboration fructueuse ne pouvait s'établir entre vous et les collègues constructeurs de votre établissement pour mener à bien cette tâche.

... à suivre ...

## Presse écrite et mathématiques

120 pages  
format 21 x 29,7

Une brochure A.P.M.E.P. où vous trouverez de nombreux documents et fiches méthodologiques permettant des ouvertures interdisciplinaires et une meilleure connaissance du fonctionnement et du langage des journaux d'informations.

Extrait du sommaire :

LA PRESSE, UN PRODUIT ECONOMIQUE

LE LANGAGE DE L'INFORMATION

- l'emploi et le rôle du nombre
- le langage des fonctions
- les rubriques scientifiques et les mathématiques

QUELQUES LIAISONS ENTRE PRESSE ET ENSEIGNEMENT

"La presse écrite n'est pas un produit préfabriqué pour l'école. Mais pour comprendre ses contraintes de production comme sa fonction de vecteur d'informations, le mathématicien peut ajouter son propre regard, avec sa spécificité".



Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

#### MOTS CROISES : SOLUTION

|      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| I    | C | O | O | R | D | O | N | B | E | R  | S  |
| II   | I | B | B | E | L |   |   | E | L | L  | S  |
| III  | R | D | I | T | E |   |   | O | B | L  | A  |
| IV   | L | O | C |   | S | A |   | F | I | B  | S  |
| V    |   | H | I |   | B | D |   | P |   |    |    |
| VI   | A | B | B | E |   | O | S | S | S | S  |    |
| VII  | R | E | L |   | B | N |   | E | B | A  |    |
| VIII | T | E |   | A | B | S | C | I | S | B  | S  |

# nombre d'OR

Suite de la "Chronique"  
de Jean SAUVY.

A.R.P. - MEUDON.

Le nombre d'or, comment y arriver par approximations successives?

Je rappelle le problème: Il s'agit de trouver un "nombre multiplicateur"  $K$  qui réponde aux conditions suivantes :

Je l'applique à une longueur  $a_0$  que je prends comme unité ( $a_0=1$ ), ce qui me donne une longueur  $a_1$

$$a_1 = a_0 \times K = 1 \times K = K$$

et je répète l'opération

$$a_2 = a_1 \times K = K \times K = K^2$$

Je voudrais que  $K$  soit tel que la somme des deux premières longueurs soit égale à la troisième

$$a_2 = a_0 + a_1$$

$$K^2 = 1 + K$$

C'est une équation du second degré. Mais je suppose que je ne sais pas trouver les racines parce que je suis à l'école élémentaire ou parce que j'ai oublié la formule apprise par cœur autrefois. Alors j'opère par approximations successives, en m'aidant ou non d'une calculatrice.

