

# plot

BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP  
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

*vous propose*

- \* *des informations sur l'enseignement des mathématiques sous forme de comptes rendus des rencontres organisées dans les régionales (conférences, journées d'études, expositions,..).*
- \* *un instrument de dialogue permettant la confrontation de pratiques enseignantes diverses et le partage des réflexions qu'elles suscitent.*
- \* *des renseignements sur les livres, les publications, et les actions intéressant l'enseignement des mathématiques dans les trois Académies.*

Dépôt légal : 2<sup>e</sup> trimestre 1976

Directeur de Publication : *Pascal Monsellier*

Equipe d'animation : *Jacques Borowczyk, Daniel Fredon, Pascal Monsellier*



1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

# plot

BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP  
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

## Sommaire du n°1 :

### Rencontres

Jean Sauvy - <i>A la recherche de formes nouvelles d'intervention pédagogique.</i>	2
François Royoux - <i>Réflexions sur les problèmes de compréhension des mathématiques.</i>	5
André Délédicq - <i>Les 42 morphismes du plan.</i>	11
Daniel Fredon - <i>De la géométrie de première à la programmation linéaire.</i>	24

### Pratique

Fournier - <i>Les ensembles à l'école primaire.</i>	32
Roger Crépin - <i>Comment concevoir l'enseignement de la géométrie...</i>	33
Raymond Barra - <i>Dialogue imaginaire avec un auteur imaginaire de livre de 4ème.</i>	36
Jacques Termeau - <i>L'enseignement agricole public.</i>	37
Jean Fromentin - <i>Dans un club mathématique.</i>	38

### Communications

Jean René Licois - <i>Comité de la Régionale Orléans-Tours du 14 mars 1976.</i>	40
---	----

### Agenda

Bloc Notes	41
------------	----

par Jean SAUVY (Equipe A.R.P.)

L'équipe A.R.P. (Activités Recherches Pédagogiques) ayant cessé de faire paraître sa propre publication, Jean SAUVY nous a confié cet article décrivant une exposition que beaucoup ont vue dans nos Régionales. Qu'il en soit remercié chaleureusement.

Dans le prolongement des expériences faites à Rome dans ses classes de 6ème, 5ème, 4ème par le professeur de mathématiques Emma Castelnuovo (1), l'équipe Activités Recherches Pédagogiques a procédé au cours des dernières années à diverses expériences "d'expositions-actives" dont on peut établir un premier bilan.

Je parlerai ici plus spécialement de l'exposition "L'Espace, les Formes et L'Enfant" qui, après avoir été présentée en novembre 1974 à Paris au Centre International de Séjour du 13ème arrondissement, s'est transportée au cours de l'année 1975 dans plusieurs villes françaises : Orléans, Tours, Grenoble, Lyon, Poitiers, Caen, La Seyne, etc...

Pour ceux qui n'ont pas visité cette exposition je vais la décrire brièvement.

C'est une exposition à plusieurs niveaux.

Deux de ces niveaux sont explicites, ils concernent l'un la géométrie, l'autre la psychologie génétique.

#### - Primauté à la topologie

Au point de vue "géométrie", l'exposition présente un panorama de la géométrie élémentaire en trois volets : topologie, géométrie projective, géométrie euclidienne, mais la primauté est donnée à la topologie.

Pourquoi ce choix ?

Parce que la topologie (ou "géométrie de la membrane de caoutchouc") n'ayant pas été enseignée dans le passé au niveau élémentaire et secondaire peu de maîtres du Primaire et peu de parents savent de quoi il s'agit. Mais aussi parce que la topologie offre aux jeunes enfants un terrain d'exploration très riche et à leur portée (2).

Une place assez importante est également réservée à la géométrie projective (ou "géométrie des ombres") qui commence à devenir accessible à l'enfant dès le moment, vers 6/7 ans, où il accède à la maîtrise de la ligne droite.

Par contre, pour la géométrie euclidienne, beaucoup plus classique, on s'est borné à quelques indications, en mettant surtout l'accent sur les transformations isométriques.

Au point de vue "psychologie génétique" l'exposition illustre les correspondances que, suivant les conceptions du psychologue de Genève, Jean PIAGET, on peut établir entre les relations spatiales que manipule, met en place et maîtrise progressivement l'enfant et les rudiments de géométrie que l'enseignement lui apporte de 4/5 à 14/15 ans (3).

- (1) Cette expérience est relatée de façon très vivante dans l'ouvrage d'Emma Castelnuovo, Documenti di un'esposizione di matematica Boringhieri Torino. La Revue A.R.P. (n° 8, janvier 1973) en a donné un bref aperçu.
- (2) Les lecteurs intéressés pourront se reporter sur ce point aux ouvrages de J. et S. SAUVY, publiés chez Casterman. "L'Enfant à la découverte de l'espace, initiation à la topologie intuitive" et "L'enfant et les géométries".
- (3) Voir en particulier les deux "ouvrages de base" que sont : "La représentation de l'espace chez l'enfant" (PUF) et "La géométrie spontanée de l'enfant" (PUF) de J. PIAGET et collaborateurs.

Deux citations, parmi beaucoup d'autres :

"La géométrie de l'enfant est expérimentale avant d'être déductive" J. PIAGET

"L'intuition de l'espace n'est pas une lecture des propriétés des objets mais une action exercée sur eux" J. PIAGET

Cette double présentation est réalisée à l'aide de "panneaux explicatifs imagés", de "dispositifs à manipuler", de "jeux" et de documents divers (articles de revue, recueil de citations, diapositives,...).

Pour la topologie, par exemple, des jeux de labyrinthes, des explorations de graphes planaires variés sont proposés aux visiteurs. La manipulation et l'observation de divers "solides de Platon" et autres polyèdres les incitent à rechercher pourquoi la formule d'Euler liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre s'applique aussi aux graphes planaires.

Dans la section géométrie projective, outre le "jeu des trois montagnes" inspiré d'un test de Piaget, les enfants trouvent à leur disposition une jante de bicyclette sur laquelle ils peuvent s'exercer à l'exploration des polygones et aux arithmétiques modulo  $n$ , de nombreuses planchettes à clous qui leur permettent de jouer avec les diverses figures que l'on peut construire sur une trame à mailles carrées ou losanges, etc...

Les dispositifs concernant la symétrie sont nombreux. L'un d'eux donne la possibilité de mettre en relation les symétries du carré avec les diverses présentations d'un carré magique de  $3 \times 3$  cases.

D'autres jeux débordent la géométrie proprement dite. L'un d'eux consiste à construire à l'aide de quelques parallélépipèdes en carton un édifice puis à le décrire à l'intention d'un second joueur qui doit en établir une réplique sans voir le modèle. On compare ensuite la réplique au modèle, ce qui ne va pas en général sans surprises...

Mais une exposition de ce type ne se décrit pas. Aussi n'en dirai-je pas davantage.

#### - Le visible et le moins visible

A ces deux niveaux explicites s'en ajoutent deux autres qui sont simplement suggérés et traités en petites touches.

L'un d'eux, toutefois, est suffisamment présent tout au long de l'exposition pour s'imposer à l'attention à un moment ou à un autre.

Il s'agit du niveau "méthodes pédagogiques".

Le fait que le visiteur soit invité à manipuler, à jouer, à participer (par ses dessins, ses observations, ses interventions auprès d'autres visiteurs...) marque bien le souci des concepteurs d'illustrer par l'action les voies et les moyens d'une pédagogie active. Plutôt qu'un discours sur la pédagogie on invite le visiteur à prendre en main l'exposition, à l'activer comme il l'entend, à la "construire" à sa manière.

Le quatrième niveau est sans doute le plus difficile à percevoir : il concerne le rôle fondamental que, selon nous, joue l'espace dans la formation humaine parce qu'il est fournisseur d'un cadre de référence omniprésent et de modèles de raisonnement très variés. Ce niveau concerne aussi le rôle, fondamental à nos yeux, de la main dans l'acquisition des savoirs dits "intellectuels" (et notamment "mathématiques").

Mais ce niveau n'est qu'esquissé. En partie parce qu'il mériterait à lui seul toute une exposition, mais aussi parce que nous avons délibérément donné à l'exposition un contenu lacunaire laissant la place à la réflexion autonome du visiteur, parce que les images fournies ont une trame lâche, à "faible définition", qui appelle l'intervention active des participants.

De façon générale, l'ensemble de l'entreprise marque un effort pour tenter de "déscolariser", "désécialiser" et "décloisonner" la mathématique, de mettre certains de ses aspects à portée des non-spécialistes, faire toucher du doigt le rôle que la géométrie peut jouer dans le développement de l'intelligence et de la sensibilité de l'enfant.

C'est pourquoi le mot même de mathématique n'apparaît pas dans le titre de l'exposition. C'est pourquoi aussi celle-ci est placée sous le signe métaphorique du labyrinthe. Un pas de plus et on aurait pu la mettre à l'enseigne de "l'auberge espagnole"...

*L'équipe "Activités Recherches Pédagogiques" est une association 1901 qui a publié de 1972 à 1975 vingt numéros d'une revue interdisciplinaire portant le même nom.*

*Les dix premiers numéros sont épuisés mais Les volumes III et IV sont encore disponibles aux prix respectifs de F 25 et F 30.*

*A.R.P., 27, avenue du Onze Novembre - 92190 MEUDON  
CCP PARIS 26 11 84*

*L'équipe A.R.P. est composée de Jean BILLAUT, Gisèle DRONNE,  
Alain FOULIARD, Simone et Jean SAUVY.*

**Publications  
A.P.M.E.P.  
Bibliothèque de travail  
du professeur de mathématique**

Si vous avez

MOTS I (brochure 74)	<i>Prix 6F (8F port compris)</i>
MOTS II (brochure 75)	<i>Prix 6F (8F port compris)</i>
ELEM-MATH I (brochure 75)	<i>Prix 3F (4,15F port compris)</i>
CARRES MAGIQUES	<i>Prix 4F (5,15F port compris)</i>

tant mieux !!!

Sinon, adressez-vous à VOTRE Régionale

*(Voir adresse et CCP de celle-ci en page 41)*

par F. ROYDUX (Poitiers - Vienne)

Le texte ci-dessous est la présentation d'idées qui avaient été émises et discutées au cours des deux conférences organisées à NIORT (Deux-Sèvres) par l'A.P.M.

Au cours de la transmission du savoir mathématique trois séries de phénomènes peuvent retenir l'attention. On peut se demander d'abord s'il y a des méthodes de présentation plus efficaces que d'autres. On peut s'interroger aussi sur les activités intellectuelles que l'on mobilise chez l'enseignant : la mémoire, l'intuition sensible, la déduction, l'invention, etc... Enfin, on peut réfléchir au savoir mathématique lui-même : est-il particulièrement inaccessible ou rebutant ?

#### I - COMMENT PRÉSENTER LE SAVOIR MATHÉMATIQUE ?

Qu'on utilise en effet un manuel, des fiches ou une présentation orale, il existe quelques phénomènes généraux concernant la présentation sur lesquels il est bon de s'interroger.

D'abord toute présentation oriente l'esprit de l'auditeur dans une certaine direction. Tout le monde connaît, bien sûr, les questions qui induisent une réponse déterminée. Par exemple : "Y en a-t'il qui n'ont pas compris ?" Question au demeurant parfaitement inutile faite uniquement pour conforter la conscience de l'enseignant. Mais on sait moins bien que lorsqu'on présente six allumettes à une personne en lui demandant de construire six triangles équilatéraux, elle commence par chercher une solution dans le plan conformément à la situation dans laquelle on lui a présenté les allumettes alors que la solution est la construction d'un polyèdre. Beaucoup de jeux s'appuient sur ce phénomène. Il est donc important de varier les présentations pour éviter les erreurs d'aiguillage ou les limitations qui bloquent l'esprit.

On sait aussi, depuis les études SHELDON sur la théorie de l'information que la capacité d'un individu à assimiler la nouveauté et à combiner entre elles les données ainsi acquises est très limitée. Les méthodes d'enseignement programmé ont bien souligné cette nécessité de découper l'information en unités simples. Encore ne faut-il pas oublier que, seule la répétition des exercices, permet un renforcement suffisant. Il ne faut pas oublier non plus le danger inverse d'un fractionnement excessif de l'information. Ce fractionnement doit être proportionnel au niveau intellectuel de l'auditeur et non systématique comme le veut l'enseignement programmé.

