plot

BULLETIN DES REGIONALES A.P.M.E.P.
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

1982 est une année anniversaire à double titre. D'une part c'est en 1882, il y a cent ans, que CLF LINDEMANN démontra la transcendance de π. D'autre part, le 31 Mai, nous fêtons le 150è anniversaire de la mort d'Evariste GALOIS. Vous verrez que, dans les pages qui suivent, le PLOT célèbre, à sa manière, ces deux anniversaires.

Le premier numéro du SUPPLEMENT du PLOT est paru. Les abonnés à ce Supplément vont le recevoir incessamment et, à partir de ce moment.... ils ne pourront plus s'en passer. A vos élastiques !

Quant à ceux qui ne se sont pas encore abonnés au Supplément nous ne dirons qu'une chose : ils ont tort ! Ils peuvent d'ailleurs toujours s'abonner et rejoindre la troupe pacifique des "géomètres à élastiques".

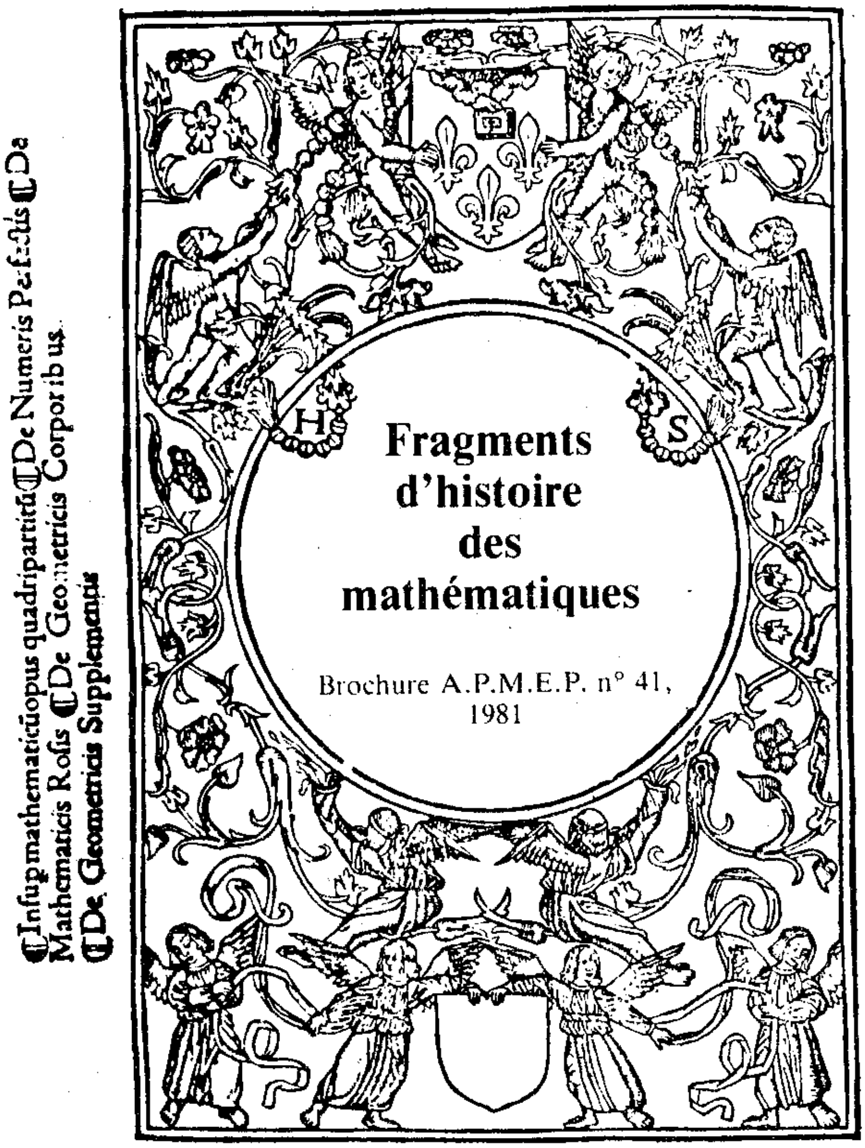
Le prochain numéro du PLOT vous joindra à la rentrée scolaire. Bonnes vacances à tous d'ici là.

La rédaction du PLOT.

Adresse du journal : IREM. Université. 45046 Orléans Cedex .... Directeur de Publication : Pascal Monsellier .... Numéro de Commission Paritaire : 63181 Imprimé par le Centre Régional de Documentation Pédagogique; 55, rue Notre-Dame de Recouvrance - 45000 Orléans .... Equipe d'animation : Jacques Borowczyk, Roger Crépin, Pascal Monsellier ....

Dépot légal : 2è trimestre 1982

A commander à votre Régionale (Voir les adresses en dernière page).



SOMMAIRE

46,50 F avec port - 39 F sans port

plot

BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

Sommaire du n° 19

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

ADHERENTS DE L'APM !

Commandez ces brochures à votre Régionale, dont c'est une des seules ressources.
(Voir les adresses en dernière page).

Numéro de collection	Titre	Prix en francs port compris (1/12/1981)
8	Mots I, 1974, 100 p.	15
9	Elem-Math I, 1975, 56 p.	6
10	Carrés magiques par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p.	6
11	Mots II, 1975, 108 p.	15
12	Substitutions et groupe symétrique par J. Dautrevaux.	Epuisé
13	Mathématique pour la formation d'adultes (CUEEP) par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p.	22,50
14	A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2e édition, 1976, 220 p.	22,50
15	Mots III, 1976, 136 p.	17
16	Elem-Math II, 1976, 56 p.	8,50
17	Hasardons-nous, 1976, 220 p.	32,50
19	**Elem-Math III, La division à l'école élémentaire**, 1977, 100 p.	15
20	**Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques**, 1977, 280 p.	32,50
21	**Géométrie au premier cycle, tome 1**, 1977, 208 p.	32,50
22	**Géométrie au premier cycle, tome 2**, 1978, 328 p.	37,50
23	**Pavés et bulles** par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.	32,50
24	**Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM)**, 1978, 120 p.	25
25	**Mots IV**, 1978, 152 p.	17
26	**Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire**, 1978, 64 p.	14
27	**Pour une mathématique vivante en Seconde**, 1979, 128 p.	20
D1	**La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, dictionnaire de l'A.P.M.E.P.** 1962-1979, 113 notices, 211 fiches	67
28	**Analyse des données, tome 1**, 1980, 248 p.	37,50
29	**Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaires**, 1979, 192 p.	25,50
30	**Les manuels scolaires de mathématiques**, 1979, 280 p.	37,50
31	**Calculatrices 4 opérations (Elémentaire et premier cycle)**, 1979, 176 p.	20
32	**Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978** dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen [Bulletin 314]	2
33	**Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 1**, 1979, 248 p.	32,50
34	**Recherche inter-IREM, 1973-78, en géométrie de Quatrième-Troisième, dite "O.P.C." : réflexion critique et évaluation**, 1979, 160 p.	Epuisé
35	**Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes**, 1979, 104 p.	25
36	**Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Elémentaire**, 1980, 64 p.	11,50
37	**Mots V**, 1980, 114 p.	19
38	**Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2**, 1981, 140 p.	32
39	**Le renouveau de l'enseignement français des mathématiques**, 1980, 152 p. (brochure publicitaire réservée aux Congrès de Mexico et de Berkeley, 1980)	
40	**Analyse des données, tome 2**, 1980, 296 p.	40,50
41	**Fragments d'histoire des mathématiques**, 1981, 176 p.	46,50
42	**"Mini-grille" d'analyse des manuels scolaires de mathématiques**, 1981, 56 p.	17,50
43	**Mathématique active en Seconde**, 1981, 220 p. environ	45,50

Informatique & Education

Marcel DUMONT - Rouen

Une machine n'étant pas douée d'affectivité, pourquoi ne pas réserver aux ordinateurs les tâches d'apprentissage et ne pas profiter du rapport enseignant-enseigné pour se consacrer à l'essentiel : apprendre à vivre ensemble ?

La naissance du phénomène "informatique" au cours des trente dernières années placera sans doute notre époque à l'un des tournants de l'histoire des civilisations, à l'égal de ce que fut la naissance de l'imprimerie ou celle du machinisme. Il est vrai que chaque génération, par une tendance naturelle à l'égocentrisme, considère son époque comme toujours la plus importante. Pourtant, il s'agit cette fois d'une véritable révolution lente et inexorable dans les esprits, fulgurante dans sa technologie et la diversification de ses possibilités. On commence à peine à entrevoir son impact sur la vie des hommes, sur l'environnement, mais on ne soupçonne guère les retombées à long terme sur les cultures, les systèmes d'éducation, bref tout ce qui fait le comportement de l'humanité.

De quoi s'agit-il ? Le mot "informatique" est né en France en 1962 pour caractériser "le traitement automatique des informations". L'Académie française a accepté le terme en 1966 avec la définition suivante :
"Science du traitement rationnel, notamment "par machines automatiques, de l'information "considérée comme le support des connaissan- "ces humaines et des communications dans les "domaines techniques, économiques et sociaux". Mais la science des calculateurs ou "ordinateurs" avec toutes ses recherches et sa technologie est née depuis un peu plus de trente ans et s'est développée essentiellement aux Etats-Unis, ce qui explique la position dominante du matériel et du vocabulaire anglo-saxon dans ce domaine (1). La science du traitement "automatique" des informations serait absolument sans objet si elle ne disposait pas à cet effet du matériel ad hoc, c'est à dire des calculateurs.

Ces matériels furent conçus à l'origine pour traiter des données numériques, c'est à dire calculer. Mais l'évolution rapide de la technologie, due essentiellement aux progrès spectaculaires de l'électronique, apparition des semi-conducteurs, transistors, circuits intégrés entre autres, différents types de mémoire etc, en réduisant la taille des engins tout en augmentant les possibilités a élargi considérablement le champ d'utilisation. En effet, à partir du moment où pouvaient être traitées des données non numériques (rechercher, comparer, trier, classer, choisir, etc) les calculateurs furent affectés à de multiples tâches : en priorité celles qui nécessitent des prises de décision rapides (contrôle d'un engin sur sa trajectoire, ou d'une machine-outil au cours d'un travail), celles qui nécessitent le traitement d'un volume important de données (gestion d'entreprises, fichiers) ou encore celles qui nécessitent des successions de choix à faire dans des réseaux relationnels complexes (stratégies dans les jeux, traductions automatiques, etc). Et nous n'en sommes qu'aux tous premiers pas ! Songeons par exemple aux retombées concernant les langages et moyens de communication entre aveugles et sourds-muets ou encore la surveillance médicale !

Dans ces nouvelles branches de l'économie on assiste, comme partout, à l'opposition entre deux tendances :
- d'abord une tendance à la capitalisation à outrance, justifiée au début, à cause de la taille des engins et de leur prix prohibitif, réseaux d'ordinateurs connectés entre eux à l'échelle nationale puis internationale...
- puis, depuis quelques années, une tendance à l'individualisation avec l'apparition sur le marché de mini puis de micro calculateurs à des prix réduits, parfois livrés en Kits à monter soi-même. Actuellement, c'est sans doute l'un des rares domaines où les prix s'effondreraient s'ils n'étaient compensés par de nouveaux perfectionnements.

C'est aussi l'un des nombreux domaines où l'école a laissé s'accroître le fossé entre les connaissances qu'elle dispense goutte à goutte et les connaissances que l'homme de la rue acquiert dans les magasins, les catalogues, les revues et journaux, etc (Il est vrai qu'en France ces derniers ne fourmillent guère d'informations techniques et scientifiques !).

Il ne semble pas que l'apparition des ordinateurs ait, à quelques exceptions près (par exemple S. Papert au MIT à Boston) changé la conception habituelle de l'éducation et de l'enseignement. Il est plus facile de transformer les méthodes et les moyens que d'imaginer un changement radical des objectifs surtout lorsque ceux-ci ne paraissent pas être liés à la réforme.

L'ENSEIGNEMENT ASSISTE PAR ORDINATEUR

La plupart des travaux et publications ayant trait à l'enseignement mettent l'accent sur "l'assistance par ordinateur". En effet, les problèmes de l'enseignement actuel peuvent être schématisés et réduits entre autres aux aspects suivants :

1) La diversité des élèves : il n'y a pas deux individus rigoureusement semblables, tant sur le plan des expériences antérieures liées à l'environnement, expériences accumulées en mémoire grâce aux perceptions, images et sons, sur le plan des motivations qui sont d'ordre affectif, liées à la sensibilité et à l'état psychologique de l'individu, que sur le plan de la rapidité des initiatives, des prises de conscience ou des démarches motrices ou mentales, rapidité qui est liée à l'état physiologique.

2) Les difficultés de communications, liées d'une part aux effectifs (peu de maîtres, beaucoup d'élèves), d'autre part à la conception traditionnelle de la classe : toutes les communications passent par l'intermédiaire de l'enseignant qui les centralise et qui détient, choisit, diffuse l'essentiel des informations.

3) L'accumulation prodigieuse des connaissances au cours des dernières décennies qui, faute de remaniement périodique des "connaissances de base", impose des recyclages cloisonnés, des orientations et spécialisations de plus en plus précoces.

ENSEIGNEMENT PROGRAMME

On devine l'intérêt de ces machines grâce auxquelles :
- chaque individu "peut revoir et réentendre aussi souvent qu'il le désire les points du cours enregistré (2) qui lui paraissent les plus ardus et cela à l'heure de son choix sans que s'ensuive aucune perturbation du travail de ses condisciples" (Encyclopédie Universalis).
- les demandes, réponses ou hésitations de l'individu peuvent être collectées, triées, classées pour que le maître puisse contrôler l'évolution de l'apprentissage et les auteurs du cours puissent réviser, adapter, perfectionner le programme d'enseignement.