A "Vue de nez" je me dis que  $K = 1,5$  ferait peut-être l'affaire. J'essaye

$$K^2 = 1,5 \times 1,5 = 2,25$$

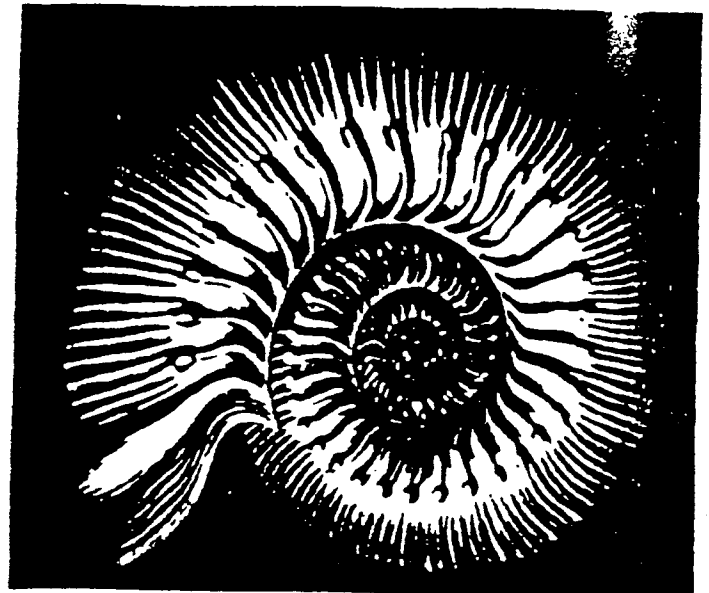
$$1+K = 1+1,5 = 2,50$$

Le  $K$  choisi est un peu faible. J'essaye avec "2", pour voir

$$K^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$1+K = 1+2 = 3$$

J'ai été trop généreux, je rétrograde vers  $K = 1,8$



$$K^2 = 1,8 \times 1,8 = 3,24$$

$$1+K = 1+1,8 = 2,8$$

Je suis encore trop haut, je descends à 1,6

$$K^2 = 1,6 \times 1,6 = 2,56$$

$$1+K = 1+1,6 = 2,60$$

Je sens que je touche au but ! J'ajoute un petit quelque chose au précédent  $K$  et j'essaye 1,65

$$K^2 = 1,65 \times 1,65 = 2,7225$$

$$1+K = 1+1,65 = 2,65$$

J'ai à nouveau dépassé l'objectif !, je rétrograde et prends  $K = 1,615$

$$K^2 = 1,615 \times 1,615 = 2,608 225$$

$$1+K = 1+1,615 = 2,615$$

Nouvel essai  $K = 1,618$

$$K^2 = 1,618 \times 1,618 = 2,617 924$$

$$1+K = 1+1,618 = 2,618$$

A la troisième décimale près, je peux m'arrêter là et écrire

$$\phi = 1,618 \dots ,$$

Les points après le 8 indiquant des décimales que je néglige.

# Tous à vos RETROS

## L'ECRAN DE RETROPROJECTION.

Michel MIRAULT - ORLEANS

Dans le n° 27 de PLOT nous avons envisagé quelques uns des aspects techniques liés à la rétroprojection : quel appareil choisir ? comment le choisir ? où le mettre ?

Nous vous proposons ici de poursuivre l'examen des données techniques liées à l'utilisation du rétroprojecteur en classe.

Rappelons que l'objectif reste que les collègues puissent se faire une opinion sur les avantages et les inconvénients que peut présenter l'utilisation de cet appareil.

### OU PROJETER ?

Le rétroprojecteur permet de réaliser des projections en salle claire (inutile de tirer les rideaux, sauf si le soleil tape directement sur l'écran) sur à peu près tous les supports plans : mur, tableau vert, écran de projection. Il est préférable que ce support soit de couleur claire.

Il existe dans le commerce des écrans dits spéciaux à la rétroprojection. Ils ne sont pas toujours très bien adaptés : éliminer les écrans perlés, qui ne sont que la modification -légère au niveau de la potence- des écrans habituels et qui ne permettent une bonne visibilité que dans un angle réduit autour de la normale à l'écran.

Le plus performant des écrans du point de vue du rapport qualité-prix est aussi le plus simple : Il s'agit d'une plaque de contre-plaqué de 1,50 m x 1,50 m peinte de plusieurs couches d'un blanc mat.

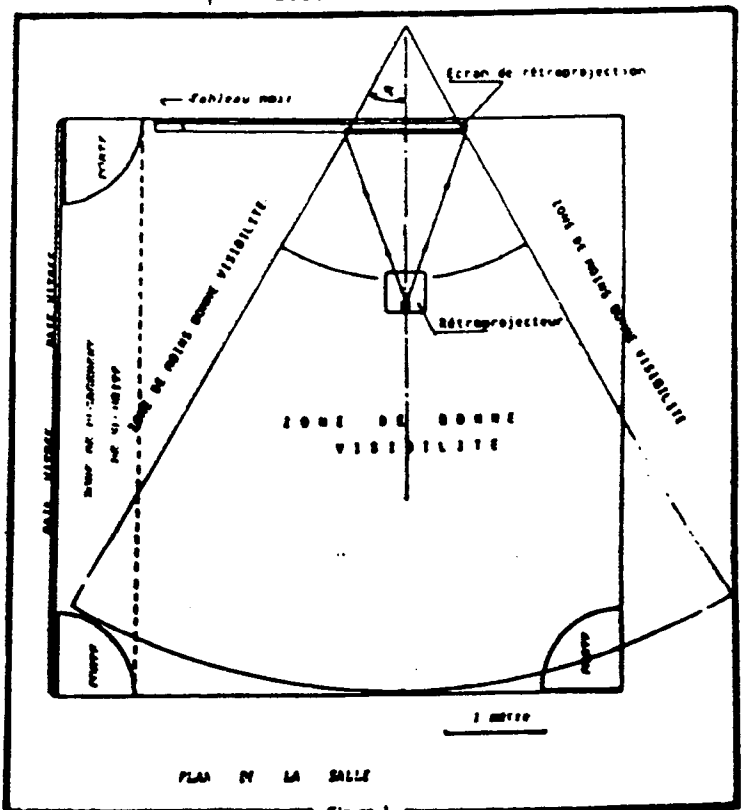
### OU METTRE L'ECRAN ?