On souligne encore la différence entre un savoir mémorisé et un savoir utilisable. On connaît la difficulté de certains élèves à utiliser les hauteurs extérieures de certains triangles parce qu'ils ont toujours travaillé sur des hauteurs intérieures. Un savoir cohérent peut ainsi être enclavé par sa cohérence même inutilisable pour des exercices. Quel professeur de mathématiques, de grammaire ou de physique n'a pas constaté cela ? C'est par la variation des situations d'exercice qu'un savoir devient, semble-t'il, plus disponible. Bien entendu, suivant les esprits cette opération est plus ou moins longue et difficile.

On aboutit ainsi à une double exigence : celle de la structuration du savoir nécessaire à la mémorisation; et celle de l'autonomie relative des différentes unités d'information du savoir pour le rendre opératoire.

On peut se demander si certaines présentations par fiches en particulier, réalisent bien cette double fonction.

Certaines connaissances ne sont pas immédiatement utilisables. La formule "il n'est pas vrai que le Roi ne porte pas de barbe" exige au moins le recours à la règle opératoire "deux négations valent une affirmation" pour être décodée. On peut se demander si des notions comme les relations d'équivalence ne tiennent pas leur difficulté du fait qu'elles exigent pour être reconnues des opérations intermédiaires (réflexivité, etc...) Il devrait être possible de favoriser la compréhension de telles notions en simplifiant les processus de reconnaissance.

On constate ainsi que certaines opérations paraissent compliquées si elles portent sur des éléments insuffisamment différenciés. N'est-ce pas le cas par exemple pour les opérations pourtant fondamentales d'inclusion et d'appartenance ?

Un point particulièrement difficile dans l'exposé du savoir mathématique, c'est le règne d'une structure dominante de pensée qu'on peut appeler déductive-démonstrative. On sait en effet, que certaines structures de pensée (énumérative, chronologique) sont accessibles à la plupart des esprits. Il n'en est pas de même en ce qui concerne les structures inductives et déductives. Dans ce cas, c'est sur les règles de transformation de l'information que doit porter surtout l'attention du présentateur. Or, c'est justement le point le plus facilement négligé.

Enfin, le passage d'un raisonnement portant sur des objets réels, à un raisonnement fondé sur la nature des informations est toujours difficile. Tout le monde sait que Socrate est mortel parce que tous les hommes le sont ; mais peu de gens seront capables de dire ce qu'on peut conclure de la combinaison d'une affirmation universelle (Tous les hommes sont mortels) avec une affirmation particulière (or Socrate est un homme). Peu de gens seront par exemple, capables de prévoir qu'il est indifférent de faire un rabais avant ou après adjonction de la T.V.A. en raison de la nature des opérations en cause. Pour beaucoup il faudra faire<sup>le</sup> calcul pour s'en rendre compte. Certaines difficultés peuvent être atténuées, par conséquent, si elles ont été repérées et si la présentation a été adaptée en conséquence.

Ces problèmes de présentation sont essentiels quel que soit le type de pédagogie adoptée. Mais toutes les pédagogies ont aussi leurs problèmes propres. Les différentes pédagogies se fondent sur une conception différente soit de fonctionnement de l'esprit humain, soit de ce qu'il faut développer dans les attitudes de l'esprit humain.

## II - QUELLES ACTIVITES INTELLECTUELLES SOLLICITER CHEZ L'ENSEIGNE ?

On peut essayer de faire une typologie des méthodes d'enseignement pratiquées en mathématiques. Comme toute typologie celle-ci ne présente que des cas caractéristiques qui ne donnent qu'une idée imparfaite de la pratique pédagogique réelle, mais elle permet cependant de discerner les activités intellectuelles visées par chaque situation.

On trouve d'abord dans certaines progressions par fiches une méthode d'induction guidée. On met l'élève dans une situation, on lui suggère certaines opérations et on lui demande ce qu'il peut dire de la situation.

On dira par exemple : voici une série de nombres : 2 - 6 - 18. Quelle relation peut-on établir entre eux ?

A titre de contrôle on fera ensuite continuer la liste. Puis on fera appliquer l'observation à d'autres situations de manière à généraliser.

On obtiendra ainsi la construction progressive d'un savoir allant par exemple jusqu'aux notions de bijection et d'application.

Dans cette méthode trois activités de l'élève sont particulièrement visées.

D'abord il construit lui-même son savoir. La notion d'application n'est pas alors une définition à retenir, mais elle est le produit de sa

propre activité intellectuelle, la découverte de l'élève en quelque sorte. 7

Ensuite, l'élève chemine du cas concret vers la généralisation et l'abstraction. Son activité intellectuelle est comme celle du savant qui part des situations complexes de la réalité, pour aboutir à des notions qui expriment la réalité, mais en en dégagant la généralité.

Enfin, l'élève est incité à l'analyse. C'est à lui d'interroger la situation pour la faire parler. Contrairement à ce qu'un vain peuple croit en effet, les faits ne parlent pas d'eux-mêmes.

Enfin on pourra observer que l'élève ne rencontre pas ici aussi nettement l'obstacle du langage, si net par contre dans la présentation des définitions ou théorèmes.

Dans la déduction programmée, autre méthode de présentation. On commence par exposer des principes, donner des informations par petites tranches. Par exemple, on donne la définition de l'antisymétrie, de la transitivité, etc... puis celle de la relation d'ordre. Après chaque élément d'information on fait faire des exercices tests pour vérifier que l'information a été assimilée. On peut éventuellement affiner le système par la méthode CROWDER qui consiste à faire suivre un nouveau cheminement si un exercice n'a pas été réalisé.

Cette méthode incite elle aussi à une construction du savoir, mais elle très différente de la précédente. L'élève n'est pas appelé à refaire le chemin de l'abstraction mais à parcourir plus fréquemment le passage de l'abstraction à l'application.

On insiste surtout sur le découpage de l'information pour en faciliter l'appropriation, ainsi que sur le passage de la théorie à l'application.

Méthode souvent plus rapide car on sait que l'enseignement des principes, par exemple dans les problèmes de Katona, permet de gagner du temps.

L'analyse n'est plus celle de la découverte d'une relation, mais celle de la découverte d'une similitude entre une relation dans un cas concret et une relation présentée abstraitement.

On connaît enfin l'exposé déductif qui consiste à présenter la totalité d'un secteur de savoir. On présentera par exemple une étude justificative de la fonction affine.

Puis par des exercices généralement en assez grand nombre on vérifiera que le savoir transmis est appliqué de manière satisfaisante.

Cette méthode a pour elle son long passé et sa cohérence. Elle ne prétend développer ni les facultés d'analyse et d'abstraction, ni mettre l'élève en état de construire son savoir. Elle lui donne ce savoir. Par la rigueur de ses structures elle favorise la mémorisation, par la multiplication des exercices elle donne une connaissance de nombreuses situations d'application et montre comment y faire face.

Elle est centrée sur le savoir, non sur l'élève, elle favorise la réception de ce savoir et son application.

Elle se soucie rarement des facultés qu'elle développe en dehors peut-être de la méthode. Fondée sur l'idée que l'intelligence est une donnée de fait à laquelle peuvent plus ou moins suppléer la mémoire et l'effort, elle vise l'efficacité. On pourrait dire qu'elle ne cherche pas à former des mathématiciens, mais des utilisateurs des mathématiques.

Si elle sollicite une certaine invention, c'est lors de la résolution de problème qui diffère évidemment de l'exercice. Le problème est une situation complexe couvrant un assez vaste secteur de savoir et il ne peut être résolu sans l'invention d'un cheminement qui est une utilisation habile, j'allais dire astucieuse, du savoir. La mathématique n'est plus ici élaboration de concepts, mais invention de moyen de résolution.

Comment apprécier ces différentes méthodes ?

Du point de vue de la théorie de l'apprentissage, on se demandera dans quelles conditions le savoir acquis est le plus solide ? Sur des savoirs

limités étudiés par les psychologues, de ce point de vue c'est le savoir acquis par une libre activité du sujet qui l'emporte.

Du même point de vue, on se demandera quelle est la nature du savoir acquis avec chaque procédé. On sait qu'il existe deux situations d'apprentissage :

- l'une qui est constituée par l'enregistrement de stimuli avec leurs réponses,
- l'autre aboutissant constamment à une réorganisation d'un savoir. Ce phénomène de réorganisation se manifeste par le franchissement de seuils à partir desquels les fautes disparaissent brusquement et totalement dans un domaine déterminé. Or ce type d'apprentissage exige une action constante de l'esprit sur son propre savoir. Il faut se demander alors quelles méthodes permettent une mémorisation suffisante d'une part et disons-le, la maîtrise suffisante de certains automatismes afin d'éviter les pertes de temps, et, d'autre part une circulation active et constante de l'esprit parmi les notions acquises. Les phases de synthèses paraissent manquer gravement dans les méthodes inductives. Ce qui semble manquer aussi c'est une théorie de l'exercice d'application, ou si l'on veut un renforcement des procédés opératoires.

Savoir résoudre une équation, étudier une fonction, construire une table de vérité, c'est connaître un procédé opératoire, c'est à dire le moyen de passer d'une donnée à une autre par une série de transformations. Quels procédés opératoires apprend-on actuellement dans le programme de 6ème et 5ème ? N'est-il pas normal alors que le programme de 4ème et encore plus celui de seconde réserve des surprises ?

On peut encore apprécier les différents procédés pédagogiques en partant du point de vue de l'obstacle linguistique.

On peut se demander comment est éliminé l'obstacle linguistique dans les différentes méthodes et pas uniquement en se préoccupant du vocabulaire employé. Sait-on par exemple que l'expression de la relation de cause, au moyen de subordonnées participes est mal réalisée même à un niveau élevé ? donc mal comprise. Sait-on qu'une phrase de plus de 15 mots offre des difficultés de compréhension à une majorité de personnes ? Observons de ce point de vue les définitions mathématiques. Est-on sûr qu'une constatation non suivie de sa définition soit bien assimilée ?

On peut se demander aussi si ce qui favorisait le passage des mathématiques à la physique dans l'enseignement traditionnel n'était pas le long apprentissage du problème au sens où nous l'avons défini plus haut. Depuis l'école élémentaire le problème disparaît ; il revient brusquement en seconde, mais sans qu'on soit familiarisé avec lui. S'initier à un univers rationnel et apprendre à découvrir des processus de résolution c'est toujours savoir faire une analyse mais fort différente. Or les psychologues sont très réservés sur les possibilités de transfert des apprentissages d'un domaine à un autre. Ce n'est pas parce qu'on a appris à analyser dans certains domaines qu'on sait le faire ailleurs. L'analyse de textes et l'analyse de problèmes usent de procédés opératoires différents.

On peut enfin se placer du point de vue de l'idéologie. Un enseignement où domine l'imitation ne donne pas les mêmes réflexes qu'une formation où se manifeste la libre initiative de l'enseigné.

On le voit, pour nous les exigences de l'enseignement des mathématiques sont multiples et la synthèse ne nous paraît totalement réalisée dans aucune méthode pédagogique actuellement utilisée. Mais serait-ce parce que les mathématiques sont particulièrement difficiles ?

L'idée couramment admise, c'est que les mathématiques sont le domaine par excellence de l'abstraction. Encore faut-il savoir ce qu'on désigne par le terme abstrait.

Il existe une pensée qui utilise des symboles au deuxième degré. Toute pensée, bien entendu, utilise le langage courant qui est le support symbolique général. Mais la fonction symbolique de deuxième degré, celle qui consiste à remplacer des objets, des concepts ou des opérations par des signes, est tardive chez l'être humain. Elle se heurte très souvent à des réticences, mais non à des inaptitudes. Il faut donc tenir compte de ces réticences.

Il existe une pensée accompagnée ou non d'images. On pourrait certes distinguer plusieurs types d'images. Mais pour l'essentiel, les expériences montrent que la pensée améliore l'image et qu'en retour elle trouve un point d'appui dans les images notamment spatiales. Chez certains sujets, c'est la représentation spatiale qui a de la peine à se réaliser, chez d'autres c'est la pensée sans images. Une éducation simultanée de la pensée sans images et de la représentation spatiale serait peut-être la meilleure solution et lèverait dans de nombreux cas beaucoup d'obstacles.

Si l'abstrait mathématique n'est pas particulièrement inaccessible, le savoir mathématique, est-il, par contre, rebutant ?

On découvre certes chaque jour un peu mieux l'importance des motivations positives pour favoriser les fonctions de vigilance et d'attention, développer l'énergie nécessaire à la mise à l'épreuve, bref à toutes les activités nécessaires à l'acquisition d'un savoir.