Observons à ce sujet les deux tendances signalées plus haut :
- d'abord la centralisation : citons, parmi d'autres, en Amérique du Nord, les expériences PLATO I, II, III, IV,...etc, qui connectant plusieurs Universités depuis 1964, permettent à plusieurs milliers d'étudiants de travailler individuellement sur deux ou trois cents programmes différents, et cela simultanément.
- puis accession de chaque établissement à son autonomie au fur et à mesure que la technologie évolue et permet de fabriquer des calculateurs plus petits en taille, et surtout moins chers. Citons le projet ministériel français qui permit en quelques années d'équiper une cinquantaine de lycées en mini-ordinateurs type Mitra 15 ou TE 1600. Dans diverses disciplines, les enseignants de chaque établissement élaborent leurs propres programmes d'enseignement. Les élèves travaillent alors individuellement sur une dizaine de consoles connectées à l'unité centrale.

SIMULATION

Un premier pas semble pourtant s'esquisser : c'est l'utilisation du calculateur comme simulateur de situations qui font l'objet de l'apprentissage. On voit ainsi les préoccupations des enseignants se porter peu à peu vers les contenus eux-mêmes grâce à la disparition des formes habituelles : au lieu de décrire aux élèves tel ou tel phénomène et son évolution, on peut faire "vivre" aux élèves, sinon le phénomène, du moins une simulation de celui-ci sur laquelle ils peuvent agir et observer les effets de l'action.

De même qu'on peut apprendre à piloter un avion, dans un premier temps, sur des simulateurs de vol, de même un élève peut apprendre :
- à gérer son budget en faisant varier les composantes.
- à étudier un phénomène physique dont le déroulement dépend de paramètres variables que l'élève fait varier lui-même.
- à étudier une situation démographique, faisant défiler toute une suite de générations en quelques secondes.
- à jouer aux échecs ou tout autre jeu dont diverses stratégies ont pu être programmées sur l'ordinateur qui joue le rôle d'adversaire et parfois de conseiller.
- d'une façon générale : à étudier les effets des diverses variables d'une fonction.

Il est possible également de simuler le "hasard" (mais que signifie ce mot, sinon notre impuissance à discerner, analyser, mesurer chacun des facteurs déterminant le phénomène ?) à l'aide de fonctions dites "pseudo-

---

(1) Une langue ne survit ni à cause de son passé, ni parce qu'on la défend; elle survit dans la mesure où elle véhicule des idées originales propres à améliorer le sort de l'humanité (ou son pouvoir !).

(2) Notons que parmi la bibliothèque des programmes existe naturellement celui qui apprend seul au sujet à utiliser la machine.

aléatoires", c'est à dire de fonctions périodiques dont la période est suffisamment grande pour que la liste des nombres vérifie des tests de fréquence et de distribution propres aux suites aléaroires.

De telles fonctions permettent alors une ouverture vers d'autres domaines comme la musique, les arts graphiques, etc. En effet, l l'obtention d'une foule de situations combinatoires nouvelles alimente l'imagination de l'observateur à cause de la rapidité du balayage et de la création.

Mais on est très loin d'avoit exploré toutes les utilisations possibles de la machine. Il s'agit là de portes ouvertes sur un avenir prodigieux et ... inquiétant à cause de l'utilisation inhumaine que certains pourraient en faire. Utilisation inhumaine car, comme toute machine, celles-ci sont "stupides", stupides en ce sens qu'elles n'échappent jamais aux programmes que l'homme leur a mis en mémoire. Si elles peuvent choisir, passer d'un programme à un autre, en fonction de certains critères, voire de façon aléatoire, c'est parce que l'être humain leur a mis en mémoire un "super-programme" chargé de faire gérer les choix entre d'autres programmes. Mais en aucun cas la machine ne peut élargir le contexte dans lequel elle est emprisonnée : elle ne sait qu'OBEIR et REPETER, sans aucune faute d'attention (sauf défaillance technique). Les recherches sur ce qu' on appelle "intelligence artificielle" ne doivent pas faire illusion : il s'agit essentiellement de reconnaissance de "formes", de "sons"..etc.

Nous abordons ici un aspect psychologique, qui ne semble guère avoir été étudié, si on excepte les travaux de Papert aux USA, reproduits en France depuis deux ans au CNDP. C'est cet aspect qui bouleversera vraisemblablement les conceptions et objectifs traditionnels du système d'éducation et d'enseignement, aspect que l'on peut résumer dans le dilemme pourtant banal qui suit.

EDUQUER OU ASSERVIR ?

CONSTATATIONS

Résumons grosso modo l'essentiel de ce que font les machines actuelles :
- elles peuvent charger dans leurs mémoires des données, informations de toute nature, et des programmes ou listes d'instructions avec une hiérarchisation telle que certains "programmes" permettent de chercher, choisir, traduire d'autres programmes, etc (sans compter les micro-programmes inhérents à la technologie de la machine, comme les fonctions mathématiques par exemple).
- elles exécutent fidèlement ces programmes, à la demande de l'utilisateur; sans aucune faute d'attention, aussi souvent que l'on veut, et à une vitesse prodigieuse. ⟶

Ces machines deviennent ainsi les champions du SAVOIR, du SAVOIR-FAIRE et du FAIRE.

Exemple : dans l'un de ces calculateurs de bureau avec écran graphique, introduisons une cassette, véritable bibliothèque de programmes. Démarrons l'un d'entre eux. L'écran affiche : "choisissez les coordonnées de 5 points".Choisissons 5 points au hasard. Dans les trois secondes qui suivent, on voit apparaître sur l'écran la conique -ellipse, hyperbole ou parabole- qui passe par ces 5 points, avec toutes ses caractéristiques, équations de ses axes, foyers, etc. Conclusion : note du correcteur 20/20; le calculateur candidat a toute chance d'entrer à Polytechnique... Il vaudra mieux, pourtant, ne pas lui confier de responsabilités !!!

Ces machines champions ne "comprennent" rien, ni à ce qu'elles savent, ni à ce qu'elles font. On ne leur demande d'ailleurs pas ce que signifie l'expression "comprendre"... et pour cause.

1ère constatation : Sens des initiatives

Mesurons à l'école, particulièrement dans l'enseignement des mathématiques, le temps consacré :
- à l'acquisition du savoir, du savoir-faire.
- au "faire" (au sens de mise en oeuvre du savoir-faire).
- au contrôle, à l'évaluation des deux points précédents.

Que reste-t-il pour laisser fonctionner ces "choses" que l'on connaît mal mais que l'on devine sous des mots tels que : curiosité, invention, imagination, création, sens des initiatives, ...etc.

Nous avons ainsi une idée du cycle de dressage auquel sont soumis nos élèves. Ils ne comprennent pas ? Alors expliquons mieux. Détaillons tout, minutieusement chaque geste, pas à pas. Le discours, l'explication du professeur devient un programme; chaque instruction devient si claire que la "machine" n'a plus qu'à mémoriser et à exécuter si on lui demande. L'élève "sait faire" ! L'objectif habituel de l'enseignement est donc atteint ! Et pourtant, à quel moment "l'intelligence" a-t-elle fonctionné ? Elle fonctionne quand on cherche, quand on essaie de "comprendre", quand on prend des initiatives. Elle cesse de fonctionner quand on croît avoir "compris", quand on exécute le programme, c'est à dire les consignes, quand on obéit aux ordres, quand on répète ! (Répeter l'explication qu'un autre a élaboré n'a strictement aucune signification sur l'intelligence de celui qui répète). On objectera que ces mots "intelligence", "comprendre", n'ont pas de sens précis : en effet, ils dissimulent notre ignorance mais ils révèlent aussi l'existence des différences profondes entre l'être humain et ces nouvelles machines.

Ainsi notre enseignement, trop souvent, va à l'encontre des objectifs déclarés de l'éducation : il paralyse au lieu de développer ces facultés qui distinguent l'être humain d'une "bonne machine" ! En ce sens l'enseignement programmé, tel qu'il est trop souvent conçu et dispensé par ordinateur, ne fait que renforcer le caractère d'asservissement de l'individu. Ceci explique sans doute les réticences de certains enseignants à l'égard des expériences d'utilisation des mini-ordinateurs.

2è constatation : Motivations

Dans la plupart des cas, et surtout en mathématiques, nos élèves n'ont aucune envie d'accomplir les tâches que nous leur imposons. La motivation est quasiment nulle. Ainsi les jugements scolaires portés sur eux se font à propos de travaux forcés. Comment l'etre humain peut-il mettre en oeuvre tout son potentiel à propos de tâches qui lui répugnent ? Quelle valeur ont alors nos jugements sur ce potentiel qui ne s'est pas manifesté ?

3è constatation : Curiosité, recherche, Ouverture des contextes.

On pourrait distinguer, dans l'histoire de l'humanité, deux classes d'individus :
- ceux qui résolvent plus de problèmes qu'ils n'en posent.
- ceux qui posent plus de problèmes qu'ils n'en résolvent.

A court terme, les premiers font progresser leur civilisation et rassurent leurs contemporains sur la "puissance et le savoir de l'homme". Mais à long terme ce sont les seconds qui, ramenant le savoir à une place plus modeste, évitent à cette civilisation l'asphyxie et finalement la mort. Pourtant comme, par vanité, l'être humain supporte mal l'inquiétude de son savoir, on attache dans l'enseignement beaucoup plus d'importance au premier type de comportement qu'au second. On apprend donc à résoudre des problèmes et non à en poser.

Or, pour résoudre un problème, le plus souvent, l'essentiel de l'activité consiste à élaguer le superflu, à choisir, à ne conserver que les éléments pertinents (c'est à dire "abstraire"), bref on rétrécit le contexte. Ceci explique pourquoi il est possible de programmer des calculateurs afin d'obtenir des démonstrations automatiques.

Par contre, pour "se" poser des problèmes, il faut partir à l'aventure, élargir le contexte, sortir des "ornières", toutes choses que ne peuvent faire nos "ordinateurs" actuels (il leur manque, entre autres, la possibilité d'élargir le champ des perceptions et... de prendre des initiatives).

Là encore, notre enseignement scientifique en général tend à faire jouer à l'élève le rôle de la machine au lieu de développer l'aptitude à "ouvrir les horizons" !.

LE DILEMME

L'intelligence d'un individu ne fonctionne guère ou ne fonctionne pas du tout lorsqu'il obéit et exécute fidèlement des consignes. Plus celles-ci sont claires, moins il a besoin de réfléchir. Elle a, par contre, toute chance de fonctionner lorsque c'est lui qui donne des ordres, car c'est lui qui choisit l'objectif, l'analyse, élabore une méthode, puis un langage, pour transmettre les "ordres", c'est à dire le programme, et enfin en observe les effets.

Si nous admettons cette idée, alors nous devons aussi admettre qu'une bonne éducation consisterait à apprendre aux enfants à commander au lieu de leur apprendre à obéir ! Quel bouleversement psychologique, et aussi quels dangers ! Ne serait-ce que sur le plan matériel. Aucune société ne consentira jamais à courir un tel risque !

Une solution simple : laisser les enfants libres de commandre ces machines, c'est à dire de les programmer. Ces machines ne sont dangereuses que lorsqu'elles sont connectées à une machine-outil par exemple, ou à des engins analogues. Mais lorsque les "sorties" de la machine sont connectées à un instrument de musique, à un jouet télécommandé ou à un écran graphique, quels risques peuvent courir et l'enfant, et l'adulte, et la société ? (C'est ce que fait S. Papert à Boston avec des enfants de tous âges, à partir de quatre ans). Des enfants de dix à onze ans programment librement des dessins de frises, rosaces, et apprennent plus de géométrie en quelques heures qu'en six ans d'enseignement théorique et ennuyeux.

Outre la motivation extrèmement puissante, due surtout au plaisir d'exercer son pouvoir sur une machine, on devine l'intérêt de telles expériences qui peuvent concerner autant des calculs que des problèmes combinatoires, des constructions de phrases, des poèmes, des dessins, des compositions musicales, des statistiques en tous domaines... La machine, par le biais de l'algorithmique et de l'emploi de fonctions récursives, devient ainsi le lien fondamental qui unifiera nombre de problèmes appartenant à des disciplines traditionnellement séparées.

"Apprendre à automatiser des tâches et les faire exécuter par une machine dès qu'elles sont automatisées" équivaut grosso modo à "Faire fonctionner l'intelligence pour qu'elle puisse se libérer des tâches inintelligentes".

REALISATION ET DEMOCRATISATION

Ce qui était impossible il y a dix ans à cause du coût et de la taille des engins devient peu à peu à la portée de n'importe quel établissement scolaire.

Les premiers calculateurs programmables de bureau valaient entre 20.000 et 40.000 F. il y a dix ans. Actuellement, des calculateurs programmables de poche, ayant 100 fois plus de possibilités (tant sur le plan des fonctions mathématiques que sur le plan de la logique de programmation), sont vendus à partir de 250 F.

Une unité centrale, munie d'un écran graphique de la taille d'un téléviseur, sur laquelle on peut travailler en langage BASIC (simple mais en Anglais), valait en 1977 en- →

QUI A DIT ?

" *D'où vient le mal ? Assurément ce n'est pas des professeurs de collèges; ils montrent tous un zèle fort louable; ils sont les premiers à gémir que l'on ait fait de l'enseignement des mathématiques un véritable métier.* "

ET

" *L'élève est moins occupé de s'instruire que de passer son examen.* "

Réponse page 26

viron 40.000 F, en 1978 environ 30.000 F et actuellement sont vendues des unités centrales semblables à moins de 9000 F, que l'on connecte à un téléviseur ordinaire.