Vous pouvez projeter sur le mur ou sur le tableau, et dans ce cas, la question ne se pose pas. Il faut que vous sachiez que l'image subit alors souvent des déformations et que vous vous privez d'un atout principal de la rétroprojection : la précision du tracé.

Utilisons donc un écran .... où allons-nous le placer ?

L'emplacement choisi doit permettre à tous les élèves de la classe d'avoir une vision correcte de la projection. D'autre part l'utilisation du rétroprojecteur ne dispense pas de celle du tableau noir (ou vert). Cet outil n'est qu'un complément qui permet de mieux capter l'attention de l'auditoire et d'avoir beaucoup plus de précision dans le tracé.

Il est utile, dans la plupart des cas, de faire un plan de la salle à l'échelle, et de réaliser sur un calque ou un transparent, à la même échelle, le rétroprojecteur, son tableau et la zone de visibilité optimale.



Preions l'exemple d'une salle de 7m x 7m avec les impératifs liés à sa construction : position des portes - zone d'évacuation de sécurité - position du tableau. L'examen des figures 1 et 2 nous montre rapidement quelle est la meilleure solution à adapter.

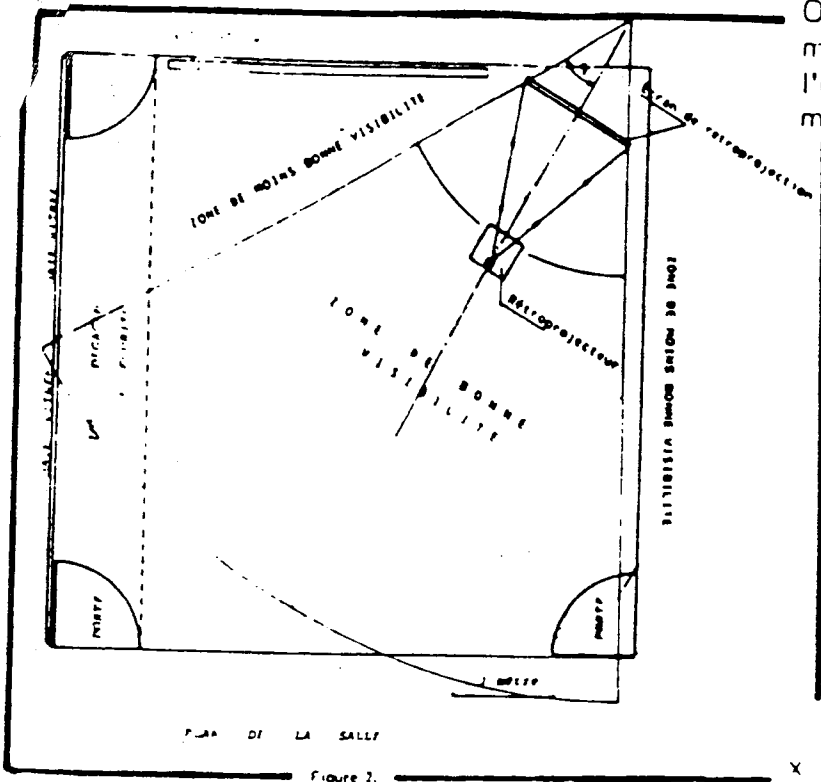


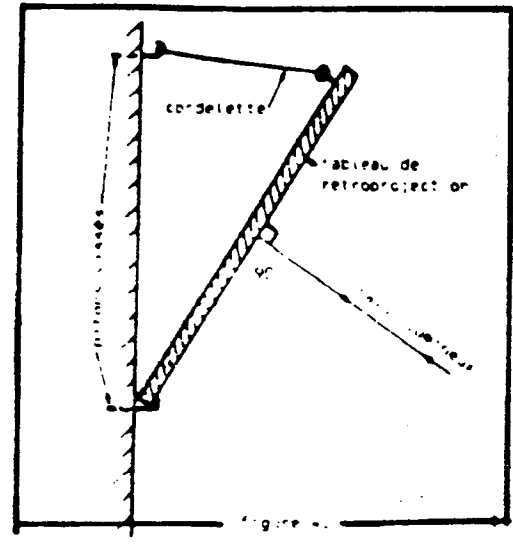
Figure 2.