Mais il faut dire d'abord que la motivation s'alimente à la réalisation pédagogique, dans la triade - enseignant - enseigné - savoir. Si on observe que l'institution dans laquelle s'inscrit cette relation est en crise, si l'on constate encore que l'initiation des enseignants à la maîtrise des processus relationnels laisse à désirer on peut déjà se poser des questions sur les motivations générales des élèves.

Reste le cas particulier des mathématiques. La caractérologie distingue des esprits tournés vers la compréhension abstraite, d'autres vers l'application utilitaire. Certains sociologues d'autre part, ont montré que la culture populaire se caractérise par le goût pour ce qui est matériel, pour les actions physiques par opposition à une culture plus attentive à la parole et à l'analyse intérieure. On peut donc se demander si pour beaucoup d'esprits le détour théorique demandé aujourd'hui n'est pas trop long, et si le caractère ludique donné à certaines activités mathématiques de l'école élémentaire ne se retourne pas contre ses inventeurs. De l'arithmétique à l'algèbre le contact avec les besoins réels étaient rarement perdus dans l'enseignement traditionnel. On a besoin de savoir compter, de savoir mesurer une surface, on a rarement besoin des ensembles au même sens du mot besoin.

Il y a une transformation profonde du savoir utile aujourd'hui, mais savons-nous nous adapter vraiment à ce nouveau savoir ?

Là aussi, donc, des obstacles mais pas insurmontables.

Enfin, que faut-il donc posséder pour pouvoir faire des mathématiques ?

- d'abord la maîtrise des opérations générales de la pensée logique (classification, sériation, combinatoire).

- la disponibilité d'un certains nombres de représentations correctement assimilées. On ne se soucie pas assez des représentations aberrantes et l'on construit souvent sur de mauvais fondements.

- un entraînement à l'exploration d'un ensemble de données (ici mathématiques).

On pourrait sur ce point apprendre :

- à rendre les données utilisables en construisant des tableaux et en les exprimant dans un autre langage, etc...
  - à mettre en relation des données de multiples manières.
  - à transférer un apprentissage d'un domaine à un autre.
  - à procéder par étape dans la recherche.
  - à se donner des moyens de vérification.
- bref, à encadrer, sans les supprimer, les méthodes spontanées de tâtonnement.

Par contre, je ne parlerai ni de la nécessité d'avoir un esprit logique, ni du sens de la rigueur. Les mathématiques ne sont possibles que par la mise en oeuvre d'un certain type de raisonnement déductif qui n'est ni le raisonnement syllogistique ni le raisonnement argumentatif qui relèvent d'autres domaines et qui sont d'ailleurs pour la vie courante plus utiles que le raisonnement mathématique. La logique mathématique n'est pas toute la logique, et la rigueur mathématique pas toute la rigueur. En fait, le raisonnement mathématique résulte d'un apprentissage comme les autres. Les mathématiques font appel aussi à une certaine manière de manipuler des données qui joue un rôle essentiel et dont la place n'est pas toujours reconnue dans l'activité mathématique. La logique mathématique et la rigueur sont les conséquences d'un enseignement réussi, non une donnée spontanée qui manquerait à certains.

La compréhension des mathématiques pose bien des problèmes que des I.R.E.M. abordent courageusement et sur lesquels les enseignants de mathématiques s'interrogent avec inquiétude bien souvent.

Dans l'immédiat quelques petites améliorations sont possibles dans le cadre de programmes d'une grande rigidité :

- se donner les moyens de contrôler avant l'enseignement le savoir déjà maîtrisé par l'élève et après l'enseignement, le point où il en est arrivé, non pour juger de son intelligence mais pour adapter les procédés pédagogiques.
- être plus attentif aux présentations.
- faire une analyse plus systématique des activités mises en jeu dans le type d'enseignement que l'on pratique.
- ne pas oublier que la répétition - habile peut-être - est le moyen obligé de toute acquisition solide.
- savoir prendre le temps de familiariser les élèves avec les démarches les plus difficiles des mathématiques : le langage symbolique, le raisonnement déductif, l'analyse d'une situation mathématique.

## LES 42 MORPHISMES DU PLAN

Ecrit à la suite d'une conférence A.P.M. à ANGOULEME  
le 19 Octobre 1975 sur le thème

"C'EST DU PROPRE"

par A. DELEDICQ (Didactique des Disciplines  
PARIS VII)

-----

On prétend, dans les livres, avoir une bonne image du plan par la contemplation d'une belle étendue d'eau (les eaux de Versailles ou celles de Vincennes ? , bassin pisciculturel, mare au diable, lac de Lozère, ...)

Ces plans là sont amorphes ; placez-y des jets d'eaux, un serpent de mer, des passions souterraines, un vent violent, c'est-à-dire un "opérateur" qui les agitent, et vous verrez apparaître des rielles, des courants, des champs de force, des singularités...

Bref, voilà qu'une transformation structure le plan en lignes essentielles et le tord comme une membrane souple et vivante.

Parmi l'infinie variété des transformations susceptibles d'opérer dans le plan, nous avons choisi de nous restreindre, ici, à la classe de celles qui respectent ses opérations naturelles : l'addition vectorielle et la multiplication par un réel.

Notre sujet se limite donc aux applications linéaires de l'espace à deux dimensions  $\mathbb{R}^2$ . Mais nous verrons que ces "morphismes" ne nous décevront pas, et que la "phorme" des paysages qu'ils génèrent nous étonnera par sa diversité.

EXEMPLE 1 : Une société de classes

Dans ce lointain pays qu'est la Démocratie, il y a des pauvres et des riches ; aujourd'hui, à la date  $n$ , ils sont respectivement  $P_n$  et  $R_n$ . Après une génération, 20 ans après, à la date  $n + 1$  dirons nous, ils seront  $P_{n+1}$  et  $R_{n+1}$ . Après de longues études portant sur de multiples générations, on a constaté que  $P_{n+1}$  et  $R_{n+1}$  s'expriment en fonction de  $P_n$  et  $R_n$ , indépendamment de  $n$ , de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_{n+1} = 1,3 P_n + 0,1 R_n \\ R_{n+1} = 0,2 P_n + 1,2 R_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

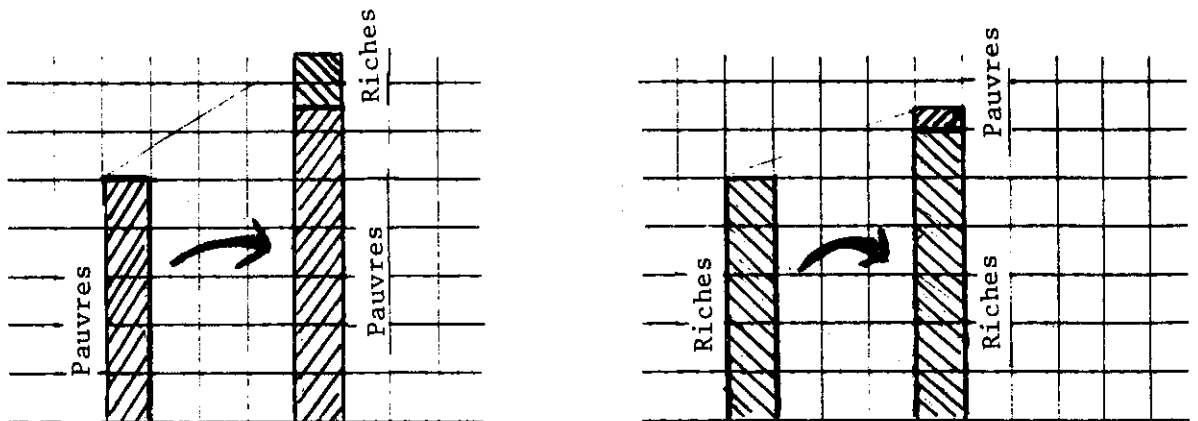
Ce qui s'écrit plus facilement :

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,1 \\ 0,2 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$X_{n+1} = A \cdot X_n \quad X_n \in \mathbb{R}^2$$

Notre petit modèle est celui d'une société stable dont la population croît (exponentiellement, comme on le verra) et où le fils est, souvent de la même classe que son père : 20 % des pauvres d'une génération "deviennent" (par leur fils ou par leur propre ascension, s'ils vivent encore) riches à la génération suivante.

Le passage inverse a lieu 2 fois moins souvent :



La superposition de ces deux diagrammes décrit l'évolution des classes sociales.

Que va-t-il se passer dans une telle société ?

Au bout d'un moment (c'est-à-dire "asymptotiquement") ne va-t-il y avoir que des riches ? On peut penser - à juste titre d'ailleurs - que le rapport  $\frac{P}{R}$  caractérisant la distribution en 2 classes de la société, va se stabiliser vers une valeur limite  $a$ . Une distribution  $V = (P, R)$  vérifiant  $\frac{P}{R} = a$  deviendrait alors  $V' = (P', R')$  telle que  $\frac{P'}{R'} = a$ , et donc telle que  $V' = \lambda V$  soit parallèle à  $V$ ; on aurait donc :

$$\exists \lambda : V' = \lambda V \quad \text{c'est-à-dire} \quad P' = \lambda P \quad \text{et} \quad R' = \lambda R.$$

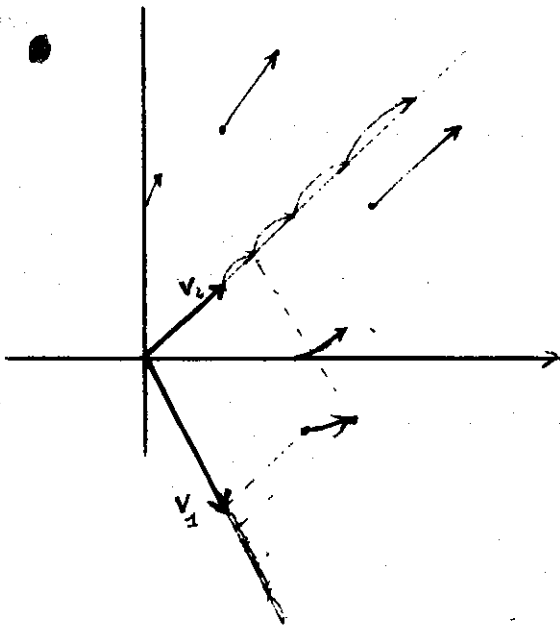
[ Si nécessaire, on pourra lire ici l'annexe théorico-pratique ]

Ce sont donc les valeurs propres et vecteurs propres de  $A$  qui nous permettront de répondre aux questions prospectives que nous posons !

Vous pourrez vérifier que :

$\lambda_1 = 1,1$  est valeur propre avec  $V_1 = (1, -2)$  comme vecteur propre  
 $\lambda_2 = 1,4$  est valeur propre avec  $V_2 = (1, 1)$  comme vecteur propre

Représentons notre société par rapport à la base  $(V_1, V_2)$  et indiquons les transformées de quelques points :



pour notre problème le premier quadrant est seul significatif

Tout vecteur initial est multiplié par 1,4 dans la direction  $V_2$  et par 1,1 dans la direction  $V_1$ .

Après  $n$  transformations il est multiplié par  $(1,4)^n$  le long de  $V_2$  et par  $(1,1)^n$  le long de  $V_1$ . C'est évidemment sa composante le long de  $V_2$  qui finit par devenir prépondérante et, au bout d'un certain temps, la multiplication le long de  $V_2$  devient seule apparente.

Dans la cas général on comprend que, finalement, ce soit la valeur propre de plus grand module qui impose sa direction propre : c'est donc elle qui dirige préférentiellement le phénomène, les autres valeurs propres interviennent [chacune selon l'importance de leur module] pour "moduler" plus modestement le comportement directionnel.

Revenant à notre exemple, nous pouvons donc énoncer les conclusions suivantes :

- le taux d'accroissement moyen de la population tend vers 1,4 [valeur propre de plus grand module]
- les nombres de riches et de pauvres tendent à devenir égaux  $[(P_n, R_n) \rightarrow k(1,1) = kv_2]$
- la position respective de l'autre vecteur propre par rapport au premier quadrant permet d'affirmer que l'égalisation des classes sera moins rapide s'il y a d'abord plus de pauvres que de riches.