Il faut s'attendre dans les prochaines années à un véritable raz de marée de ces jeux électroniques compatibles avec les téléviseurs, des maquettes mobiles, des instruments de musique etc. Il suffirait de peu de choses pour les rendre, sur le plan pédagogique, infiniment plus efficaces que les manuels et matériels traditionnels. Songeons un instant à toutes ces machines à sous qui ne développent rien, strictement rien et qui pourraient être remplacées par des matériels adaptés et tout aussi captivants.

Mais osera-t-on modifier les objectifs, ... et les habitudes ?

CONCLUSION

Les rapports entre les êtres humains, en particulier entre enseignants et enseignés, font surtout intervenir l'affectivité de chacun. Ce sont eux qui devraient mettre en valeur tout ce que recouvrent des mots comme : chaleur humaine, compréhension, tolérance, entraide...etc. En opposition, les rapports entre l'être humain et la machine se placent uniquement sur un plan logique, écartant toute sensibilité, bonne ou mauvaise humeur de l'un ou de l'autre, susceptibilité, blocages psychologiques...etc. Il serait donc raisonnable de faire jouer à ces derniers rapports le rôle essentiel dans l'éducation de la logique (au sens large), et de réserver aux premiers le rôle qu'ils n'auraient jamais dû perdre : apprendre à vivre ensemble.

Il s'agit là sans doute de vues idéalistes et simplistes. Quoi qu'il en soit, l'introduction des machines à traiter l'information dans l'enseignement bouleversera celui-ci comme elle bouleversera peut-être notre conception de l'éducation. De toute façon, la réalité toute proche attend l'enfant au coin de la rue, dans les professions, partout ... sauf à l'école. L'école, qui devrait toujours être en avance sur son temps, afin de rendre service à la masse de nos semblables, a pris un retard considérable, sur le plan de l'informatique comme sur beaucoup d'autres. Faut-il s'étonner du peu de prestige qu'elle conserve ? Faut-il s'étonner de la recrudescence des sciences occultes, des superstitions ?

L'informatique sera peut-être un des meilleurs facteurs de renouvellement de l'enseignement, pour peu qu'on le veuille (3). ●

Je sais une

Grandeur et décadence de la numération romaine.

Sur le chemin de Saint Jacques de Compostelle, l'église de Fontaines d'Ozillac, à dix kilomètres au Sud-Est de Jonzac en Charente Maritime, mérite une visite. Outre un portail roman saintongeois richement sculpté, la façade comporte une partie rajoutée et datée par l'inscription qu'on peut voir sur les photos ci-dessous.

Un signe en forme de S allongé sépare les mots et les groupes de chiffres. "MIL" se rencontre fréquemment dans l'écriture d'une date. Le "quarante-deux" est noté XLII suivant les règles ordinaires de la numération romaine. Et les 5 centaines qui devraient régulièrement être désignées par le chiffre D, sont indiquées par le chiffre V (5 unités) accompagné d'un C pour montrer qu'il s'agit bien de centaines.

Comment et pourquoi une telle irrégularité a-t-elle pu être commise ? Dans quelle perspective se situe-t-elle ?

Pendant plus d'un millénaire, la seule numération écrite de l'Occident fut la numération romaine dont le principe était, à l'origine, purement additif :
1982 = MDCCCCLXXXII = M + D + C + C + C + C + L + X + X + X + I + I .
Ce système, dans lequel tout nombre est égal à la somme de ses chiffres a deux inconvénients majeurs : longueur de l'écriture et nécessité d'inventer de nouveaux symboles pour écrire de grands nombres.

Avant d'être détrônée par la numération de position, la numération romaine évolua pour essayer de corriger ces deux défauts. Le principe soustractif fut introduit pour raccourcir l'écriture : IV au lieu de IIII, IX au lieu de VIIII, CM au lieu de DCCCC ... Dans la notation des grands nombres, une barre et un encadrement furent utilisés pour désigner respectivement une multiplication par 1000 ou 100 000 :

$\bar{\mathrm{V}} = 5000$, $\bar{\mathrm{X}} = 10\ 000$, $\bar{\mathrm{C}} = \boxed{\mathrm{I}} = 100\ 000$,
$\bar{\mathrm{D}} = \boxed{\mathrm{V}} = 500\ 000$, $\bar{\mathrm{M}} = \boxed{\mathrm{X}} = 10^6$ etc...

Et, plus tardivement, des initiatives bien plus hardies apparurent. Geneviève Guitel (1) cite cet extrait d'un manuscrit espagnol de 1392 :

$\overset{\mathrm{M}}{\mathrm{IIII}}\ \ \overset{\mathrm{C}}{\mathrm{IIII}}$ LXXIII florins (pour 4473 florins)

(3) Il est évident que dans un système d'enseignement centralisé et hiérarchisé à l'extrême comme le nôtre, la première utilisation de l'informatique a été et reste encore, hélas, le renforcement du pouvoir - y compris le pouvoir de l'enseignant. Sur 400 exemples de programmes diffusés par l'INRP en 1980, 1% à peine étaient des programmes de simulation. Les autres n'étaient que des "leçons programmées", et aucun n'était réalisé par des élèves...

église au fond d'un hameau ...

Daniel DAVIAUD · Jonzac

Au niveau des centaines et des mille, cette écriture n'est plus de type additif; elle n'est pas non plus de type positionnel car les symboles C et M sont rappelés au dessus de leur coefficient.

C'est à ce type hybride qu'appartient visiblement l'inscription de l'église de Fontaines d'Ozillac. Pour quelles raisons l'auteur de l'inscription et celui du manuscrit espagnol ont-ils imaginé ces notations hybrides ?

A cette époque, la numération de position était connue grâce aux contacts avec les Arabes (Croisades, commerce...). L'influence de cette dernière paraît donc plus plausible qu'une évolution interne de la numération romaine. Quel pouvait être, dans ces conditions, le parti pris de l'auteur d'une inscription hybride ?

Voulait-il promouvoir le principe positionnel en utilisant, pour des raisons purement pédagogiques, les chiffres romains plus familiers et en rappelant discrètement le symbole C des centaines ?

Voulait-il au contraire témoigner son attachement à la numération romaine en essayant de montrer qu'elle était encore susceptible d'évoluer ?

Quoi qu'il en soit, ces écritures révèlent une période de transition où chacun doit se situer par rapport au conflit qui oppose la tradition et les nouvelles idées (2).

(1) Histoire comparée des Numérations écrites (page 225). Flammarion.

(2) Je me souviens du temps où le vénérable corbillard de mon village s'était vu amputé de ses brancards pour être tiré par un tracteur au lieu d'un cheval. Et j'en connais aujourd'hui qui essaient de faire de la programmation structurée en langage BASIC sur leur micro-ordinateur...

FAIT L'AN 1542

CE PORTAL

DEIGLISE

(photos Jacques Gaillard Lycée de Jonzac).

Le Développement de la

Vous êtes abonné au SUPPLEMENT DU PLOT ? Vous avez de la chance, car vous allez pouvoir passer un temps merveilleux à explorer le monde des polyèdres...
Mais l'aspect "ludique" de la construction des polyèdres, pour fondamental qu'il soit, n'est pas le seul qui puisse être développé. Les auteurs nous montrent comment le développement de la perception spatiale, fondamentale pour le développement de l'esprit (et pas seulement de l'esprit mathématique), est favorisé par l'utilisation de ce matériel.
Cet article est extrait du Bulletin de l'AMQ (Association Mathématique du Québec) (Volume XXI - Numéro 4 - Octobre 1981). Nous remercions nos amis québécois de nous avoir autorisé à le reproduire.

La perception spatiale est un atout pour la vie. Tout comme la lecture et l'écriture, elle doit être reconnue comme étant essentielle au développement et à la croissance de l'homme. Vivant dans un espace tridimensionnel, nous devons inévitablement **intervenir** dans notre environnement spatial, que ce soit pour changer notre position, ou à un niveau plus élaboré, pour concevoir l'art, l'architecture et le génie architectural pour l'usage d'autrui au sein de notre société. Pour n'importe quel type d'intervention de la sorte, l'habileté à percevoir les formes spatiales est d'égale importance, tant de la part du concepteur que des utilisateurs.

Qu'est-ce que la perception spatiale? Nous pouvons clarifier cela par analogie avec le processus de lecture du mot imprimé. Admettons que l'on vous donne un livre écrit en langue étrangère et que l'on vous en explique les symboles (lettres), la manière dont ils sont rassemblés dans des mots, la grammaire et les règles de prononciation. Vous seriez en mesure de lire le livre, même à haute voix. Mais les sons que vous émettriez pourraient vous être toujours incompréhensibles. Le **message** ne serait peut-être pas encore passé. Telle est l'expérience de la plupart des gens confrontés avec les dessins ou leur environnement tridimensionnel. Le **message** demeure dénaturé. Il n'y a pas d'image spatiale que l'on puisse manipuler, il n'y a pas de mémoire spatiale, il n'y a pas de pouvoir qui nous permette de prévoir les conséquences d'un changement de relations spatiales entre les objets, il n'y a pas de sentiment **d'orientation** par rapport à l'environnement.

Il est évident qu'il existe des niveaux d'utilisation des matériaux écrits, disons du Montréal-Matin à Molière. De la même manière, il y a des niveaux de perception spatiale, certains nécessaires à la vie de tous les jours, d'autres, requis à différents degrés de spécialisation humaine. Ainsi, un modeste degré de perception spatiale est requis pour se familiariser avec notre espace vital et le réorganiser. Un haut degré de perception spatiale et d'intuition géométrique est requis en cristallographie, en biochimie, en chirurgie, pour l'aviation, l'opération de pelles mécaniques, la sculpture, la chorégraphie et l'architecture. Et si le grand public doit utiliser, comprendre et apprécier les créations dans ces champs spécifiques d'efforts soutenus, ils doivent à leur tour avoir une meilleure conscience des formes spatiales.

Une bonne formation de la perception spatiale peut permettre une condition humaine mieux adaptée à notre monde. Un entraînement de la perception spatiale commencé tôt peut créer des individus ayant moins de chances d'être lésés dans la réalisation de leurs tâches quotidiennes. En effet, un certain entraînement de la perception spatiale devrait être offert à n'importe quel âge et à tout niveau approprié de spécialisation professionnelle.

Des membres du Groupe de Recherche en Topologie Structurale, groupe interinstitutionnel et interdisciplinaire, ont remarqué, certains d'entre eux à travers une expérience de 15-20 ans d'enseignement de la perception spatiale, de la géométrie, d'autres par des recherches mathématiques ou une pratique professionnelle (architectes, ingénieurs et dessinateurs industriels), que la perception spatiale est normalement peu développée, rarement enseignée, et quasiment jamais expérimentée.

Une prochaine recherche étudiera les aptitudes menant au développement de la perception spatiale. Elle précisera les **obstacles**, qu'ils soient physiologiques, psychologiques, physiques ou pédagogiques, qui s'opposent au développement de la perception spatiale. (Certains obstacles sont inévitables, tels la gravité, les lignes cachées dues à l'opacité des objets solides; d'autres sont évitables, comme certaines orientations de l'enseignement d'aujourd'hui.)

Le projet visera à développer des ensembles éducatifs à différents niveaux, une série bien structurée d'exercices pour développer la perception spatiale, et une variété de tests qui détecteront et distingueront une panoplie d'aptitudes et d'habiletés à travers une série de besoins et d'aptitudes spécialisées. [1]

L'environnement mathématique

D'où vient le préjugé que la mathématique, étant une science abstraite, son apprentissage peut se passer de matériel concret? Au contraire! Même les mathématiciens professionnels avouent devoir très souvent s'appuyer sur des supports concrets afin de mieux saisir certains concepts. [4]

À juste titre, le mathématicien français Jean Dieudonné, dans une conférence à Luxembourg en 1974 portant sur **L'abstraction et l'intuition géométrique**, rapportait le fait *qu'au 19e siècle, dans le calcul à n variables, on s'est peu à peu rendu compte qu'il y a intérêt à utiliser non pas un langage algébrique, mais un* **langage géométrique**. *Au lieu de parler d'une*

Perception Spatiale

Janos BARACS & Richard PALLASCIO - Montréal

équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, on parle de l'hyperplan ayant cette équation. On n'a strictement rien ajouté du point de vue mathématique, mais on a introduit une notion qui rappelle une notion connue dans le cas $n = 2$ ou 3, où nous disposons de l'intuition géométrique [3]. C'est-à-dire celle qui s'appuie sur une réalité sensible ou tangible.

En partant de cette idée, des membres du Groupe de Recherche en Topologie Structurale ont développé du matériel didactique, expérimenté dans diverses écoles. Après avoir précisé la démarche didactique entourant notre intervention, nous présenterons un exemple vécu dans une école primaire.

L'enfant doit pouvoir faire sa propre démarche, sa propre période d'exploration physique, affective et intellectuelle. On doit lui laisser le temps d'apprivoiser ce matériel, de le manipuler, de satisfaire sa curiosité naturelle, d'explorer les diverses possibilités, de poser ses propres questions et problèmes.

Loin d'être une perte de temps, une telle période lui permet d'emmagasiner des souvenirs (images, relations, actions, ...) et d'explorer une quantité d'avenues qui faciliteront grandement une étude plus structurée qui pourra lui être proposée ultérieurement. Lors de cette étude, on pourra mieux l'aider à structurer ses connaissances, à aller plus loin.