La distance entre la tête de projection et l'écran dépend de la focale de l'objectif : elle est de 2 mètres environ pour une distance focale  $f = 355$  à 360.

L'angle de bonne visibilité est d'environ  $\alpha = 60^\circ$  autour de la normale à l'écran.

Afin de permettre aux élèves de la classe situés au dernier rang de ne pas être gênés par les têtes de ceux qui les précèdent, il convient de placer l'écran le plus haut possible. N'oubliez pas qu'en principe, le professeur intervient uniquement sur la plage de travail du rétroprojecteur et non pas sur l'écran, car sinon, en faisant obstacle au faisceau lumineux, il en cache une grande partie.

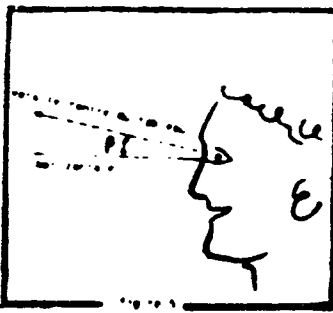
Enfin, pour toutes les activités de précision liées à l'utilisation du rétroprojecteur, il convient de ne pas déformer l'image projetée. Pour cela il suffit d'incliner l'écran de façon que son plan soit normal au rayon d'incidence provenant de la tête du rétroprojecteur. On peut obtenir cette situation de manière artisanale en fixant au dos de l'écran un système de cordelettes (solides) mobiles.



On projette alors un carré de 10 cm x 10 cm et on modifie la position relative de l'écran et du rétroprojecteur jusqu'à obtenir en projection sur l'écran un carré parfait.

(En mesurant les dimensions de l'image obtenue, et par un calcul simple, on peut alors calculer le pouvoir d'agrandissement de son rétroprojecteur).

**Attention.** Veillez à ce que les premiers rangs d'élèves ne soient pas trop rapprochés de l'écran, un angle de vision trop important



Veiller aussi à ce que la prise de courant alimentant le rétroprojecteur soit bien placée, afin de ne pas se prendre les pieds dans le fil.

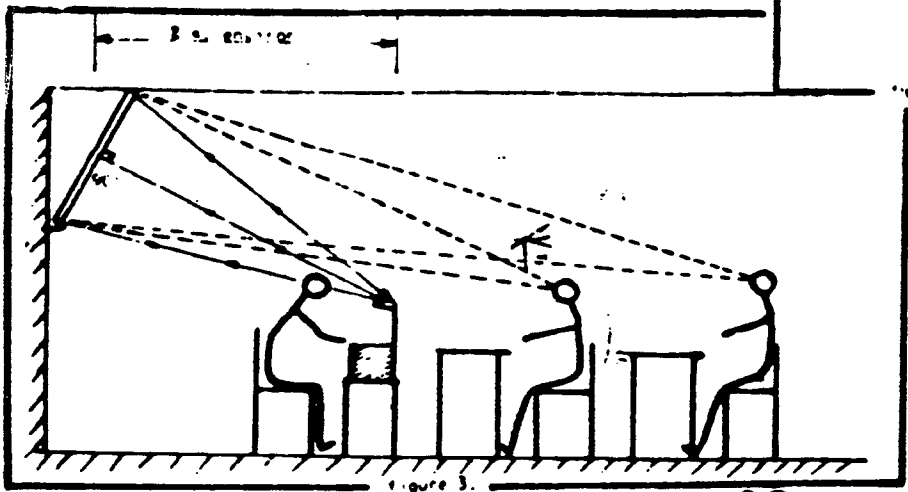


Figure 3.

( $\beta > 17^\circ$ ) peut, au bout de quelques minutes, entraîner une certaine fatigue des vertèbres cervicales.

A suivre dans un prochain numéro.  
(Où se placer ? - Le petit matériel).