Remarque :

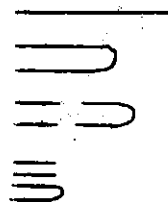
A titre de première leçon de politique appliquée, nous vous signalons qu'en "Libéralie", la matrice de changement de classe est la suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1,6 & 0,4 \\ 0,8 & 1,2 \end{bmatrix} \quad \text{ce qui plaît beaucoup plus aux pauvres.}$$

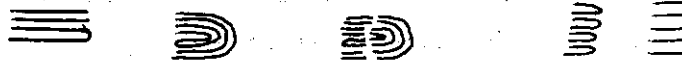
Or, le calcul que vous allez faire montre que les vecteurs propres sont les mêmes que pour A ! Simplement les valeurs propres sont telles que la tendance à l'égalisation est beaucoup plus rapide [en effet  $\lambda_1$  est inférieure à 1 et son influence tend donc vers 0]

EXEMPLE 2 : Pliez - Coupez - Superposez !

- { Pliez une bande de papier ;
- { Coupez la ;
- { Superposez les bandes restantes ;



Recommencez cette transformation :



Après un grand nombre de transformations, combien a-t-on de bouts de papier dans les doigts ?



Si elles sont toutes deux supérieures à 1, le processus est de type "divergent", plutôt dans la direction propre de celle de plus grand module.

Dans tous les cas c'est cette dernière qui commande ; si l'une est égale à 1 la droite propre correspondante est invariante ...

Voyons un autre exemple.

EXEMPLE 3 - Rotation du capital

La transformation G : "assaut de générosité" est la suivante : Pierre donne à Paul la moitié de son argent ; lequel Paul s'empresse alors de lui rendre la pareille ; de sorte que la distribution initiale (x,y) devient (x',y') :

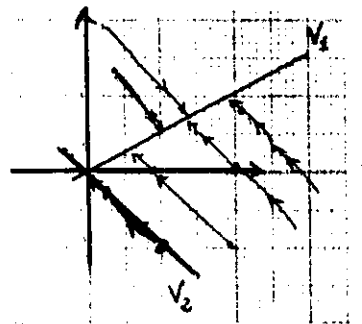
$$(x,y) \longrightarrow \left(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2}\right) \longrightarrow \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{x}{4}, \frac{y}{2} + \frac{x}{4}\right)$$

$$X' = G X \quad \text{avec} \quad G = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Le spectre de G est :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & V_1 = (2, 1) \\ \lambda_2 = 0,25 & V_2 = (1, -1) \end{cases}$$

Au bout d'un certain temps, donc, Pierre aura 2 fois plus d'argent que Paul, la somme totale restant constante ( $\lambda_1 = 1$ )



**Intermède 2**

Dans l'état actuel des choses vous pouvez imaginer au moins 6 types de processus linéaires remplissant le tableau suivant :

$(\lambda_2 > \lambda_1)$	$\lambda_1 < 1$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 > 1$
$\lambda_2 < 1$			
$\lambda_2 = 1$	Type G	Type I	
$\lambda_2 > 1$	Type B	Type C	Type A

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vous pouvez dessiner les trajectoires de processus correspondant à la case ( $\lambda_1 < 1$ ,  $\lambda_2 < 1$ ) en étudiant par exemple la transformation

$$K = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3,5 \end{bmatrix} \quad \text{des spectres} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0,5 & v_1 = (1,2) \\ \lambda_2 = 0,25 & v_2 = (2,1) \end{cases}$$

Nous avons pourtant laissé échapper quelques transformations qui se situeraient dans la "diagonale" du tableau précédent :

lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2$ , deux cas peuvent se produire :

1 - Tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont propres. C'est le cas de l'identité et de 2 types de transformations non encore rencontrées :

- l'homothétie de rapport inférieur à 1
- l'homothétie de rapport supérieur à 1

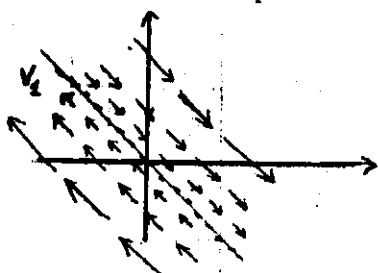
2 - Une seule direction de  $\mathbb{R}^2$  est propre. Les exemples suivants montrent que ce cas pathologique peut bien arriver.

#### EXEMPLE 4 - Applications non diagonalisables

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{n'a que la valeur propre } 1 \text{ et le seul vecteur propre } (1,0)$$

$$\text{Voici les trajectoires de } H' = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{de}$$

$$\text{spectre } \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad v_1 = (1, -1) :$$



$v_1$  est stable et  $H'$  "translate" parallèlement à  $v_1$  d'autant plus que l'on est loin de  $v_1$

Nous vous laisserons le (difficile) plaisir de tracer les trajectoires des applications :

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdot \quad \lambda_1 = 2 \quad v_1 = (1, -1)$$

$$\text{et } K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \cdot \quad \lambda_1 = 0,5 \quad v_1 = (1, 0)$$

**Intermède 3**

Nous connaissons donc déjà  $6 + 2 + 3 = 11$  types de transformations linéaires de  $\mathbb{R}^2$ .

Et pourtant nous n'avons encore rencontré que des valeurs propres strictement positives.

Que se passe-t-il si l'une d'entre elles s'annule ?

C'est à vous de répondre!

Si les 2 s'annulent, l'application associée n'est pas difficile à étudier : elle réduit tout à 0.

Voyons maintenant un exemple dans lequel les valeurs propres deviennent négatives.

EXEMPLE 5 - Pyramides des âges :

Pour les besoins de notre cause (celle du plan) notre pyramide des âges n'aura que 2 tranches : les jeunes [agés de 0 à une demi-vie] et les vieux.

La période entre 2 recensements est une demi-vie, de sorte que tous les vieux précédents sont morts et que tous les jeunes précédents (non décédés prématurément) sont devenus vieux :

$$\begin{cases} J_{n+1} = a J_n + b V_n \\ V_{n+1} = c J_n \end{cases} \quad \begin{array}{l} a : \text{taux de natalité des jeunes} \\ b : \text{taux de natalité des vieux} \\ 1 - c : \text{taux de mortalité des jeunes} \end{array}$$

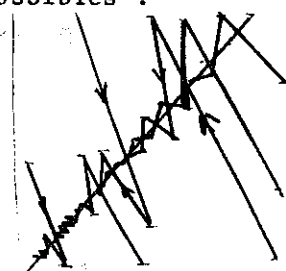
$$\begin{bmatrix} J_{n+1} \\ V_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \\ V_n \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient  $\lambda^2 - a\lambda - bc = 0$ . Elles sont donc de signes contraires, la plus grande  $\lambda_2$  étant positive.

L'avenir de cette humanité dépend donc de la position de  $\lambda_2$  par rapport à 1. Voici des exemples des trois cas possibles :

$$D = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,9 & 0 \end{bmatrix}$$

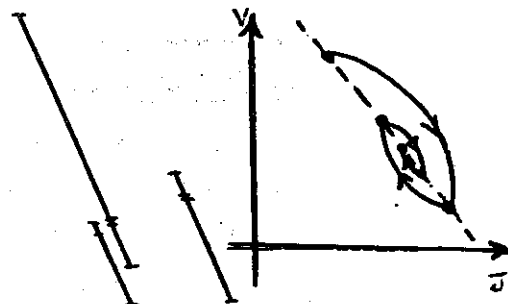
Spectre  $\begin{cases} \lambda_1 = -0,4 & V_1 = (4, -9) \\ \lambda_2 = 0,9 & V_2 = (1, 1) \end{cases}$



Extinction progressive de l'humanité.

$$E = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

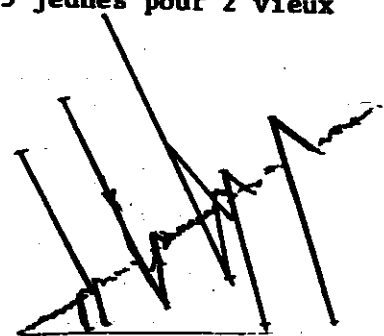
$$\text{Spectre} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -0,2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1 = (1, -2) \\ v_2 = (5, 2) \end{matrix}$$



$$F = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,25 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Spectre} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -0,05 \\ \lambda_2 = 1,25 \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1 = (1, -5) \\ v_2 = (5, 1) \end{matrix}$$

Tendance vers un équilibre :  
5 jeunes pour 2 vieux



Croissance exponentielle  
avec 5 jeunes pour 1 vieux.

#### Intermède 4

Jusqu'à présent la valeur propre négative n'avait pas le rôle asymptotiquement prépondérant. Lorsqu'elle atteint  $-1$  elle commence à avoir un sérieux mot à dire.

Voici d'abord les symétries axiales par exemple :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{de spectre} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 & v_1 = (1, 1) \\ \lambda_2 = -1 & v_2 = (1, -1) \end{cases}$$

ou la plus amusante (parce qu'oblique!) :

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{de spectre} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 & v_1 = (1, 0) \\ \lambda_2 = -1 & v_2 = (1, 1) \end{cases}$$

Le cas le plus simple, à deux valeurs propres négatives est la symétrie par rapport à  $0$  :

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \lambda = -1, \text{ tout } \mathbb{R}^2 \text{ propre.}$$

On voit, en tout cas qu'une valeur propre négative inverse le sens du vecteur transformé tout en le multipliant selon son module.

Les exemples concrets à valeur propre négative sont plus difficiles à inventer dans la mesure où "concret" implique souvent de "rester dans le premier quadrant".

**Conclusion 1** - Typologie des "morphisms hyperboliques" de  $\mathbb{R}^2$

Le qualificatif "hyperbolique" caractérise les applications linéaires ayant deux directions propres distinctes. (les valeurs propres étant différentes).

Elles sont de types différents selon la position des valeurs propres par rapport à -1, 0 et 1 ; d'où le tableau ci-dessous où l'on voit apparaître 25 types.

$\lambda_2 \geq \lambda_1$	$\lambda_1 < -1$	$\lambda_1 = -1$	$-1 < \lambda_1 < 0$	$\lambda_1 = 0$	$0 < \lambda_1 < 1$	$\lambda_1 = 1$	$1 < \lambda_1$
$\lambda_2 < -1$							
$\lambda_2 = -1$							
$-1 < \lambda_2 < 0$							
$\lambda_2 = 0$							
$0 < \lambda_2 < 1$							
$\lambda_2 = 1$							
$1 \leq \lambda_2$							

Le lecteur complètera les cases blanches

**Conclusion 2** - Morphismes à valeur propre double :

Ils se divisent en 2 classes selon qu'il n'existe qu'un vecteur propre ou que tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont propres.

	$\lambda < -1$	$\lambda = -1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda = 0$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 \leq \lambda$
Morphismes "triviaux" ( $\mathbb{R}^2$ propre)	Homothétie	symétrie point	Homothétie	nullité	Homothétie	identité	Homothétie
Morphismes "paraboliques" (1 direction propre)							

Voici donc 14 types supplémentaires.




**Conclusion 3** - Morphismes "elliptiques" de  $\mathbb{R}^2$

Ce sont les applications linéaires à valeurs propres complexes. La situation est alors beaucoup plus simple que ce que l'on pourrait penser :

- la partie "imaginaire" fait tourner les vecteurs transformés par l'application

- et ils sont multipliés par le module commun aux deux valeurs propres conjugués.

De sorte que si les valeurs propres sont  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$ , il n'y a que 3 cas possibles :

- .  $\rho < 1$   enroulement vers l'origine
- .  $\rho > 1$   déroulement extensif
- .  $\rho = 1$   Rotations

Dans ce dernier cas (Rotation) il n'y a pas lieu (quant à la typologie ici dressée "d'ordre fini") de distinguer les rotations commensurables avec  $\pi$  et les autres.

CONCLUSION GENERALE :

Nous sommes donc en présence de  $25 + 14 + 3 = 42$  applications linéaires dans le plan. Qui l'eût cru ?

Nous avons surtout fait connaissance avec quelques unes d'entre elles pour lesquelles nous disposons de processus concrets simples en exemple.

De larges recherches sont encore possibles : une plus grande intimité avec les valeurs propres négatives, avec les processus paraboliques ; une plus rigoureuse étude des processus elliptiques ; une percée vers les processus continus, définis par des systèmes différentiels et non plus récurrents ; une typologie des "trajectoires" pour lesquelles le sens de parcours du processus est indifférent [2 processus  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2})$  sont alors "géométriquement équivalents"]...

Bref! Ca peut encore durer longtemps.

ANNEXE THEORICO - PRATIQUE

I -  $f$  étant une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

1) Si  $f(V) = \lambda V$ ,  $\lambda$  est dite valeur propre de  $f$  et  $V$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . [l'ensemble des solutions du système linéaire homogène  $(f - \lambda) V = 0$  est l'"espace propre" associé à  $\lambda$ ]

2)  $\lambda$  valeur propre de  $f \iff \lambda$  vérifie l'équation "caractéristique" :

$$\lambda^2 - \alpha \lambda + \beta = 0 \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels associés à } f :$$

$\alpha$  est sa "trace",  $\beta$  son "déterminant".