D'un autre côté, cette approche favorise aussi l'acquisition d'excellentes habitudes mathématiques chez l'enfant. Elle l'amène à avoir confiance en lui, à prendre des initiatives, à explorer une même situation sous divers angles, à repartir à la *pêche aux idées* lorsqu'une démarche n'aboutit pas.

De ce point de vue, il est évident que les possibilités éducatives varient d'un matériel à l'autre. Cependant, il nous est possible d'esquisser les principales étapes qui nous guident lorsque nous utilisons un matériel avec les enfants. Ces étapes ont plus ou moins d'emphase, dépendamment du matériel choisi:

1. EXPLORATION:
Par des activités de manipulation, des essais, des discussions, l'enfant accumule des souvenirs. Il peut déjà découvrir, expérimentalement, certains résultats.

2. PRISE DE CONSCIENCE:
L'enfant est amené à réfléchir sur ses actions, sur les résultats qu'il a obtenus, sur d'autres possibilités. En ses propres mots, il exprime sa démarche et interprète ses résultats.

3. MATHÉMATISATION:
L'enfant est amené à se demander si ses méthodes et ses résultats sont généralisables, si le langage et les méthodes mathématiques ne lui permettraient pas de les décrire avec plus d'exactitude et de cohérence.

Naturellement, un tel schéma pourrait être raffiné davantage. Mais il nous suffit pour illustrer notre souci d'exploiter une dynamique d'interaction centrée sur l'enfant, pour nous assurer de greffer les activités qu'on lui propose vers son vécu. Sans compter qu'une telle stratégie nous a maintes fois permis de découvrir des utilisations insoupçonnées d'un matériel donné. Ce schéma permet aussi à l'enfant de mieux se protéger contre les interférences externes, interférences guidées par de bonnes intentions, mais qui présupposent que l'enfant doit avoir les mêmes préoccupations mathématiques que l'adulte, qu'il doit raisonner comme lui, qu'il doit ressentir les mêmes besoins de certitude.[4]

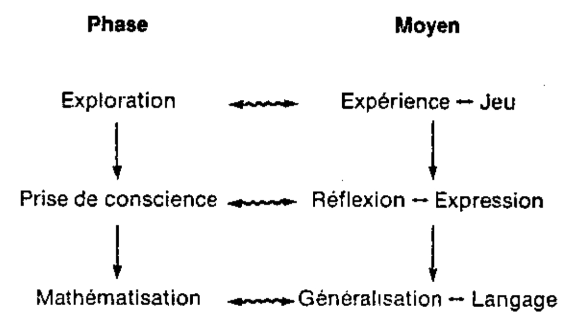


Figure 1. Démarche didactique

Or certaines recherches en didactique de la mathématique ont effectivement mis en lumière les divers degrés de certitude ressentie d'un enfant à l'autre, entre autres, les travaux de Nicolas Balacheff de Grenoble portant sur l'**Analyse, dans le cas de problèmes combinatoires, de l'élaboration d'explications par les élèves de 6ième**, présentés l'an dernier à Paris[1].

Un exemple

Voici, pour illustrer la démarche didactique, un exemple vécu par une petite fille de 9 ans, qui s'intitule *Les seuls 5 dés au monde*. Dans le laboratoire de mathématique se trouvait un petit sachet qui contenait les 5 solides de Platon, c'est-à-dire les 5 polyèdres réguliers. Ce fut suffisant pour éveiller l'intérêt de l'enfant, surtout lorsqu'à sa question *Y a-t-il d'autres dés?*, nous lui avons répondu *Non et c'est même possible de le démontrer!*

Des sentiments d'incrédulité et d'étonnement ont suivi, principalement en s'apercevant qu'il n'y avait pas de polyèdre régulier à 10 faces, 10 étant pour l'enfant qui vient d'apprendre à compter dans la base décimale, un nombre quasi mythique.

Au moyen du poly-kit, produit par le Groupe de Recherche en Topologie Structurale, l'enfant a été invitée à construire elle-même, à l'aide de ce matériau, les 5 polyèdres réguliers. Cette activité d'exploration est d'autant facilitée par le fait que l'enfant peut se corriger lui-même, ses erreurs de construction faisant apparaître des surfaces *gauches*, grâce au carton flexible.*(1)*

La 2e phase va laisser entrevoir des questions qui témoignent de l'efficacité de la 1ère phase, à savoir le temps pris pour explorer une idée, est loin d'être du temps perdu: *pourquoi il n'y a que 5 dés?, peut-on le démontrer?, qu'est-ce qu'un dé (sous-entendu par rapport aux autres polyèdres convexes)?*. Petit à petit, les caractéristiques du dé sont ressorties: faces *pareilles* (sous-entendu de même forme, en les comparant à des semi- réguliers (voir la figure 3)), polygones réguliers comme faces (c'est-à-dire congruence des longueurs des arêtes et des angles, en les comparant, par exemple, au RHOMBOÈDRE, hexaèdre dont les six faces sont des losanges isométriques, obtenu en déformant un cube par une pression appliquée à deux sommets opposés (voir la figure 4)) et congruence sommitale du nombre de polygones adjacents (en comparant par exemple l'icosaèdre à ses deux *calottes* placées l'une sur l'autre et baptisées par l'enfant *OVNI* (voir la figure 5).

Phase	**Moyen**
Exploration	. 5 solides de Platon . Questions, doutes, étonnement . 12 feuilles d'un poly-kit: construction des 5 *dés* (polyèdres réguliers)
Prise de conscience	. Pourquoi il n'y en a que 5? (enfant) . Peut-on le démontrer? (enfant) . Qu'est-ce qu'un *dé*? (adulte) . Étude du cas des deltaèdres (suggestion de l'adulte)
Mathématisation	. Formation d'un *sommet* . Définition d'un *dé* . Étude des polyèdres réguliers à faces carrées, pentagonales, hexagonales, ...

Figure 2. Les seuls 5 dés au monde

(1) Le "POLY-KIT" est la version américaine du "SUPPLEMENT DU PLOT". Signalons, sans fausse modestie, que le "SUPPLEMENT DU PLOT" est beaucoup plus complet que son homologue d'outre-Atlantique, et qu'il permet de construire beaucoup plus de polyèdres (NDLR).

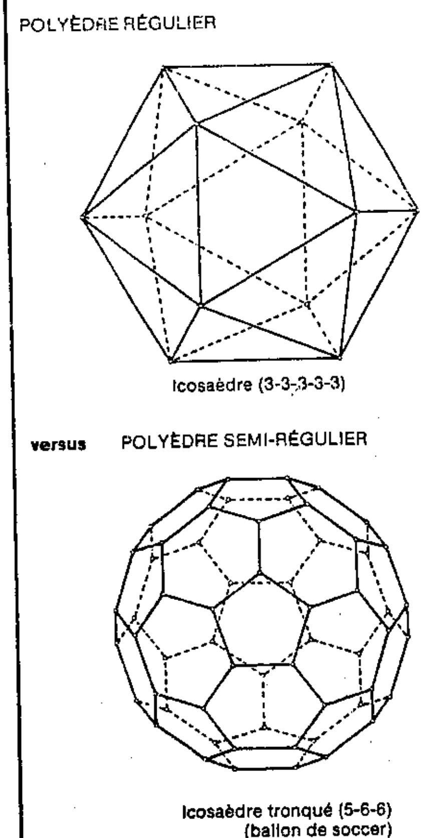


Figure 3. 1ère caractéristique: *faces pareilles*

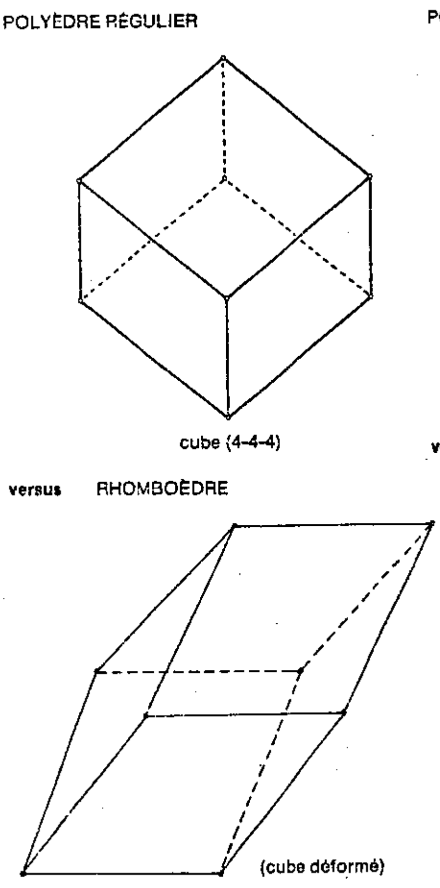


Figure 4. 2ième caractéristique: *polygone régulier*

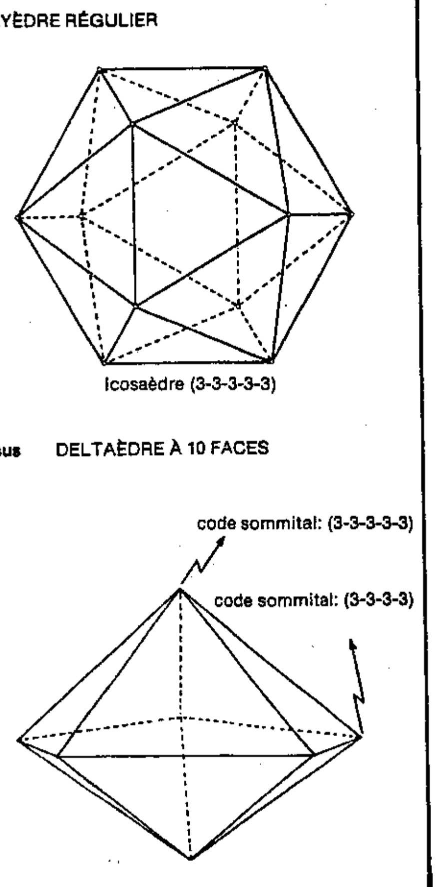


Figure 5. 3ième caractéristique: *congruence sommitale*

Ces caractéristiques ont servi par la suite dans l'étude systématique des polyèdres réguliers possibles. Mais en premier lieu, il fallait déterminer la condition minimale de l'existence d'une forme polyédrique, ou si vous voulez, le nombre minimum de faces nécessaires pour construire un angle solide. Il nous semble que ce résultat n'est pas évident pour tout non-géomètre, encore moins pour un enfant de 9 ans.

Suite à ce travail, le dénombrement des faces et des sommets des solides platoniciens et archimédiens a amené quelques enfants à reconnaître certaines *inversions*, c'est-à-dire les dualités, particulièrement triviales dans les polyèdres réguliers:

À l'aide de pailles, des enfants se sont mis à construire des polyèdres ajourés afin de pouvoir illustrer les duals des polyèdres réguliers construits en carton. Ils ont même illustré la symétrie de la relation *dualité* en imbriquant plusieurs polyèdres ajourés les uns dans les autres, à savoir:

- un cube inclus dans un octaèdre, lui-même inclus dans un cube;
- un icosaèdre inclus dans un dodécaèdre, lui-même inclus dans un icosaèdre.

(Voir figure 7 plus loin dans le texte).

Les polyèdres de Platon et leurs duals [2]

Polyèdres réguliers	F	A	S	
Tétraèdre	4	6	4	Tétraèdre
Cube	6	12	8	Octaèdre
Octaèdre	8	12	6	Cube
Dodécaèdre	12	30	20	Icosaèdre
Icosaèdre	20	30	12	Dodécaèdre
	S	A	F	Duals

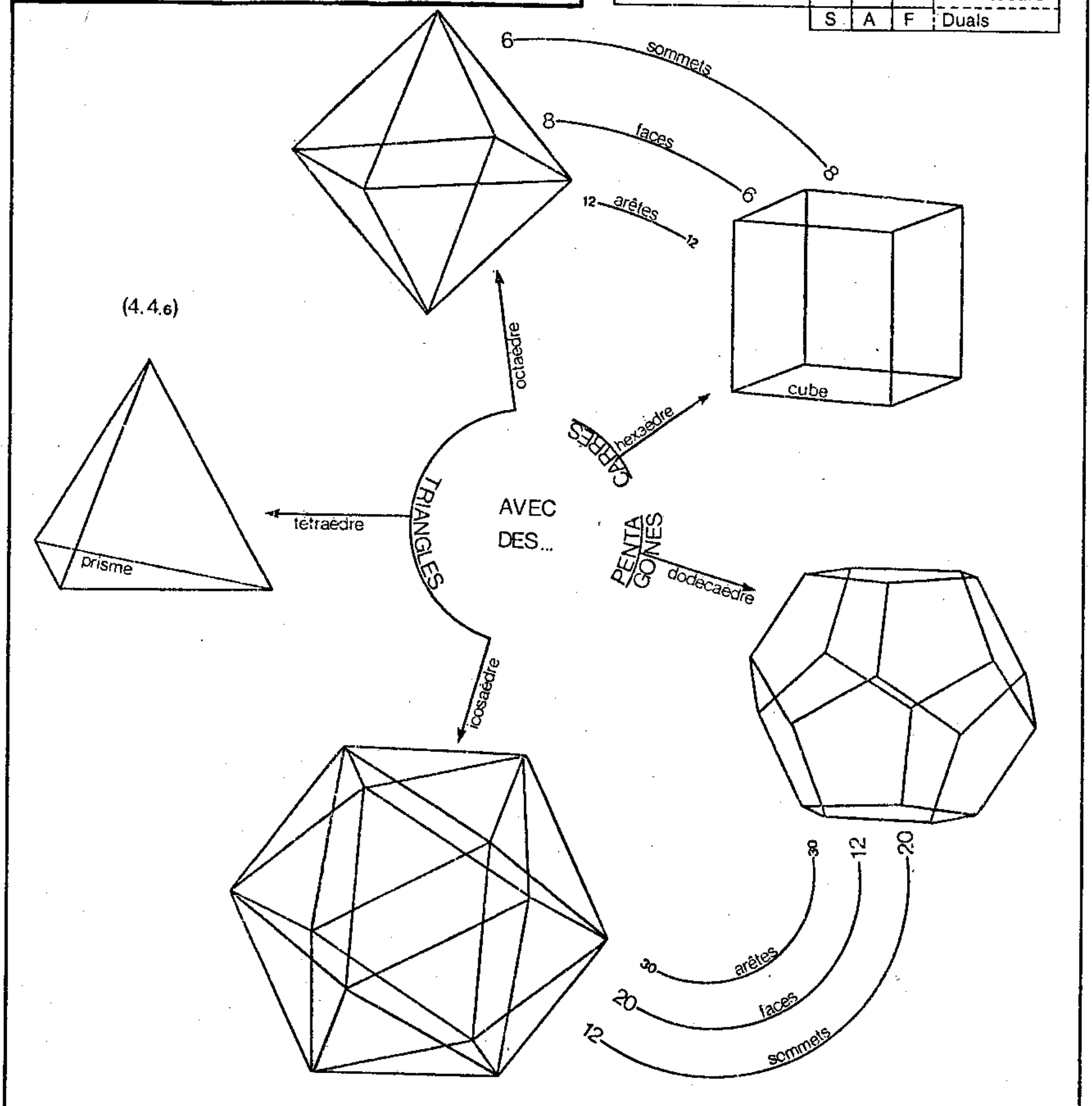


Figure 6. Solides de Platon [7]

Finalement, la mathématisation de la situation d'apprentissage aura apporté les éléments suivants:

- le dual d'un dé est un dé;
- le dual d'un polyèdre semi-régulier n'est pas un polyèdre semi-régulier;
- le dual du dual d'un dé est ce même dé.