[voir en II leurs calculs]

3) Lorsqu'il y a 2 valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , il existe deux vecteurs propres  $V_1$  et  $V_2$  respectivement associés, et non parallèles entre eux.

Il est alors agréable de choisir  $V_1$  et  $V_2$  comme base de  $\mathbb{R}^2$  puisque l'application  $f$  consiste simplement à multiplier les vecteurs par  $\lambda_1$  dans la direction  $V_1$  et par  $\lambda_2$  dans la direction  $V_2$  [avec la "linéarité" de  $f$ , on construit ainsi l'image de tout vecteur]

4) Lorsqu'il y a 1 valeur propre double, soit tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont propres [et  $f$  est une homothétie], soit il n'y a qu'une seule direction propre [et  $f$  est une erreur de la nature :  $f$  est alors dite : "non diagonalisable"]

II -

1) Les calculs pratiques se font, en général, lorsque le choix d'une base de  $\mathbb{R}^2$  permet d'exprimer les vecteurs par leurs coordonnées  $X = (x, y)$  (les coordonnées des vecteurs de base, eux-mêmes [souvent implicite comme dans l'exemple 1] sont  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ )  $f$  est alors représentée par une matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ telle que } : X' = AX \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

La trace de  $f$  est indépendante de la base choisie : c'est la somme  $a + d$  des éléments de la diagonale de toute matrice qui la représente.

Le déterminant de  $f$  est celui de toute matrice qui la représente;  $ad - bc$

2) Ces affirmations découlent immédiatement de la considération de quelques systèmes d'équations à 2 inconnues ; mais le vocabulaire et les résultats rappelés ci-dessus sont valables pour un espace de dimension quelconque.

3) Ainsi :  $f$  (et toute matrice la représentant) est "diagonalisable" si il existe une base [alors composée de vecteurs propres] pour laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

Si  $A$  est alors la matrice de  $f$  par rapport à une base  $(\beta)$  [ses colonnes sont les coordonnées des transformées par  $f$  de chacun des vecteurs de base],  $P$  la matrice "de passage" de  $(\beta)$  à la base composée des vecteurs propres [les colonnes de  $P$  sont les coordonnées de chacun des vecteurs propres], et  $D$  la matrice (diagonale) de  $f$  par rapport aux vecteurs propres, on a :

$$PD = AP.$$

Cette relation exprime qu'il revient au même, sur les coordonnées d'un vecteur : de le transformer par  $f$  puis de changer de base ou de changer de base d'abord puis de le transformer.

## DE LA GEOMETRIE DE PREMIERE A LA PROGRAMMATION LINEAIRE

D. FREDON IREM de LIMOGES

exposé fait à POITIERS le 3 décembre 1975

Quelques exemples typiques de problèmes économiques nous permettent de préciser les notions élémentaires utilisées en programmation linéaire. Dans le cas de 2 variables la résolution du problème peut se faire par des méthodes graphiques faisant appel à la géométrie de la classe de 1ère. Ce cas dont l'intérêt pratique est minime, aide bien à comprendre les théorèmes généraux et les techniques mathématiques mises en oeuvre dans la résolution des problèmes effectivement traités en entreprise.

I - Quelques applications à l'économie :1) Etablissement d'un programme de fabrication.

a) production utilisant des machines, des matériaux...  
donnés et maximisant le profit.

exemple 1 :

Considérons un atelier fabriquant deux produits A et B à l'aide de trois machines  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Les temps de passage pour un kg de produit A ou B sur chacune des machines sont indiqués en mn dans le tableau ci-dessous :

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
A	5	10	11
B	15	8	20

Les machines ne sont respectivement disponibles que 100 h, 120 h, 150 h par mois et on néglige toutes les autres contraintes techniques ou commerciales. On sait que le bénéfice est de 10 F pour un kg de A, et de 13 F pour un kg de B, et on se propose de déterminer un programme de fabrication qui rende maximum le bénéfice global.

Soit  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) la production mensuelle exprimée en kg de produit A (resp. B). On suppose que les temps de fabrication et le bénéfice sont proportionnels aux quantités produites.

Le bénéfice exprimé en F, est donc :

$$Z = 10 x_1 + 13 x_2$$

Comme  $M_1$  ne peut être utilisée que 100 h par mois, soit 6000 mn, il faut :

$$5 x_1 + 15 x_2 \leq 6000$$

De même :  $10 x_1 + 8 x_2 \leq 7200$

$$11 x_1 + 20 x_2 \leq 9000$$

Le problème est donc de déterminer le programme de fabrication  $(x_1, x_2)$  qui maximise  $Z = 10 x_1 + 13 x_2$

en vérifiant les contraintes

$$5 x_1 + 15 x_2 \leq 6000$$

$$10 x_1 + 8 x_2 \leq 7200$$

$$11 x_1 + 20 x_2 \leq 9000$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

### Exemple 2 :

On dispose de :

2000 tonnes d'un métal A ayant coûté 70 F la tonne

3000 tonnes d'un métal B ayant coûté 50 F la tonne

dont on peut réaliser les alliages suivants :

alliage n° 1 vendu 110 F/t et composé de 30 % de A  
et 70 % de B

alliage n° 2 vendu 120 F/t et composé de 40 % de A  
et 60 % de B

alliage n° 3 vendu 100 F/t et composé de 20 % de A  
et 80 % de B

On veut déterminer le programme de fabrication des alliages qui donnera le bénéfice maximum. Traduire le problème sous forme mathématique, les seules contraintes étant dues aux stocks disponibles.

b) production nécessaire pour satisfaire une demande au moindre coût.

Exemple 3 (MAURIN 1967)

Une raffinerie peut traiter quatre pétroles bruts d'origines géographiques différentes.

Le brut n° 1 lui revient à 200 F/T

Le brut n° 2 lui revient à 180 F/t

Le brut n° 3 lui revient à 210 F/t

le brut n° 4 lui revient à 170 F/t.

On suppose que ces bruts sont transformés intégralement en essence, gas-oil, fuel-oil selon les rendements :

productions :	brut n° 1 :	brut n° 2 :	brut n° 3 :	brut n° 4
essence :	30	25	40	20
gas-oil :	40	25	30	20
fuel-oil :	30	50	30	60
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:

Cette raffinerie doit satisfaire une demande annuelle de :

1 250 000 t d'essence

1 300 000 t de gas-oil

1 800 000 t de fuel-oil

Il s'agit de déterminer les quantités de chacun des bruts à mettre en œuvre pour que la dépense totale soit-minimale.

Si on appelle  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les quantités en milliers de tonnes des bruts n° 1, 2, 3, 4 à raffiner, le problème s'écrit :

$$\text{minimiser } Z = 200 x_1 + 180 x_2 + 210 x_3 + 170 x_4$$

sous les contraintes

$$3 x_1 + 2,5 x_2 + 4 x_3 + 2 x_4 \geq 12\ 500$$

$$4 x_1 + 2,5 x_2 + 3 x_3 + 2 x_4 \geq 13\ 500$$

$$3 x_1 + 5 x_2 + 3 x_3 + 6 x_4 \geq 18\ 000$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

## 2) Problèmes de mélange.

Lorsqu'on souhaite obtenir un produit présentant des caractéristiques précises par le mélange de produits dont on connaît la composition et le prix, la programmation linéaire permet de trouver le mélange le plus économique.

## 3) Certains problèmes d'investissement.

exemple : l'énergie électrique.

A chaque instant, l'EDF doit être en mesure de fournir une quantité d'énergie répondant à la demande. Tout en respectant cette contrainte, on peut chercher à définir un équipement optimum qui minimise le coût total d'investissement et de fonctionnement. (coûts actualisés).

## 4) Points communs aux problèmes qui précèdent.

Dans les problèmes cités, il s'agit toujours de déterminer des valeurs positives ou nulles d'inconnues de façon à optimiser une fonction linéaire de ces inconnues tout en satisfaisant à certaines inégalités ou égalités linéaires qui traduisent diverses contraintes techniques, commerciales, financières... La validité de ces hypothèses de linéarité doit toujours être discutée avant d'appliquer les techniques de la programmation linéaire.

## II - ETUDE D'UN EXEMPLE SIMPLE - RESOLUTION GRAPHIQUE :

### 1) utilisation dans les classes du second degré

La résolution graphique dans le cas de 2 variables permet d'utiliser diverses notions de géométrie analytique :

a) Dans un plan muni d'un repère, la forme générale de l'équation d'une droite est :

$$ax + by + c = 0$$

où  $a, b, c$  sont des constantes réelles données.

Une telle droite détermine deux demi-plans dont l'un a pour équation  $ax + by + c > 0$  et l'autre  $ax + by + c < 0$

b) Deux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  d'équations respectives

$$(D_1) \quad ax + by + c = 0$$

$$(D_2) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sont parallèles si, et seulement si,  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ . C'est le cas en particulier pour  $a = a'$  et  $b = b'$ .

c) si  $(D)$  est la droite d'équation

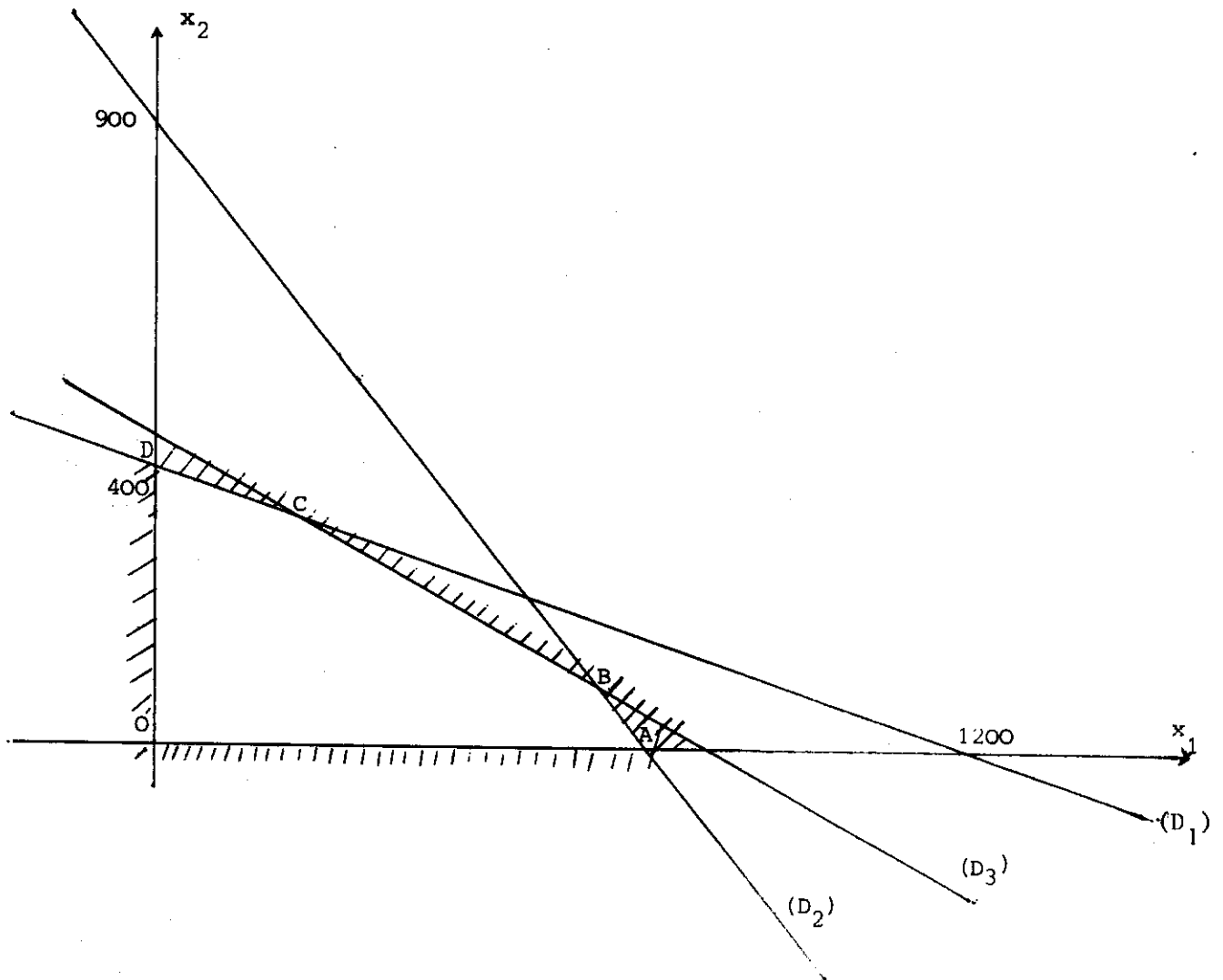
$$ax + by = k$$

la distance de l'origine  $O$  à  $(D)$  est égale à  $\frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (si  $k > 0$ )

c'est-à-dire que, pour  $a$  et  $b$  constants, elle est proportionnelle à  $k$ .

## 2) Résolution graphique du problème de l'exemple 1

Chaque programme de fabrication  $(x_1, x_2)$  peut être représenté par le point  $M$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  dans un plan muni d'un repère arthonormé par exemple. Les diverses contraintes correspondent alors à l'obligation faite au point  $M$  d'appartenir simultanément à un certain nombre de demi-plans, soit en résumé au polygône convexe  $OABCD$ , dit polygône des contraintes.



D'autre part, lorsque le point  $M$  décrit une droite d'équation  $10 x_1 + 13 x_2 = k$  (ou plus précisément la partie de cette droite contenue dans le polygone des contraintes) le profit est constant et égal à  $k$ . Il apparaît ainsi une solution graphique :

- déplacer une droite d'équation  $10 x_1 + 13 x_2 = k$  parallèlement à elle-même ;
- n'accepter que les positions telles que la droite rencontre le polygone des contraintes puisque seuls les points du polygone (fermé) correspondent à des programmes de fabrication qui vérifient les contraintes ;

- Chercher la position telle que la distance de l'origine à la droite soit maximum puisqu'on cherche  $k$  maximum.

On constate graphiquement que le programme optimal correspond au sommet B. d'où :

$$x_1 = \frac{4\ 500}{7} \approx 643$$

$$x_2 = \frac{675}{7} \approx 96$$

$$\text{et } z = \frac{53\ 775}{7} \approx 7\ 682$$

Remarque :

La méthode graphique ne convient que pour des problèmes à deux variables. Elle ne peut donc pas servir à résoudre des problèmes réels. Mais elle a un grand intérêt pédagogique pour comprendre les théorèmes généraux et les algorithmes.

III - GENERALITES SUR LES PROGRAMMES LINEAIRES :

1) Définitions

on appelle programme linéaire le problème de la recherche de l'élément (ou des éléments)  $x$  de  $\mathbb{R}^n$

qui maximise  $f(x)$

sous les contraintes  $g_i(x) \leq 50 \quad i=1, \dots, m$  où  $f, g_1, \dots, g_m$  sont des fonctions données de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $f$  linéaire et  $g_i$  affine pour  $i = 1, \dots, m$ .

on appelle programme réalisable tout élément de

$$P = \{ x ; \quad g_i(x) \leq 50 \quad i = 1, \dots, m \}$$

et solution tout programme réalisable qui maximise  $f(x)$   $f$  est dite fonction économique ou fonction critère.

2) théorèmes

a)  $P$  est un polyèdre convexe. Il peut être vide. Il peut être non borné.

b) Le maximum de  $f$  n'est pas atteint à l'intérieur de  $P$ . S'il est fini, il est atteint en au moins un sommet.

En effet, soit  $AB$  l'intersection d'une droite et du polyèdre des contraintes  $P$ . Si  $M \in AB$  on a :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda (\vec{OB} - \vec{OA}) \quad \text{avec } \lambda \in [0,1]$$

$f$  étant linéaire :

$$\varphi(\lambda) = f(\vec{OM}) = f(\vec{OA}) + \lambda [f(\vec{OB}) - f(\vec{OA})]$$

$\varphi$  est une fonction de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$\varphi(\lambda) = \alpha + \lambda\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.  $\varphi$  continue sur le compact  $[0,1]$  atteint sa borne supérieure en  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$  suivant le signe de  $\beta$ .

La restriction de  $f$  au segment  $AB$  atteint donc son maximum en  $A$  ou  $B$ .

#### IV - DESSERREMENT DES CONTRAINTES - VALEURS MARGINALES

Reprenons l'exemple traité graphiquement et supposons qu'au lieu d'être limitée à 6 000 mn par mois, la capacité de production de  $M_1$  passe à  $6\,000 + \lambda$ . Si  $\lambda$  est faible, c'est encore au point d'intersection de  $(D_2)$  et  $(D_3)$  que l'optimum est atteint : l'apport sur la fonction économique est nul. Cela correspond au fait que  $M_1$  n'était pas complètement utilisée à l'optimum :

Une augmentation de  $\mu$  mn sur la capacité de production de  $M_2$ , avec  $\mu$  faible, conduit à un nouvel optimum :

$$n_1 = \frac{4\,500}{7} + \frac{5}{28} \mu$$

$$n_2 = \frac{675}{7} - \frac{11}{112} \mu$$

$$\text{et } z = \frac{53\,775}{7} + \frac{57}{112} \mu$$

$\frac{57}{112}$  est le bénéfice marginal (en francs) de la contrainte (en mn)

"limitation du temps d'utilisation  $M_2$ ". C'est l'augmentation du bénéfice qui résulte du desserrement de la contrainte d'une unité

On trouve de la façon pour  $M_3$  :  $\frac{25}{56}$

#### Bibliographie très sommaire

MAURIN programmation linéaire appliquées Technip  
SIMONNARD programmation linéaire Dunod

LES ENSEMBLES A L'ECOLE PRIMAIRE  
PAR MONSIEUR FOURNIER I.D.E.N. VIERZON (CHER)

Voici quelques constatations faites dans de nombreuses classes pendant 5 ans.

On retrouve encore les dominos accompagnés du nombre de points. On croit moderniser en remplaçant le domino par un ensemble de blocs logiques, avec dans une étiquette leur nombre, pardon, leur cardinal. Dans les deux cas le nombre reste attaché à des objets. Depuis 1970 les Instructions insistent sur le fait que le nombre est propriété d'ensembles. Pour dégager 4 il faut au moins deux ensembles, celui constitué par les roues d'une auto et l'autre par les coins de la classe. Il y a autant de roues que de coins, le même nombre nous pouvons le désigner et l'écrire 4.

Dès le premier jour on donne priorité au dessin sur la réalité et ensuite on oublie qu'on a inventé l'écriture ce qui nous permet de dire aujourd'hui que nous sommes sortis de la préhistoire.

*A partir de la réalité*, dans la classe, il est aisé de trier, de ranger, de classer garçons et filles, ceux nés au cours des différentes années, ceux habitant tel ou tel quartier, rue, parmi les objets, ceux utilisés pour écrire au tableau, pour écrire à sa place, pour le nettoyage, les meubles individuels ou collectifs, les doigts, les mains et j'en passe. Ces exemples présents, bien visibles, concrets, en permanence disponibles n'ont qu'un défaut : ils sont gratuits, impossible à faire figurer sur une liste d'achat "pédagogiques", ne sont l'objet d'aucune réclame. Le groupe de l'école Moderne a raison de crier "Arrêtons le gaspillage" j'ajouterai, pour le plus grand dommage de nos enfants.

*En mathématique la réalité est trop souvent remplacée par le dessin.* Je ne dis pas que dessins, croquis, signes, étiquettes, symboles, entourage de l'ensemble par une ligne fermée de forme plus ou moins régulière soient à proscrire mais je m'élève avec force contre l'abus, l'usage quasi exclusif qu'on en fait.

*On oublie qu'on a inventé l'écriture* cette merveille qui permet de présenter, de lier, choses, gens, idées, faits avec un nombre limité de caractères même à ceux qui ne sont pas doués pour le dessin. Je n'ai pas encore rencontré entourés par une ficelle lundi, mardi, mercredi, jeudi ; par une autre Marc, Jean, Pierre, Louis et dans leurs étiquettes jours de la semaine ou garçons et entre 4.

En résumé comme les langues les ensembles peuvent être la meilleure ou la pire des choses. Employés comme ils le sont encore trop souvent ils risquent de devenir ~~ris~~ ~~qu~~ ~~issants~~, dangereux.

COMMENT CONCEVOIR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE  
 POUR ASSURER LA CONTINUITÉ AVEC L'ENSEIGNEMENT  
 ÉLÉMENTAIRE ET PRÉPARER L'ENSEIGNEMENT DE LA  
 GEOMETRIE EN FIN DE 1<sup>ER</sup> CYCLE

PAR R. CREPIN (I.R.E.M. DE LIMOGES)

Rappelons les termes du programme de l'école élémentaire du 2 janvier  
 1970 :

*Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques*

- au cours élémentaire : tracés, découpages, pliages. Cube, carré, rectangle, triangle. Quadrillages.
- au cours moyen : bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle, disque, cercle, pavé (parallélépipède)

*Exercices pratiques de mesure et de repérage*

- au cours élémentaire : usage de la règle graduée, de la balance, du calendrier. Lecture de l'heure
- au cours moyen : longueur, aire, volume, temps, masse. Expression d'un résultat avec une unité convenablement choisie. Ordre de grandeur. Encadrement.

Nous basant sur les commentaires qui accompagnent ces programmes, sans préjuger de l'habileté des enfants, sans considérer comme acquis tout ce qui vient d'être énoncé, en classe de 6<sup>ème</sup> on consolide les acquis et en classe de 5<sup>ème</sup> on les organise pour préparer l'enseignement des classes de 4<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup>.

Dans les classes, on essaie d'intégrer le plus possible algèbre, arithmétique, géométrie, nombre et plan, droite, espace, de façon à montrer aux enfants que le raisonnement est le même, que l'on s'intéresse à l'une ou l'autre des branches de la mathématique. L'enseignement de la géométrie est une activité d'éveil qui doit rendre actif l'enfant en classe comme hors de la classe. En classe, des activités remplacent heureusement les définitions et axiomes pour éviter l'enseignement dogmatique. Les enfants de 6<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> pourront raisonner sur des objets qui leurs sont familiers : les nombres et les tracés.

La méthode utilisée est un procédé cyclique, selon trois niveaux formulés pour l'expérience OPC par l'équipe Régis Gras de Rennes (en activité d'éveil à l'école élémentaire on parle de méthode spiralaire) :

- . Niveau I : : partir des réalités, observer, manipuler
- . Niveau II : : faire traduire par des représentations, calculer, construire
- . Niveau III : : mathématiser et déduire dans le modèle
- . Niveau I' : : retour aux réalités pour appliquer et mieux maîtriser l'observation et la manipulation.

Dans toutes les expérimentations conduites à Limoges depuis 1965, c'est ce procédé cyclique qui est la trame pédagogique pour l'enseignement ma-

thématique. Il permet aux élèves moyens d'apprendre à organiser leur pensée, de mieux comprendre le fait mathématique dans toute sa généralité et de savoir mieux quand et comment utiliser l'outil mathématique.

A titre d'exemple et très schématiquement :

- Niveau I : A l'école élémentaire, le cahier quadrillé sur lequel on écrit est une réalité quotidienne. Les instruments, règle et crayon aussi.
- Niveau II : On trace des traits sur ce quadrillage,
  - a) en suivant les lignes du quadrillage pour séparer les écrits de la journée
  - b) en joignant des points du quadrillage. Deux points sont reliés par un chemin sur quadrillage (deux carreaux à droite et un vers le haut). Reconnaître d'autres points alignés, vérifier par le tracé.
  - c) graduer le quadrillage. Liaison entre calcul et tracé des points alignés.
- Niveau III : découverte de la liaison proportionnalité et droite sur quadrillage. La proportionnalité est une aide précieuse pour faire comprendre l'aspect illimité de la droite.
- Niveau I' : Observons et envisageons le parallélisme. Le quadrillage est fait de droites parallèles. Peut-on tracer d'autres parallèles ? Recherchons la loi qui permet la construction.
- Niveau II' : La règle, "8 carreaux à droite et 4 vers le haut" permet d'associer les points du quadrillage deux par deux (point de départ, point d'arrivée). La règle et le crayon permettent de tracer des parallèles. Remarquons que les deux points (départ et arrivée) sont les extrémités de l'hypoténuse d'un triangle rectangle. On peut en déduire l'usage de l'équerre pour tracer des parallèles
- Niveau III' : Les modèles mathématiques aperçus :
  - . La notion de direction de droites dans un quadrillage.
  - . La notion de direction de droites dans un plan.
- Niveaux I"1 : observation de l'utilisation de la règle et l'équerre.
  - II"1 : ouverture vers le dessin industriel en technologie en 4ème.
  - III"1 : modèles mathématiques utiles à la technologie.
- Niveaux I"2 : observation d'objets semblant contenir des parallèles (cube, pavé). Observation des dessins liés à des tracés de droites parallèles n'ayant pas même direction.
  - II"2 : tracés sur quadrillage de parallélogrammes.
  - III"2 : mathématiser et déduire dans :
    - . les modèles du parallélogramme.
    - . La découverte de plusieurs parallélogrammes, tracés sur quadrillage en utilisant deux directions non parallèles. Découverte de translation, homothétie qui amorcera un nouveau cycle avec usage du translateur et du pantographe dans le plan.
- Niveaux I"3 : observation de bipoints équipollents sur quadrillage répété.
  - II"3 : calculer et construire.
  - III"3 : généralisation. Plan vectoriel. Exercices de déduction. On retrouvera ici l'usage du translateur et du pantographe.