Des exemples d'activités mathématiques intéressantes comme celle sur les polyèdres, permettant le développement de la perception spatiale géométrique, nous commençons à en avoir une jolie brochette.

En géométrie tridimensionnelle:

- recherche des polyèdres qui permettent de construire l'espace sans laisser de *trous*, à l'aide de poly-kits;

- recherche d'images d'objets obtenues par divers déplacements: symétries orthogonales par rapport à un plan (miroir!), à un axe; translations, etc.;

- recherche de moyens d'expression de structures polyédriques (le monde dans lequel l'enfant vit et qui devrait être le premier exploré!) à l'aide de graphes, de matrices d'incidence, bref d'outils topologiques.

En géométrie plane:

- recherche d'algorithmes permettant de construire des polygones réguliers, convexes ou étoilés (élaboration d'un modèle utilisant le concept de nombres premiers entre eux);

- recherche d'un algorithme permettant de *fermer* une figure géométrique polygonale, que ce soit un simple carré ou le schéma d'un vaisseau spatial;

- simulation sur ordinateur d'une horloge et interaction des concepts de distance, de temps et de vitesse circulaire (combien de personnes, questionnées à brûle-pourpoint, n'affirmeront pas que l'aiguille des minutes va 60 fois plus vite que celle des heures?);

- somme des angles d'un triangle (sujet devenu banal, mais très riche, à condition de ne pas le voir comme un théorème de plus à apprendre par coeur). [5]

Conclusion

Le privilège de bien voir dans l'espace ne devrait pas demeurer l'apanage d'une poignée d'architectes et de spécialistes. La perception spatiale devrait être une aptitude commune, bien enseignée à chaque niveau scolaire. Mieux encore, si notre société veut vivre dans un meilleur environnement, ses membres doivent arriver à une parfaite compréhension de ce qui les entoure et des usages potentiels qui existent dans cette merveilleuse ressource naturelle qu'est notre espace tridimensionnel. [1] •

Exploration	. Dénombrement des faces, arêtes et sommets des dés. . Nouvelles questions.
↓ Prise de conscience	. Dualités. . Polyèdres semi-réguliers. . Construction de polyèdres ajourés.
↓ Mathématisation	. Le dual d'un *dé* est un *dé*. . Le dual d'un polyèdre semi-régulier n'est pas un polyèdre semi-régulier. . Le dual du dual d'un dé est ce même dé.

Figure 8. Dualités

Bibliographie

[1] BARACS, Janos, *La perception spatiale*, présentation d'un projet de recherche, FCAC, septembre 1980.

[2] BARACS, Janos, *Poly-kit*, Ed. Groupe de Recherche en Topologie Structurale, Université de Montréal, 1979, 48 pages.

[3] DIEUDONNÉ, Jean, *L'abstraction et l'intuition mathématique*, in. NICO, Belgique, juin 1976, 22 pages.

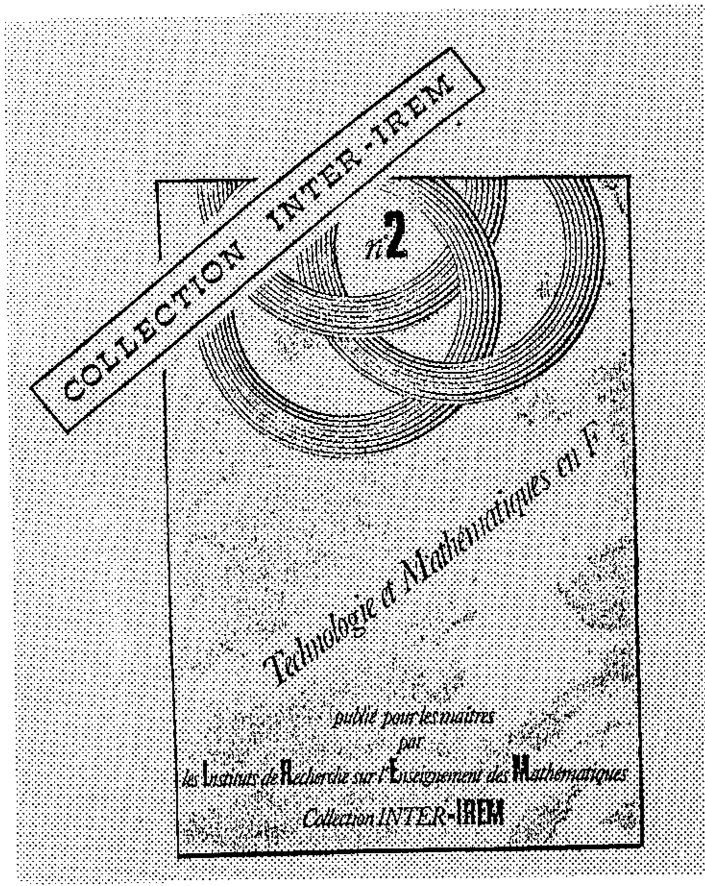
[4] LAQUERRE, J., MICHAUD, N., PALLASCIO, R. et TAURISSON, A., *L'apprentissage de la mathématique dans un contexte optionnel*, Rapport d'étape, 1980, 43 pages.

[5] PALLASCIO, Richard, *La mathématique: jeu d'enfant ou travail d'adulte*, Instantanés Mathématiques, 1981 (à paraître).

[6] PALLASCIO, Richard, *La perception spatiale géométrique*, Actes de la 33e rencontre internationale de la CIEAEM, Italie, août 1981 (à paraître).

[7] ROZOY-SÉNÉCHAL, Brigitte, *Géométrie classique et mathématiques modernes*, Ed. Hermann, 1980.

[1] Séminaire de didactique des mathématiques, 16 mars 1980, École Normale Supérieure.



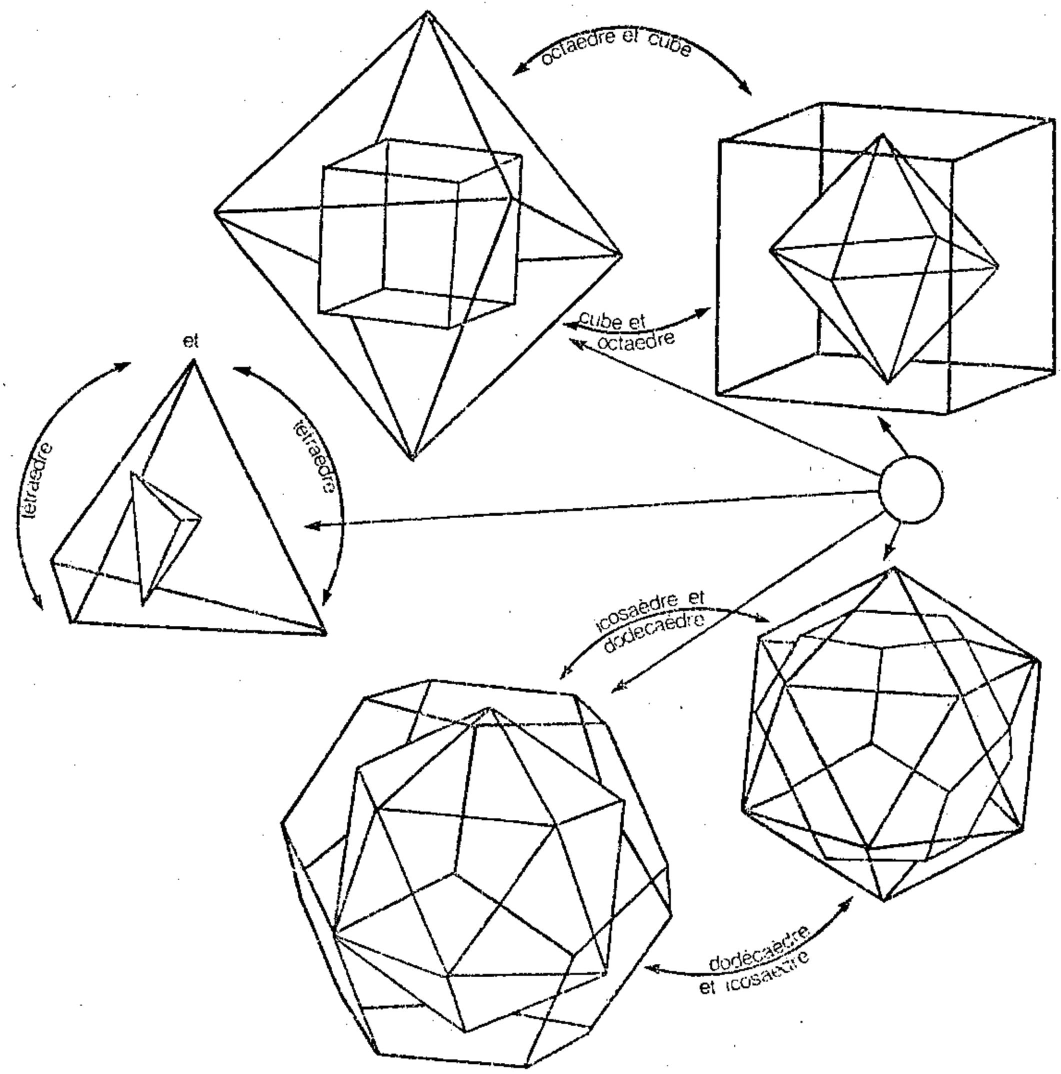


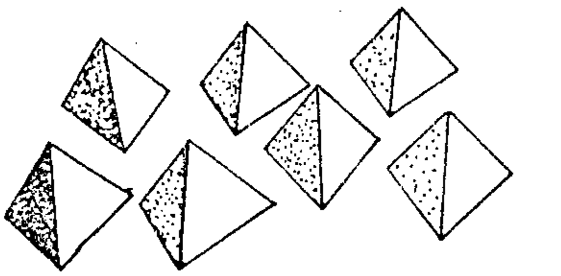
Figure 7. Dualités [7]

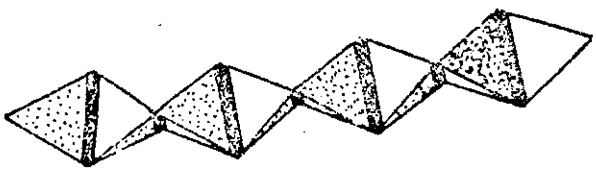
Les Kaléïdocycles

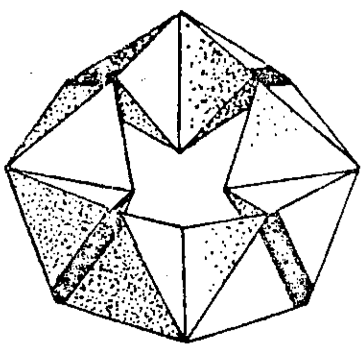
Francis CONYNCK · Caen

Cet article a été inspiré par l'ouvrage "M.C. ESCHER Kaléïdocycles" de Doris SCHATTSCHNEIDER et Wallace WALKER (Ballantine Books - New York).

Un kaléïdocycle est une chaîne fermée de tétraèdres tous identiques. Pour en construire un, vous pouvez donc monter une série de tétraèdres, puis les assembler, ou ou...





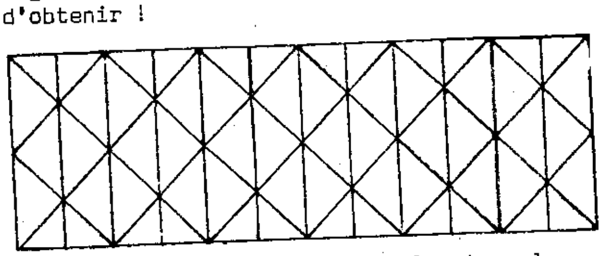


....ou avoir recours à un patron. Les charnières de la chaîne permettent à l'anneau de tourner autour de lui-même, et pour peu que certaines conditions de dimensions sont requises et que l'on décore les faces (par exemple, à la manière d'Escher), on obtient quelques minutes de rêve devant ce solide déformable.

Aujourd'hui, nous nous intéresserons aux patrons de kaléïdocycles : leur décoration est la matière d'un autre article...

Mais quelle est l'origine de ces kaléïdocycles ? Au départ, il y a la forme "*Iso Axis*" (modèle breveté) inventé par le dessinateur Wallace Walker en 1958, alors qu'il était étudiant à Cranbrook dans le Michigan.

En deux dimensions, Iso Axis consiste en une grille de 60 triangles rectangles isocèles. En regardant ce patron, on ne peut imaginer la forme surprenante qu'il permet d'obtenir !



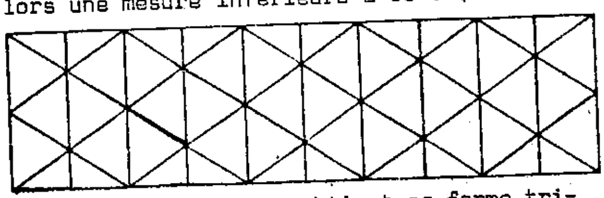
Pliez donc maintenant selon tous les traits "verticaux" dans un même sens, et selon toutes les diagonales dans l'autre sens.

Modelez votre objet en marquant bien les creux et fermez votre anneau en collant bord à bord les deux petits côtés de votre patron.

Puis faites éclore votre fleur....

Vous pouvez essayer, pour une largeur donnée de votre grille "Iso Axis", de diminuer la longueur de cette grille. Le résultat, d'une grande flexibilité, donne également dans le genre floral...

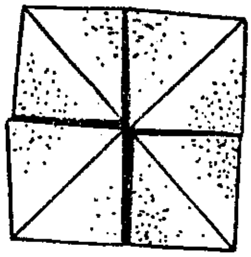
Quand la grille "Iso Axis" est "étirée", tous les angles des triangles ont alors une mesure inférieure à 90°. Quand ce

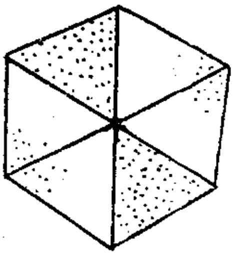


patron est modelé, on obtient sa forme tridimensionnelle, un anneau de tétraèdres, un kaléïdocycle. Selon que l'on "étire" plus ou moins le patron, selon que l'on y adjoint plus ou moins de triangles, on crée des kaléïdocycles très diversifiés.

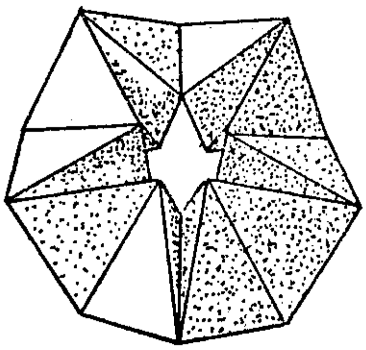
Plusieurs questions se posent alors :
1) Combien faut-il au minimum de tétraèdres pour construire une chaîne "fermée"?
2) Jusqu'où peut-on réduire le trou situé au centre de l'anneau ? Théoriquement, on peut le réduire à un point : pour y arriver, il faut construire les triangles d'une certaine façon; trouvez cette méthode !

Dans la famille des modèles ayant un point comme trou central, il y en a deux qui, lorsqu'on les observe par le dessus, ont des contours familiers :
- un hexagone régulier pour le kaléîdocycle formé de 6 tétraèdres.
- un carré pour celui formé de 8 tétraèdres.

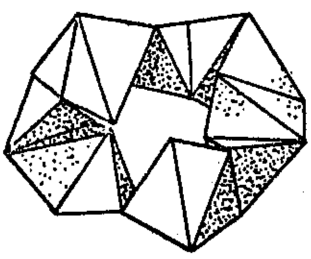




Si le nombre de tétraèdres est augmenté, le kaléîdocycle prend des allures de fleurs à pétales multiples, ou d'étoiles..., (chacun y verra ce qu'il y veut).

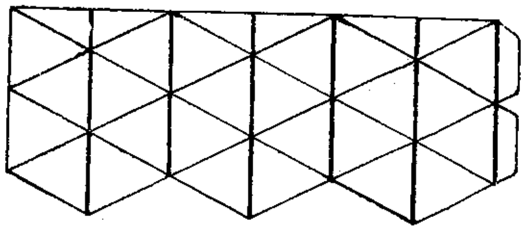


Tous les kaléîdocycles rencontrés jusqu'ici possèdent des symétries remarquables. Mais il existe une catégorie différente de ce point de vue : les kaléîdocycles "tordus" ("entortillés" !) dont les tétraèdres semblent culbuter l'un après l'autre autour du trou central.

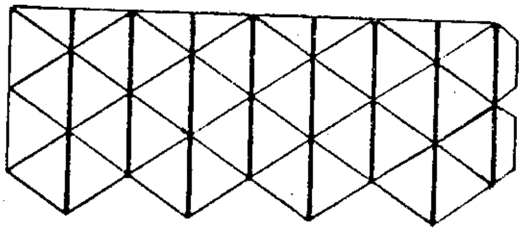


Pour construire nos kaléîdocycles.

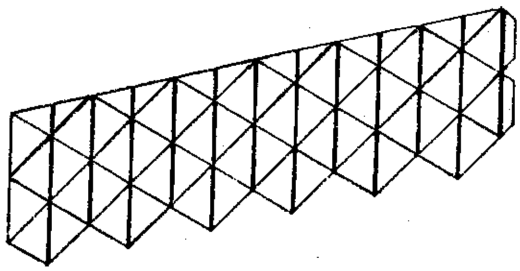
Voici à titre d'exemples trois patrons



Kaléîdocycle type hexagonal.



Kaléîdocycle type carré.



Kaléîdocycle "entortillé".

Comme pour le patron "Iso Axis", il vous faudra plier selon tous les traits verticaux dans un même sens, et selon toutes les diagonales dans l'autre sens. Ainsi plié, le patron s'enroulera de lui-même (ou presque), dans sa forme définitive. Certains triangles viendront se superposer, ceci afin de permettre le collage : et les deux languettes de droite vous assureront le bouclage de votre chaîne de tétraèdres.

Et maintenant, donnez la vie à ces kaléîdocycles...

Et bon voyage....

π et la construction de SPECHT

Serge PARPAY · Niort

On sait que   est un nombre transcendant : ce résultat a été démontré en 1882 par LINDEMANN. La quadrature du cercle est donc une construction "impossible". Pourtant, parmi les quadratures "approchées" du cercle, la construction de SPECHT, qui date de 1836, est très précise (10^{-6} près). En voici le principe.

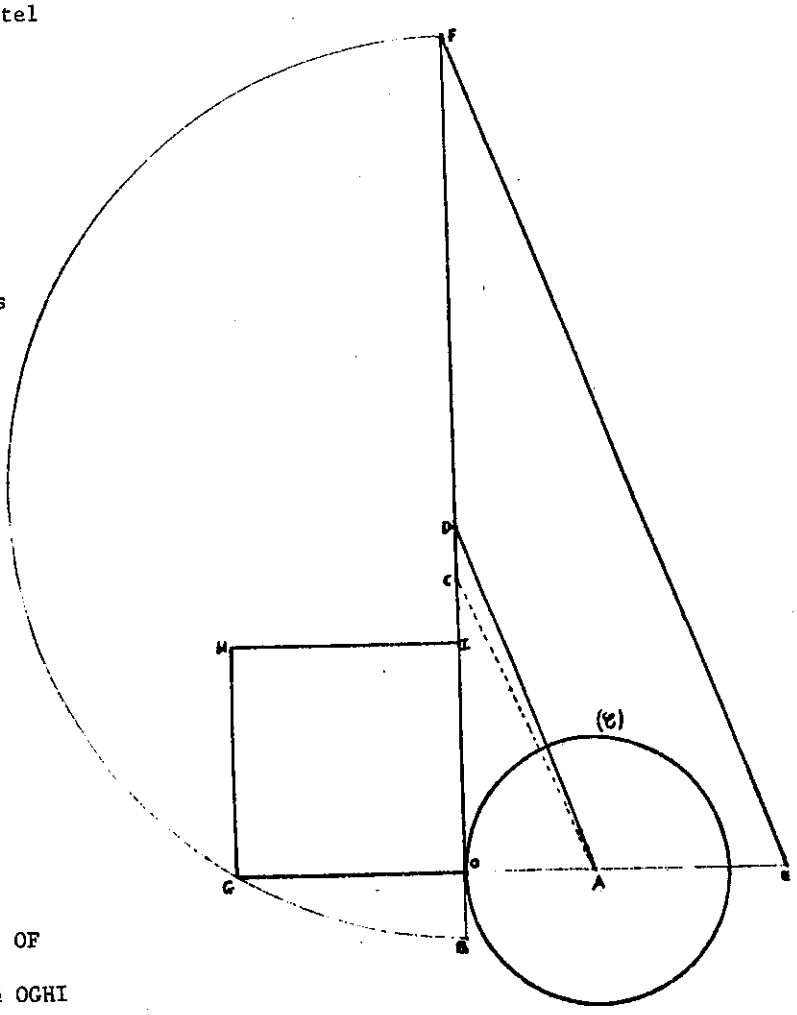
CARL LOUIS FERDINAND LINDEMANN *(1)*
(1852-1939)

Lindemann est né le 12 avril 1852 à Hanovre. De 1870 à 1873 il a fait des études à Göttingen, Erlangen, Munich, Londres et Paris. Il enseigna à Fribourg et Königsberg.

Avant son célèbre mémoire "Die Zahl π" paru en 1882 aux Mathematische Annalen, il avait travaillé sur diverses questions géométriques. A la suite de ce succès il consacra surtout ses efforts à l'étude du grand théorème de Fermat.

CONSTRUCTIONS

- Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, placer les points A(0,5;0) ; B(0;-0,25) ; C(0;1,1) et D(0;1,3).
- Tracer le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon AO. Tracer le segment AC.
- Sur la demi-droite OA, placer E tel que OE = AC.
- Tracer le segment AD.
- Placer le point F sur la demi-droite OC tel que EF soit parallèle à AD.
- Tracer le demi-cercle de diamètre BF qui coupe la droite OA en G (O entre A et G).
- Achever la construction du carré OGHI.



THEOREMES UTILISES

Théorème de Pythagore.
Théorème de Thalès.
Théorème : triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.
Propriété de la hauteur d'un triangle **rectangle**

CALCULS

$AC^2 = AO^2 + OC^2$; $AC = \sqrt{1,46}$

$OE = AC$

$AD \parallel EF \quad \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OA}$

$OF = 2,6\sqrt{1,46} = 3,1415919\ldots$

$\widehat{BGF}$ = 1 angle droit

$OG^2 = OB.OF$

$OG^2 = \frac{2,6\sqrt{1,46}}{4} = 0,7853979\ldots$

RESULTATS

Périmètre du cercle $(\mathscr{C}) = \Pi \simeq$ longueur OF

Aire du cercle $(\mathscr{C}) = \frac{\Pi}{4} \simeq$ aire du carré OGHI

AVANTAGES DE LA CONSTRUCTION DE SPECHT

Ce thème met en oeuvre des constructions géométriques:
- construction d'un angle droit (les axes).
- report de longueurs au compas.
- construction de parallèles.
- détermination du milieu d'un segment (médiatrice).
- construction d'un carré.

Il utilise trois théorèmes importants et une propriété dans un triangle (hauteur) démontrable par des considérations trigonométriques. Utilisation de produit scalaire, de rapports de "côtés proportionnels".

Il fait calculer des valeurs approchées: racines carrées, encadrement.

Il permet de rappeler le périmètre d'un cercle, l'aire d'un cercle... et l'aire d'un carré !

Il permet de parler de la quadrature du cercle, du nombre transcendant π et donc d'un peu d'histoire des mathématiques.

Il a des prolongements : recherche d'autres valeurs approchées de π et d'autres constructions approchées...

LA TRANSCENDANCE DE π (1)

Rappelons qu'un nombre complexe est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers et qu'il est dit transcendant dans le cas contraire. Ce n'est qu'en 1844 que l'existence de nombres transcendants fut démontrée par Liouville. En 1874, G. Cantor, le créateur de la théorie des ensembles, démontra que "la plupart" des nombres réels sont transcendants ; en fait il démontra que l'ensemble des nombres algébriques réels est dénombrable (c'est-à-dire peut être mis en bijection avec les entiers) tandis que l'ensemble des réels ne l'est pas. Ainsi un nombre réel a une "forte probabilité" d'être transcendant ; mais c'est une toute autre affaire que de démontrer qu'un nombre donné est transcendant ou non. Les nombres les plus intéressants à étudier du point de vue de la transcendance sont ceux qui apparaissent dans l'analyse classique : e, π, ...

La première constante de l'analyse dont la transcendance fut démontrée est le nombre e. Le résultat fut obtenu par Charles Hermite en 1873, grâce à une utilisation très ingénieuse de la théorie des fonctions.

Restait la question de la transcendance de π. A ce sujet Hermite écrivait : "Je ne me risquerai pas à essayer de démontrer la transcendance du nombre π. Si d'autres l'entreprennent, nul ne sera plus heureux que moi de leur réussite ; mais, croyez-moi, mon cher ami, cela ne manquera pas de leur coûter quelques efforts". Pourtant, la transcendance de π fut démontrée en 1882 par le mathématicien allemand Lindemann, essentiellement grâce à la méthode introduite par Hermite. Voici l'introduction de l'article de Lindemann : "Devant l'insuccès de si nombreuses tentatives faites pour résoudre la quadrature du cercle avec la règle et le compas, on considère généralement comme impossible la solution de ce problème. Cependant on a seulement établi l'irrationalité de π et de π^2. L'impossibilité de la quadrature du cercle sera prouvée si l'on montre que π ne peut être racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels ; l'objet de ce qui suit est précisément d'en apporter la démonstration".