Cette richesse des quadrillages alliée à l'usage des instruments (règle, équerre) ne nécessite pas la présence de l'étude de l'orthogonalité ou l'étude de la distance mathématique en 4ème. L'angle droit est connu par l'usage de l'équerre et la distance par la règle graduée qui permet les constructions.

A la fin de la 5ème on sait tracer des parallèles, des perpendiculaires. On sait reconnaître des parallélogrammes, carrés, rectangles, triangles, parce qu'on sait les construire avec les instruments et que l'on sait utiliser toutes les remarques faites au cours de l'observation des objets qui nous entourent.

Le travail sur fiche qui est pratiqué dans toutes les classes de la 6ème à la 3ème demande aux élèves d'être sans cesse en activité, chacun selon son rythme et ses aptitudes. Le professeur qui enseigne souvent une autre discipline (travail manuel ; musique ; éducation physique ; technologie ...) connaît les orientations vers lesquelles il doit diriger le soutien qu'il donne. Par leur concision, les fiches ne peuvent pas être dogmatiques, elles ne sont pas un enseignement programmé, elles servent de support à un enseignement gradué adapté à chaque enfant. Le travail du professeur est très important aussi bien dans sa formation personnelle pour la préparation des fiches, que pour l'animation de la classe. Les professeurs apprécient les réunions de concertation et le travail d'équipe qui débouchent sur la réalisation des fiches. Le savoir des élèves est construit, il n'y a pas d'apprentissage sans compréhension. La méthode est bénéfique pour l'élève moyen ou faible. Cette affirmation est souvent portée par des professeurs qui ont enseigné les programmes d'avant 1968 d'une manière plus dogmatique et qui avaient constaté un blocage de beaucoup d'élèves avec la géométrie de 5ème.

## DIALOGUE IMAGINAIRE AVEC UN AUTEUR IMAGINAIRE DE LIVRE DE 4ÈME

par R. BARRA (Poitiers - Vienne)

où l'humour n'empêche pas la fureur

- Animateur d'IREM, j'ai dû lire votre livre - je commençai avec plaisir : voilà enfin un livre que j'allais pouvoir comprendre.
- *Et vous avez compris ?*
- Je ne peux pas dire encore, je ne l'ai relu que trois fois - d'abord, la géométrie me paraît laide : les segments n'ont plus de longueur, les quadrilatères n'ont plus de côtés, le triangle n'a plus de hauteurs, plus de bissectrices,...
- *Mais la Vénus de Milo n'a plus de bras - et pourtant elle est belle !*
- On le dit ; mais pas au point de lui baiser les mains.
- *Mais enfin soyez sérieux ! une Longueur qu'est-ce que c'était ? Et l'angle droit ? A part qu'il bout à 90°, qu'en savait-on ? Et les triangles égaux, hain ? Tandis que dans mon livre tout est parfaitement défini, sainement construit, etc... réalisez la préface. N'est-ce pas mieux ainsi ?*
- Mais vos lecteurs sont des enfants ! pas encore pubères, pas...
- *Je vous en prie, ne sacrifiez pas à la mode, ne mettez pas le sexe là dedans.*
- Mettons le où vous voulez alors ! Mais je vous le demande : avez-vous pensé que vos lecteurs avaient 13 ans ? Car vous avez de ces mots - un tout seul passe encore, mais mis à la file les uns des autres...
- *Ne vous inquiétez pas, "ça passe".*  
(un misérable enseignant de 4ème, qui croisait par là :
- Oh pour passer, ça passe - ça passe même largement - largement au-dessus...)  
*Non seulement ça passe, mais je montre ce qu'est une théorie mathématique : comment en partant d'une situation physique, on construit un modèle mathématique qui la décrit convenablement.*
- (j'appelle un enfant de 10 ans :  
Petit voilà un trait entre 2 points A et B - on les affecte chacun du coefficient 1, place le barycentre -(Il est prêt à pleurer) alors : 1 franc pour toi si tu marques le milieu - son visage s'éclaire et j'ai perdu 1 franc (remboursé depuis par le Rectorat au titre de l'expérimentation fondamentale dans les IREM)).
- Je ne sais pas encore si j'ai compris votre cours mais ce qui me rassure c'est que je crois savoir faire les exercices, vos exercices de géométrie sont en fait des exercices d'algèbre.
- *Mais c'est normal ! Que voulez-vous que j'invente ! Il faudra vous y faire : votre géométrie n'existe plus, il faut vivre avec son temps, pourquoi la regretter ?*
- En tant que théorie, je ne la regrette pas, il y a mieux, mais comme élément de formation l'a-t-on remplacée ? Car elle nous apprenait l'art du bricolage ; et bricoler est nécessaire pour tous, aussi bien au futur matheux qu'au futur manoeuvre. Parfois pour résoudre, il fallait abaisser une perpendiculaire : quelle initiative déjà - tatonner, explorer pour les lieux géométriques...
- *En somme, soyez franc, vous voudriez refaire de la bonne vieille géométrie ?*
- Que non, mais entre un formalisme un peu desséchant et le bricolage d'antan, j'espère qu'il y a la place pour un juste barycentre.
- *Pardon ?*
- Un juste milieu, je voulais dire.

## L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PUBLIC

par Jacques TERMEAU

(Collège Agricole de Chambray Lès Tours - Indre et Loire)

L'enseignement agricole, mal connu des autres ordres d'enseignement, rencontre lui aussi de nombreux problèmes. L'auteur en décrit la structure, et aussi l'isolement.

- Les cycles de l'enseignement agricole public

Dans l'enseignement agricole public on distingue : le cycle court, le cycle long, et l'enseignement supérieur.

1 - Le cycle court

(en collèges, en Centre de Formation Professionnelle Agricole (CFPA), parfois en lycées) prépare au CAPA (CAP agricole) ou au BEPA (BEP agricole) ; les élèves viennent alors à l'enseignement agricole soit après la 5<sup>è</sup>, soit après la 3<sup>è</sup>. L'entrée en collège agricole après la 5<sup>è</sup> devient rare.

2 - Le cycle long (en lycées)

prépare au BTAO (Brevet de Technicien Agricole à Options) au BTAG (Brevet de Technicien Agricole Général) au BAC agricole, au BTS (Brevet de Technicien Supérieur). Les élèves viennent alors à l'enseignement après la 3<sup>è</sup> et "font" une classe de seconde au lycée agricole.

3 - L'enseignement supérieur

peut préparer au BTS ou plus généralement dispense un enseignement d'école supérieure : ingénieurs, vétérinaires...etc...

Le parent pauvre est le plus souvent le cycle court très convoité par les enseignements privés soutenus par une grande partie de la profession et son environnement politique.

Dans certaines options très demandées (garde chasse, sylviculture) le niveau de recrutement est bon, pour les options peu demandées, il est parfois très faible.

- Qui enseigne les mathématiques ?1 - Les personnels formés par le Ministère de l'Agriculture

Le Ministère de l'Agriculture a formé des professeurs de Collège Agricole (PCA) à l'Ecole Nationale Féminine d'Agronomie (ENFA) de Toulouse. Un PCA a les mêmes indices et un statut très proche de celui d'un PEG de CET.

2 - Les personnels venant de l'Education Nationale

a) quelques instituteurs, certains ayant fait de l'enseignement post-scolaire agricole, ou ménager agricole ;

b) des PEGC, certains de ces personnels sont détachés, d'autres se sont faits intégrer PCA ;

c) des maîtres auxiliaires.

En cycle long l'enseignement des mathématiques est assuré presque exclusivement par des détachés de l'Education Nationale.

- L'enseignement des mathématiques modernes

Il s'est mis en place en 4<sup>è</sup>, en même temps qu'à l'Education Nationale. Le Ministère de l'Agriculture a assuré le recyclage des maîtres pour le cycle court de la façon suivante :

1 - Pendant 2 ans : 70-71 et 71-72 presque tous les personnels concernés ont fait 3 stages de 2 jours à l'ENFA de Toulouse.

2 - Ensuite pendant 3 ans, l'ENFA a formé des animateurs pris parmi les professeurs de collège agricole qui ont, en réunions de 2 jours, recyclé leurs collègues PCA ; en 74-75, un stage a été supprimé "faute de crédits".

Personne n'a bénéficié de décharge horaire ni d'heures supplémentaires, ce qui rendait certaines tâches très difficiles, voire impossibles.

Des décharges indispensables ont été réclamées par les animateurs eux-mêmes l'an dernier ; cette année aucun stage n'est actuellement programmé.

Le programme de cycle court a été élaboré par une équipe de l'Ecole Nationale Féminine d'Agronomie de Toulouse qui a consulté tous les "professeurs de Mathématiques" et leurs collègues (en matières techniques surtout).

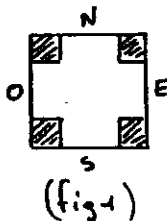
- Et maintenant ?

La fin, possible des stages nuira à l'enseignement. Par département il n'y a que deux ou trois professeurs ; dans les collèges ou les centres de formation le professeur est seul, parfois à 50 km ou 100 km d'un collègue enseignant dans la même option.

Chaque professeur a reçu un minimum de formation, il reste beaucoup à faire ; faute de moyens chacun devra se défendre presque seul.

DANS UN CLUB MATHÉMATIQUE

UN JEU : CIRCUITS PAIRS - IMPAIRS

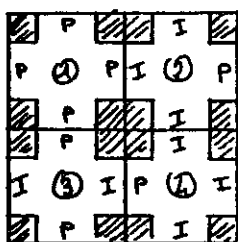


par Jean FROMENTIN (Niort - Deux Sèvres)

ce jeu s'adresse à tous les niveaux, à des degrés différents bien entendu.

- Présentation

Le jeu se compose d'un certain nombre de carrés appelés "carrefours". (fig. 1) Chaque "carrefour" possède 4 issues (une sur chaque côté du carré) chacune pouvant être paire ou impaire.  
(P) (I)



La figure 2 montre quatre carrefours différents. Les carrefours sont considérés comme "orientés" ; (par exemple : Nord, Sud, Est, Ouest (fig. 1) ). C'est ainsi que les carrefours ② et ④ sont différents.

Première recherche : combien peut-on former ainsi de carrefours différents ? Et quels sont-ils ?

On considère maintenant le passage entre deux carrefours adjacents. Ce passage peut être pair ou impair :

- pair dans les cas suivants :  $P|P$  ;  $I|I$  ;  $\frac{P}{P}$  ;  $\frac{I}{I}$
- impair dans les cas suivants :  $P|I$  ;  $I|P$  ;  $\frac{P}{I}$  ;  $\frac{I}{P}$ .

La nature d'un passage est donc soumise à la règle bien connue de parité : Ainsi, sur la figure 2, les passages ①↔② et ③↔④ sont impairs ; les passages ①↔③ et ②↔④ sont pairs.

- Principes du jeu

Vous avez trouvé, je suppose, qu'il existe 16 carrefours différents. (Suivant leur niveau, les élèves peuvent découvrir plusieurs méthodes de dénombrement). On peut donc disposer ces carrefours suivant un rectangle de 2x8 ou un carré 4x4. On suppose que ce rectangle ou ce carré sont les développements de tores. Un exemple de tore est donné par une chambre à air de roue de voiture ; ou par une cigarette dont on a fait se rejoindre les deux bouts ; le développement de ce tore serait donc le rectangle formé par la feuille de cigarette dépliée. La figure 3 montre le passage d'un tore (dont on n'a représenté que la moitié), au carré.

On suppose donc sur le carré (fig. 3c) ou sur le rectangle, l'existence des passages AA', BB', CC', ... GG', HH'.

- Problèmes de passages

Problème 1 :

- Peut-on disposer les carrefours suivant un carré de 4 x 4 (développement d'un tore) pour que tous les passages soient pairs (resp. impairs) ?