Depuis on a démontré en particulier la transcendance des quantités suivantes : Log 2 (Weierstrass, 1885), e^π (Gelfond, 1929), $2^{\sqrt[3]{2}}$ (Gelfond, Schneider, 1934), Log 2 + π (Baker, 1966), Γ(1/4) (Choodnovski, 1976). Mais on ne sait même pas si e + π est rationnel ou non. Pour plus de détails sur les résultats obtenus dans cette belle théorie le lecteur est invité à consulter l'article de M. Waldschmidt et J. Vélu, "Les victoires de la transcendance" paru dans le journal "La Recherche" de décembre 1977 (n° 84).

REFERENCES

Marcel BOLL : Les étapes des mathématiques (*collection "Que Sais-je ?" n° 42*).

Petit Archimède : Numéro Spécial Π (*n° 64/65 Mai 1980*).

(1) Texte extrait du "PETIT ARCHIMEDE, numéro Spécial π". n° 64/65. Mai 1980.

Le "Schéma de Horner" permet de calculer la valeur d'un polynôme de degré n en un point, à l'aide seulement du calcul itéré de la valeur de n fonctions affine .
L'intérêt actuel porté à l'algorithmique a récemment remis cette procédure à l'honneur. Nous vous en proposons deux présentations : la première est d'ordre géométrique, alors que la seconde fait appel aux micro-ordinateurs.

Les Orthogones

Collette BLOCH · Poitiers

Soit à faire calculer par une machine les valeurs prises par une fonction polynôme $f(x)$ pour différentes valeurs de la variable x. On sait que la méthode, due à Horner, est la suivante :

Si, par exemple, $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, on écrit

$$f(x) = ((ax+b)x + c)x + d$$

et on calcule :

$$A = ax + b$$
$$B = Ax + c$$
$$C = Bx + d = f(x)$$

Ainsi, on n'a jamais à calculer effectivement des puissances de x. Tous les calculs se coulent successivement dans le même moule "linéaire".

Il existe une méthode graphique qui reproduit exactement ce processus; c'est la méthode de Lill, ou des orthogones. Le texte qui suit est inspiré du *Cours de Calcul Informationnel Appliqué de Cullmann, Denis-Papin et Kaufmann (Albin Michel 1970).*

LA METHODE DES ORTHOGONES

Reprenons le polynôme du troisième degré : $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

Traçons, sur une feuille de papier, un carré ABCD sur lequel on choisit un sens de parcours (celui indiqué par les flèches de la figure 1). Par un point O de la figure, on trace la longueur algébrique $\overline{OO_1}$ = a sur un axe parallèle à AB et de même sens (sur la figure 1, on suppose que a est positif). Par le point O_1 ainsi obtenu, on mène un nouvel axe parallèle à BC et de même sens, sur lequel on porte la mesure algébrique $\overline{O_1O_2}$= b (sur la figure 1, b est positif), puis en continuant sur des axes successivement parallèles aux côtés du carré, on trace $\overline{O_3O_4}$= c (sur la figure 1, c est supposé négatif), puis $\overline{O_3O_4}$ = d (avec, d positif sur la figure 1). On poursuivrait la rotation dans le sens des côtés du carré si le polynôme était de degré supérieur à 3.

L'orthogone ainsi formé, ou orthogone fondamental, permet de trouver graphiquement la valeur de polynôme pour une valeur quelconque de la variable x.

Pour cela, on trace à partir de OO_1 un angle φ de sommet O, cet angle φ étant compris entre 0 et 90° et défini par la relation : $\tan \varphi = |x|$

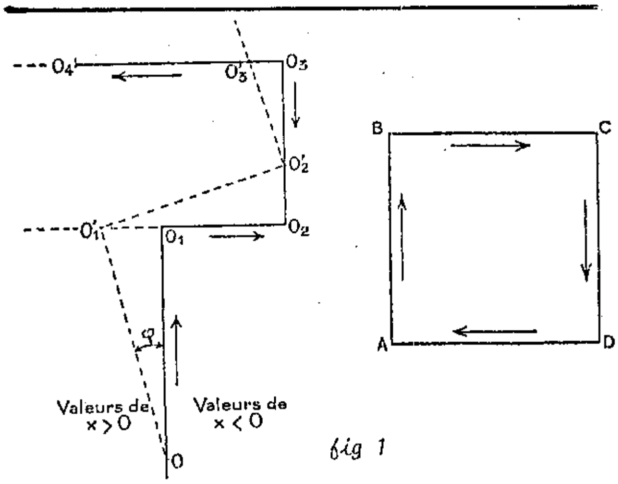


fig 1

l'angle étant tracé à gauche de OO_1 si la valeur choisie pour x est positive, et à droite dans le cas contraire. Le deuxième côté de l'angle coupe l'axe O_1O_2 en un point O'_1. Par ce dernier, on trace ensuite la perpendiculaire à OO'_1 qui coupe l'axe O_2O_3 en O'_2. Par O'_2 on mène la perpendiculaire à $O'_1O'_2$, droite qui coupe l'axe O_3O_4 en O'_3. On a ainsi tracé l'orthogone secondaire.

La valeur algébrique de $\overline{O'_3O_4}$ est la valeur du polynôme pour la valeur de la variable choisie (dans le cas de la figure 1, la valeur du polynôme est positive pour la valeur choisie de la variable).

Par exemple, la figure 2 montre comment on trouve la valeur du polynôme

$$f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 16 x + 9$$

pour les valeurs de la variable
a) x = 0,839 b) x = 1

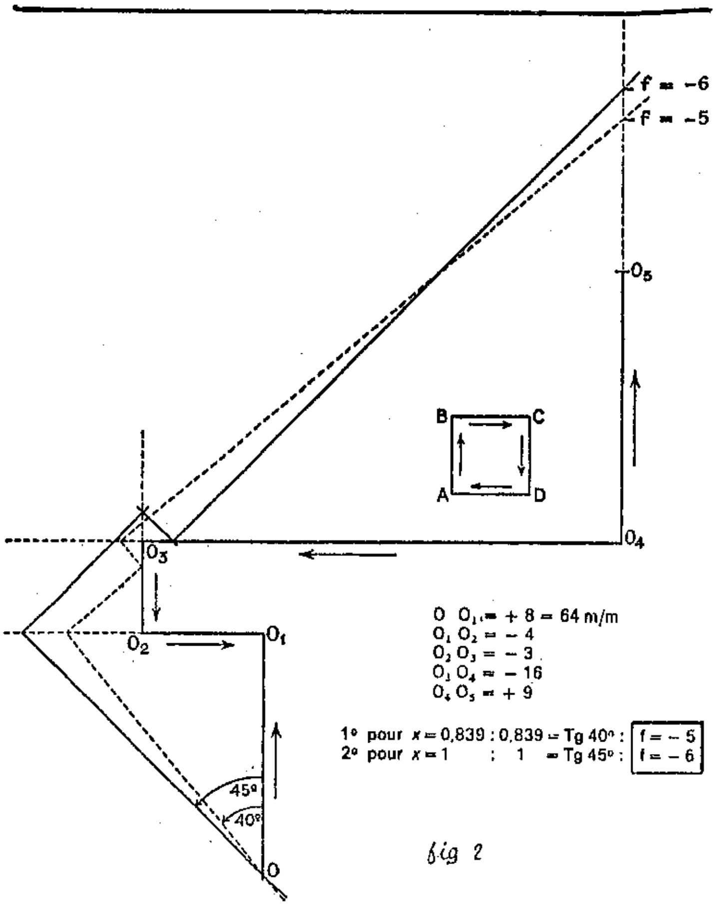


fig 2

DETERMINATION DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE

Il est évident que si le point O'_3 de la figure 1 coïncide avec le point O_4, la valeur de f(x) est nulle, et le réel x choisi est un des zéros du polynôme f. On peut donc déterminer graphiquement, par la méthode des orthogones, les solutions d'une équation algébrique.

Pour cela, on trace d'abord l'orthogone fondamental du polynôme f. Il s'agit ensuite de déterminer la direction du premier côté de l'orthogone secondaire pour que le point final du premier et celui du dernier coïncident. On y arrive par tâtonnements en s'aidant d'un transparent à quadrillage millimétré que l'on promène sur l'orthogone fondamental jusqu'à ce que la coïncidence cherchée soit obtenue.

Cette méthode est très rapide mais peu sûre s'il s'agit de déterminer toutes les solutions réelles d'une équation algébrique, car on peut oublier certaines d'entre elles. Par contre, s'il s'agit de connaître la plus grande solution, la méthode est très commode et donne de bons résultats.

Par exemple, la figure 3 répond au problème suivant :

Trouver la plus grande solution de l'équation :

$$x^6 + x^4 + x^3 + x^2 - 1 = 0$$

UNE JUSTIFICATION

En revenant à la figure 1, on constate les résultats suivants :

$\overline{O'_1O_1} = ax$

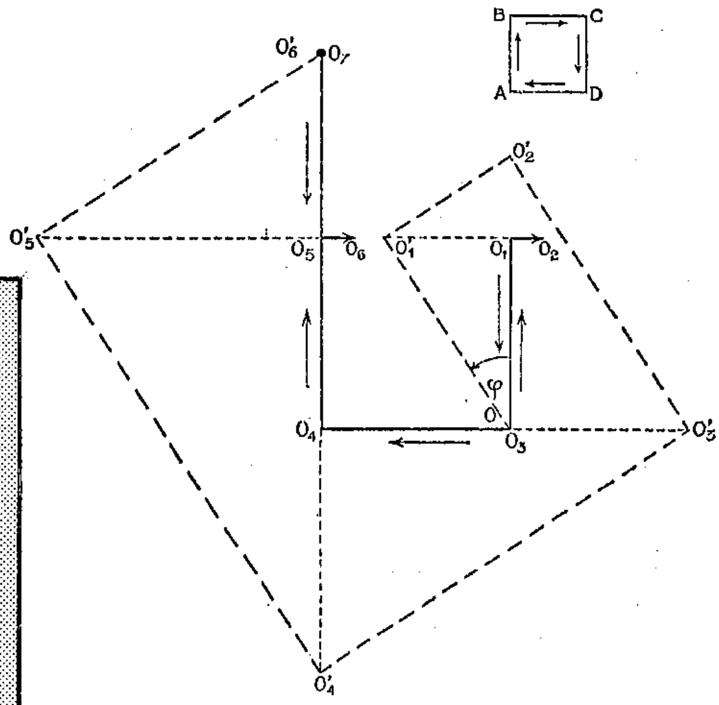
$\overline{O'_1O_2} = ax + b$

$\overline{O'_2O_2} = (ax + b).x$

$\overline{O'_2O_3} = (ax + b).x + c \quad (c < 0)$

$\overline{O'_3O_3} = ((ax + b).x + c).x$

$\overline{O'_3O_4} = ((ax + b).x + c).x + d$



O'_6 et O_7 coïncident : $\varphi = 33°30$ d'où Tg $33°30 = \boxed{0{,}66 = x}$

fig 3

Horner en Logo

Michel ARCOUET · Montréal

Cet article est extrait du "Bulletin du GRMS n° 37 d'octobre 1981". Le GRMS, (Groupe des Responsables des Mathématiques au Secondaire) est un sous-groupe de l'Association Mathématique du Québec, et rassemble les enseignants québécois enseignant au "Secondaire" (qui correspond, en gros, à notre Collège). L'article original comportait des programmes rédigés en "LOGO anglais". Ce langage étant fort peu utilisé en France, nous avons demandé à Jean-Claude DESPLAND, de l'Université d'Orléans, d'en assurer la traduction en "LOGO français".

Le but de cet article est de montrer l'importance de l'enseignement de certains concepts mathématiques et surtout de faire ressortir que certaines méthodes de factorisation ne méritent plus l'importance qu'elles ont actuellement. Celles-ci devraient être remplacées par d'autres, plus efficaces, plus générales et transposables sur des outils électroniques.

Le langage utilisé est le "LOGO en français".

La représentation d'un polynôme sous forme d'un produit de facteurs est très utile pour trouver les zéros ou racines. Elle l'est aussi pour la simplification des calculs.

Cependant, d'une part, d'après la théorie de Galois, nous savons qu'il ne peut pas exister de formules pour trouver ces racines dans le cas de polynômes de degré supérieur à quatre. De plus, les formules connues pour les degrés trois et quatre sont très complexes.

D'autre part, l'avènement des ordinateurs facilite très considérablement les calculs à répétitions. Aussi peut-on maintenant utiliser, pour résoudre ces types de problèmes, des méthodes d'itération très simples à comprendre mais trop longues pour le calcul "à bras".

C'est ainsi que pour l'évaluation des polynômes, la forme de Horner est devenue extrêmement pertinente.

On peut en effet, par des mises en évidence successives, modifier l'écriture d'un polynôme pour qu'il soit plus aisément évaluable.

Ainsi, le polynôme

$$3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 6$$

peut s'écrire

$$((((3)x + 4)x + 5)x + 2)x + 6).$$

En généralisant :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

peut s'écrire

$$((\dots((0)x+a_n)x+a_{n-1})x+\dots)x+a_1)x+a_0)$$

La partie (0)x aurait pu être omise puisqu'elle ne change rien. Cependant, l'écrire fait mieux ressortir la régularité. On trouve ainsi plus aisément le programme général du calcul de la valeur d'un polynôme donné pour une certaine valeur de x.