- Existe-t-il une méthode simple donnant un certain nombre de solutions ?

Attention : deux solutions apparemment différentes sur le carré peuvent donner la même solution sur le tore. Nous dirons que, sur le carré, ces deux solutions sont équivalentes.

- Peut-on trouver une méthode permettant de dénombrer toutes les solutions à ce problème ?

Problème 2 :

Analogue au problème 1 mais cette fois pour le rectangle de 2 x 8.



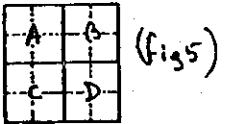
(fig 4)

Problème 3 :

Peut-on trouver une solution au problème 2 telle que en superposant les parties A et B (fig. 4) on obtienne une solution au problème 1 ? méthode de recherche ?

Problème 4 :

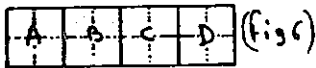
Peut-on trouver une solution au problème 1 (fig. 5) et au problème 2 (fig. 6) telle qu'on puisse interchanger deux quelconques des quatre parties A, B, C et D ?



(fig 5)

Problème 5 :

Existe-t-il des solutions simples aux problèmes 1 et 2 telles qu'on puisse passer facilement d'une situation paire (passages pairs) à une situation impaire (passages impairs) ?



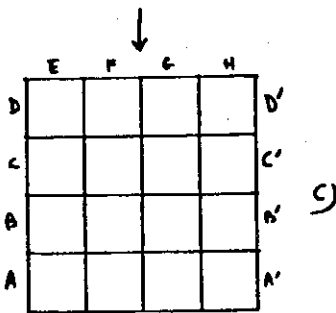
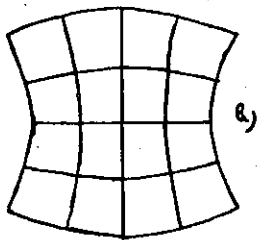
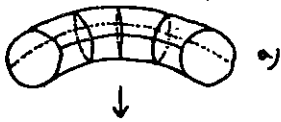
(fig 6)

Beaucoup de questions sont encore sans réponse. Je fais donc appel à votre perspicacité pour résoudre tous ces problèmes. Les idées (même à l'état embryonnaire) des uns peuvent éclairer les autres.

C'est pourquoi, vous pouvez envoyer vos idées ou solutions à l'adresse suivante :

FROMENTIN Jean  
CES Rabelais  
107, route de Coulonges  
79000 NIORT

D'ailleurs peut-être proposerez-vous d'autres problèmes ; à ce propos, nous pourrions parler une prochaine fois de "circuits". Mais vous pouvez déjà y réfléchir.



(fig 3)

## VIE DES RÉGIONALES : ORLÉANS - TOURS

COMPTE RENDU DE LA REUNION DU COMITE DE  
LA REGIONALE DE L'A.P.M. (Orléans le 14 mars 1976)

par Jean René LICOIS (Tours)

Cette réunion était surtout destinée à faire le point sur les activités des départementales depuis l'Assemblée Générale de VIERZON. La séance a débuté sur un compte rendu des 2 réunions organisées par l'A.P.M. : à Tours le 18 février sur "liaisons 3ème - CET (niveau BEP) et à Orléans le 24 février sur "liaisons 3ème - 2nde".

Ces diverses réunions n'ont finalement pas tenu toutes les promesses qu'on attendait d'elles : ce sont toujours les mêmes griefs qui sont faits par les professeurs de niveau (n+1) aux élèves (ou aux professeurs) de niveau n : "ils ne savent plus calculer" ; "ils ne savent plus raisonner". En général, ces difficultés ne sont pas inhérentes aux nouveaux programmes mais au manque de temps dont on dispose pour traiter les exercices d'application. En outre, ces réunions ne devraient pas être l'occasion pour les professeurs de niveau (n+1) d'indiquer ce qu'ils souhaitent voir traiter au niveau n ; mais un moyen de prendre conscience des possibilités des élèves. Le comité a fait le point sur les réunions organisées par les chefs d'établissement (suite à la lettre rectorale sur les liaisons 3ème - 2nde) : apparemment très peu ont été mises sur pied. Le comité suggère de susciter de telles réunions où l'A.P.M. serait invitée à qualité.

Il a été envisagé que l'A.P.M. prenne contact avec les associations de parents d'élèves en vue d'améliorer notre image de marque. Par exemple : convaincre les gens que les "maths modernes" ne sont pas si mauvaises que cela, que le rôle sélectif joué par les mathématiques n'est pas de notre fait et au besoin les mettre en garde vis à vis de la réforme Haby. La proposition a été, finalement, retenue.

Ensuite on aborda le problème du test normalisé de 5ème au niveau de l'Académie : quelle position l'A.P.M. doit-elle prendre vis à vis de cette initiative ? Après une longue discussion, la question paraissant trop vaste le comité a décidé de faire des recherches approfondies sur le contenu des tests de 5ème (ou de 3ème voire de CM2), ce qu'ils prétendent mesurer, et principalement leur utilisation lors de l'orientation.

On peut néanmoins se poser la question : ne vaut-il pas mieux offrir plus de places en CET que renforcer la sélection à l'entrée ?

L'après-midi commença avec le pointage des rentrées des cotisations régionales : il ne semble pas y avoir de problèmes.

Il fut ensuite question du P.L.O.T., c'est-à-dire du bulletin commun aux 3 régionales de Poitiers, Limoges, Orléans-Tours. La parution sera trimestrielle et la distribution assurée par les délégués régionaux (à Orléans-Tours) ; les isolés le recevront directement par la poste. Dans chaque numéro quelques pages seront réservées aux activités propres de chaque régionale, mais il serait souhaitable que les lecteurs publient des articles, en particulier des comptes rendus de leurs activités dans les classes.

Il est rappelé que désormais les régionales ne "vivent" que grâce aux bénéfices réalisés sur la vente des brochures A.P.M. : chacun se doit donc de faire le maximum de publicité autour des brochures qui lui paraissent présenter de l'intérêt !

Avant de se séparer le comité a désigné les participants au Séminaire organisé par le Bureau National à Chamorlles (Loiret) les 24 et 25 avril pour définir une politique vis à vis de la réforme Haby.

## BUREAUX ET COMITÉS DES RÉGIONALES

L'abonnement annuel au plus bulletin des régionales APMEP de POITIERS, LIMOGES et ORLÉANS-TOURS est de 10 F pour tous les membres de l'APMEP.

Le règlement s'effectue auprès des régionales :

C.C.P. POITIERS : BORDEAUX 3852-89  
LIMOGES : LIMOGES 117-66 P  
ORLÉANS-TOURS: LA SOURCE 1440-09 X

**POITIERS** : Siège Social : CRDP 6, rue Sainte Catherine 86034 - POITIERS CÉDEX

Président : E. DEHAME (tél) 41.30.82) 8, impasse du Lavoir 86000 - POITIERS

Secrétaire : D. PORTÉ (tél 41.52.88) 13, rue Arsène Orliard 86000 - POITIERS

Trésorier : E. PARPAY (tél 24.31.70) 22, rue Rougier 79000 - NIORT

Adjoint : Mme CARTRON 1, impasse des Feuilles 79000 - NIORT

Élémentaire : J. BACON (44.52.03) Thurageau 86110 - MIREBEAU

B. NEAU (31.71.60) 15, rue de la Croix 86440 - MIGNÉ-AUXANCES

Premier cycle : M. PUYGRENIER (536) La Foëe 86500 - MONTMORILLON

Second cycle : Mlle Y. DARDANT (53.27.48) 25, rue Philippe Vincent 17000 - LA ROCHELLE

Technique : J.L. SIRIEIX (41.95.36) La Chabotterie 86800 - MIGNALOUX-BEAUVOIR

Agricole : Mme ELIARD Lycée agricole de l'Oisellerie 16400 - LA COURONNE

Post-baccalauréat : R. BARRA (21.52.26) 58, rue Boyterve 86100 - CHATELLERAULT

Formation des Maîtres : Mme C. BLOCH (41.40.74) 138, rue de la Mergotte 86000 - POITIERS

Formation permanente des adultes : J. TOUILLET Résidence du 114e 79200 - PARTHENAY

**LIMOGES** : Secrétariat : IREM 123, rue A. Thomas 87100 - LIMOGES

Président : FREDON 40, rue Regnard 87100 - LIMOGES (Tél : 79.34.02)

Vice-présidents : BOUTEILLER 7 bis, avenue du Président Roosevelt 19100 - BRIVE

CREPIN 94, Avenue Locarno 8700 - LIMOGES

Mme MEIGNAL 41, rue A. Grand 23000 - GUÉRET

Secrétaire : CATHALIFAUD 20, allée Villagory 87000 - LIMOGES

Trésorier : BATIER Lotissement d'Arthuret 87700 - AIXE SUR VIENNE

Membres : Mme BEULQUE (2ème cycle) 24, rue Fresnel 87000 - LIMOGES

Mme CHUSTE (1er cycle) 10, rue Malledent de Savignac 87100 - LIMOGES

M. CHUSTE (technique)

M. EZQUERRA (enseignement supérieur) La Roche 87420 - ST YRIEIX SOUS AIXE

Mme FONDANECHÉ (enseignement élémentaire) 96, avenue Baudin 87000 - LIMOGES

M. REYNET 20, rue Goy de Maupassant 87100 - LIMOGES

Mme ROUGIER (Ecoles Normales) 35, avenue de la Vienne 87170 - ISLE

M. ROUGIER (classes préparatoires, liaison avec l'IREM, avec les autres disciplines)

Membres de la Régionale au Comité National : CRÉPIN - REYNET

**ORLÉANS - TOURS** : Siège Social : CRDP 55, rue Notre Dame de Recouvrance 45000 - ORLÉANS

Toute correspondance à adresser à : A. ROUCHIER Département de Mathématiques Université d'ORLÉANS 45045 - ORLÉANS CÉDEX

Président : P. MONSELLIER (Lycée Franklin-Orléans) Les Tourelles - Marcilly en Vilette 45240 - LA FERTÉ SAINT AUBIN  
Tél : (38) 65.11.77

Trésorier : R. GARNIER (Lycée Franklin-Orléans) 31, rue Robert Desnos 45800 - SAINT JEAN DE BRAYE

Secrétaire : Mlle M. GODICHEAU (Lycée Grandmont-Tours) 14, rue L. de Vinci 37170 CHAMBRAY LES TOURS Tél : 28.22.32

M. J.R. LICOIS (Lycée Baisac-Tours) 38, place Rabelais 37000 - TOURS Tél : (47) 61.19.36

M. R. METREGISTE (CES Argonne-Orléans) 22, rue G. Lacombe 45400 - FLEURY LES AUBRAIS Tél : 62.05.29

Délégués locaux :

BOURGES : E. VRAIN 36, avenue de Dun 18000 - BOURGES

VIERZON : A. PALAT 6, rue du Croc à Foulon 18100 - VIERZON

ST AMAND : G. RAY 34, rue des Buissonnets 18200 - SAINT AMAND MONTROND

CHARTRES : G. ARNOUX 9, rue du 102e RI app. 46 28000 - CHARTRES

DREUX : J. PINAUD Le coq Fleuri-Fermaincourt 28500 - VERNOUILLET

NOGENT LE ROTROU : J.C. CITTERIO, place de la Halle 36400 - LA CHATRE

BLOIS : A. AUTEBERT 7, rue du Béarn 41000 - BLOIS

ROMORANTIN : P. LEGAI 29, rue F. ter 41200 - ROMORANTIN

VENDOME : D. BECANE 72 ter, rue du Cdt Verrier 41100 - VENDOME

BOURGUEIL : E. DURAN «Les Galuchez» 37140 - BOURGUEIL

LOCHES : G. BRAJARD 40, rue Baisac 37600 - LOCHES

TOURS-CHINON : M. GODICHEAU 14, rue Léonard de Vinci 37170 - CHAMBRAY LES TOURS

GIEN : Y. LORANS Chemin de la Crépinière ARRABLOY 45500 - GIEN

MONTARGIS : M. KISTER 52, rue des Vignes 45120 - CHALETTE S/LOING

ORLÉANS-Lycées : J. AUGRAS 3, rue des Chaffaults 45380 - LA CHAPELLE ST.MESMIN

ORLÉANS-CES : J. GEHENDGES 85, allée de la Petite Cerise 45160 - OLIVET

PITHIVIERS : D. NAUDET Dimancheville 45390 - PUISEUX