Enfin, on remarque aisément que l'important, dans un polynôme, est la liste ordonnée des coefficients. C'est pourquoi on utilise très fréquemment en mathématiques une représentation vectorielle de ces coefficients.

On tire directement de cette représentation le programme (fonction) LOGO suivant.

```
POUR POLY :COEF :X
RELIE "REP Ø
REPETE COMPTE :COEF [RELIE "REP :REP * :X
+ PREMIER :COEF RELIE "COEF SAUFPREMIER :COEF]
OUTPUT : REP
FIN
```

:COEF est la liste des coefficients.
:X est la valeur du paramètre (de la variable) X.

La première ligne du programme consiste à mettre Ø dans la variable de sortie, ce qui est équivalent à la partie (0)x de l'écriture du polynôme. Dans la deuxième ligne, pour chacun des coefficients, on répète l'opération (*x + (le nouveau coefficient)). La troisième ligne rend le paramètre disponible pour une autre fonction.

Ce programme fonctionne quel que soit le degré du polynôme. Il en ressort donc que la mise en évidence est une opération fondamentale. D'autre part, l'écriture vectorielle ou sous forme d'une liste est sûrement de beaucoup la plus simple lorsqu'il s'agit de programmes d'ordinateurs et ceci surtout dans les langages de type LOGO, PASCAL, LISP, APL.

Le polynôme

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 8$$

peut donc s'écrire

[3 -5 8.],

tandis que

$5x^3 + 2x = 5x^3 + 0x^2 + 2x + 0$

s'écrira

[5 0 2 0].

Evaluer $3x^2 -5x + 8$ pour x = 4 deviendra

```
ECRIS POLY [ 3 -5 8 ] 4
38
```

Evaluer $5x^3 + 2x$ pour x = -5 deviendra

```
ECRIS POLY [ 5 0 2 0 ] (-5)
-635
```

Evaluer 2x + 1 pour x = 5,3 deviendra

```
ECRIS POLY [ 2 1 ] 5,3
11,6
```

Evaluer la fonction constante y = 3 pour x = 7 est équivalent à évaluer f(x) = 3, c'est à dire évaluer le polynôme [3].:

```
ECRIS POLY [ 3 ] 7
3
```

Enfin, cette méthode et cette notation sont généralisables et applicables au calcul de la pente en un point (dérivée) et à l'utilisation de la méthode de Newton pour trouver les zéros de fonctions polynomiales et même de plusieurs autres fonctions réelles.

Soit une fonction polynomiale

$f(x) = 3x^2 - 5x + 8;$

la pente de la tangente en un point est donnée par la dérivée de cette fonction

$f'(x) = 3*2x - 5*1$

On remarque, d'après la structure des polynômes, que l'exposant de x est justement le rang -1 de ce x, d'où le nouveau facteur de chaque x dans la dérivée est le produit de l'ancien facteur par le rang -1.

On obtient alors le programme (fonction) suivant.

```
POUR PENTETG :COEF :X
RELIE "TG Ø
REPETE (COMPTE :COEF) - 1 [RELIE "TG :TG
  * :X + ((COMPTE :COEF) - 1) * PREMIER :COEF
  RELIE "COEF SAUFPREMIER :COEF]
OUTPUT :TG ; REM PASSAGE DU PARAMETRE
FIN
```

Ce programme (fonction) a la même structure que le précédent; on ne fait qu'y ajouter le produit du coefficient par le degré de x. On répète l'opération une fois de moins puisque le coefficient de degré 0 disparaît au moment de dériver.

Exemple : la pente de la tangente de

$f(x) = 3x^2 - 5x + 8$

pour x = 4 sera 19.

De même, la pente à la tangente à

$f(x) = 5x^3 + 2x$

pour x = -5 sera 377.

La pente de la tangente à f(x) = 2x +1 pour x = 5,3 sera 2.

Et aussi la pente de la tangente à la fonction constante f(x) = 3 à x = 7 sera 0.

```
ECRIS PENTETG [ 3 -5 8 ] 4
19

ECRIS PENTETG [ 5 0 2 0 ] -5
377

ECRIS PENTETG [ 2 1 ] 5,3
2

ECRIS PENTETG [ 3 ] 7
Ø
```

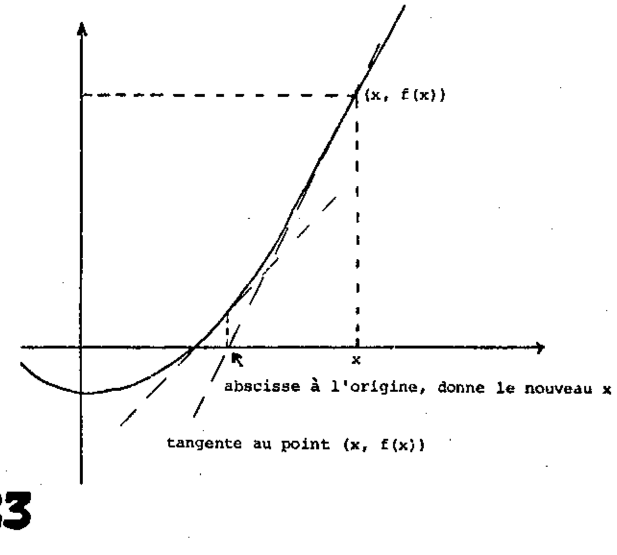
Nous voyons donc que la méthode est absolument générale d'où la très grande puissance de l'écriture.

LA METHODE DE NEWTON

Pour trouver un zéro d'une fonction f(x) dérivable :

1. On donne une valeur quelconque à x.
2. On calcule la valeur de la fonction pour cet x.
3. On trouve la tangente à cette fonction au point (x,f(x)).
4. On trouve l'abscisse à l'origine de cette tangente.

On recommence le processus en remplaçant x par l'abscisse trouvée plus haut.



Il est évident qu'il faut utiliser le processus avec prudence car on peut rencontrer des maximums ou minimums relatifs. Un programme complet devrait tenir compte de ces "accidents".

Ce processus converge très rapidement et, après un certain temps, le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Il suffit d'environ 5 à 8 itérations pour obtenir plus de 6 chiffres significatifs pour des degrés inférieurs à 5. D'où les programmes suivants.

```
POUR NEWTON :COEF :X
REPETE 10 [RELIE "X NOUVX :COEF :X]
FIN

POUR NOUVX :COEF :X
OUTPUT :X - (POLY :COEF :X)/PENTETG :COEF :X
FIN
```

Exemple : On cherche les zéros de $x^2 - 5x + 6$

```
ECRIS NEWTON [ 1 -5 6 ] 10
3,0

ECRIS NEWTON [ 1 -5 6 ] (-10)
2,0
```

Exemple : On cherche la racine quatrième de 625, ce qui est équivalent à trouver le zéro positif de $x^4 - 625$.

```
ECRIS NEWTON [ 1 0 0 0 -625 ] 10
5,0
```

Ces derniers exemples débordent largement le programme de mathématique du secondaire mais permettent aux enseignants de situer l'importance des polynômes de Horner et des méthodes itératives.

L'apparition des machines électroniques rend maintenant accessibles ces procédés. Aussi notre enseignement doit-il en tenir compte et même les favoriser.

Dans le cas particulier de la racine carrée, toute la méthode de Newton peut se résumer à recommencer le calcul répété suivant;

```
RELIE "DEB (:DEB * :DEB + :NB)/(2 * :DEB)
```

Si on ne commence pas le calcul trop loin de la réponse cherchée (voir les 2è, 3è et 4è lignes du programme ci-bas), il suffit de répéter dix fois le calcul pour obtenir plus de six chiffres de précision.

D'où le programme suivant qui est aussi une fonction.

```
POUR RCHR :NB
SI :NB < Ø ALORS ECRIS [RACINE CARREE D'UN
  NOMBRE NEGATIF] NIVEAU SUP
RELIE "DEB 1Ø
SI :NB > 1Ø ØØØ ALORS RELIE "DEB 1ØØØ
SI :NB > 1Ø ØØØ ØØØ ALORS RELIE "DEB 1ØØ ØØØ
REPETE 12 [RELIE "DEB (:DEB * :DEB + :NB)/
  (2 * :DEB)]
OUTPUT : DEB
FIN
```

CONCLUSION

Les polynômes de Horner présentent donc un très grand intérêt lorsqu'il s'agit d'évaluer des polynômes. Ils minimisent le nombre d'opérations à effectuer et permettent de réduire celles-ci à la répétition d'une simple multiplication suivie d'une addition.

Enfin, on voit tout de suite l'importance de la représentation "vectorielle" du polynôme. Qu'y a-t-il de plus simple que de représenter le polynôme par le vecteur de ses coefficients ?

Ce vecteur est ensuite immédiatement utilisable sous forme d'une liste de longueur quelconque.

Certains autres langages (APL, PASCAL, LISP) permettent une construction analogue. ●

Calcul Formel & Ordinateur

Jean-Louis NICOLAS · Limoges

Si vous demandez à votre calculette, ou à votre miniordinateur combien font deux et deux, vous aurez une réponse. Mais vous n'obtiendrez pas les identités remarquables comme

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Certains gros ordinateurs sont équipés pour le "calcul formel", c'est à dire pour traiter ce type de questions et d'ici peu de temps (si ce n'est déjà fait) les Universités pourront disposer d'un terminal ayant accès à un système de calcul formel. Comme pour les langages d'ordinateurs (Basic, Fortran, Algol...), la tour de Babel s'est reconstruite, et il existe plusieurs systèmes de calcul formel : REDUCE, FORMAC, FORDECAL, SCRATHPAD, ALTRAN, SAC, etc... Voici les possibilités qu'offrent actuellement la plupart de ces systèmes.

1) Arithmétique en multiprécision : on peut traiter des nombres entiers ayant quelques milliers de chiffres (ou moins) et aussi des nombres rationnels, mis sous la forme irréductible p/q automatiquement.

2) Polynômes à plusieurs variables à coefficients dans Z, ou Z/pZ, p étant un nombre premier. On peut ajouter, multiplier, faire la division euclidienne et suivant les puissances croissantes, substituer une variable par une expression, décomposer en produits de polynômes irréductibles, calculer le PGCD de deux polynômes. La mise en place de ces opérations a nécessité la construction de nouveaux algorithmes ou l'amélioration d'algorithmes déjà existants qui ont posé et qui posent encore des problèmes difficiles de mathématiques.

3) Calcul sur les fonctions rationnelles à plusieurs variables.

4) Manipulations d'expressions algébriques ou transcendantes. On peut ainsi travailler dans l'anneau $Z + \sqrt{2}Z$. La quantité $\sqrt{2}$ sera gardée comme telle, et son carré remplacé par 2. Cela pose des problèmes de simplification. Le système doit pouvoir simplifier

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$$

mais sait-il voir que

$$\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

est un nombre entier naturel ? Ou bien si l'on pose

$$\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

que l'on a $\alpha = \beta$?

On peut aussi faire de la trigonométrie, et rajouter aux fonctions de base du système des fonctions nouvelles en précisant les identités qu'elles doivent satisfaire (par exemple la fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto (x-1)e^x$ pour $x \geq 0$)

5) Calcul matriciel. On peut effectuer des calculs linéaires avec des matrices dont les éléments sont des polynômes à plusieurs variables. Inverse formel d'une matrice A, calcul de déterminants, résolution formelle de Ax = B, calcul de valeurs propres...

6) Différentiation. On peut différencier des polynômes, des fractions rationnelles composées de fonctions usuelles sin, exp, log...etc.

7) Intégration. Le système sait décomposer en éléments simples les fractions rationnelles et trouver leur primitive. Il sait également calculer les primitives usuelles que l'on est en droit d'exiger d'un taupin ou d'un étudiant de DEUG. De même que pour intégrer certaines fractions rationnelles ($\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$) on doit introduire des fonctions transcendantes, on peut introduire de nouvelles primitives (par exemple

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$ c'est le logarithme intégral) et demander au système de calculer de nouvelles intégrales en fonction de celles-là (par exemple $\int \frac{e^x}{x} dx$). Le système doit pouvoir décider si une intégrale proposée ne s'exprime pas en fonction des fonctions élémentaires (c'est à dire celles introduites dans le système). Tout cela pose des problèmes mathématiques qui ne sont pas tous résolus et qui avaient été laissés de côtés, parce que nécessitant des calculs rébarbatifs.

8) Résolution d'équations différentielles. Les méthodes classiques sont connues du système : équations linéaires, homogènes, à variables séparées, etc... Les problèmes sont de même nature, mais en plus difficiles, que ceux du paragraphe précédent.

9) Calcul de développements limités.

10) Calcul d'intégrales définies par la méthode des résidus.

Le mathématicien est intéressé à double titre par ces systèmes : en tant qu'utilisateur, on voit l'intérêt pour des travaux de recherche nécessitant de gros calculs; en pédagogie, l'influence de tels systèmes sur l'enseignement du calcul des primitives sera comparable à l'influence des calculettes à l'école primaire sur l'apprentissage des 4 opérations. Enfin, voici quelques questions que l'existence du calcul formel sur ordinateur amène à se poser.

C'est un exercice classique que de calculer

$$\sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{N} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

Pour quelles types de fractions rationnelles ce genre de simplifications a-t-il lieu ? Pour quelles fractions rationnelles $Q(x)$ la quantité

$$\sum_{x=1}^{N} Q(x)$$

est-elle une fraction rationnelle de N ? Ce problème s'apparente au problème de primitives : pour quelles fractions rationnelles $Q(x)$, $\int Q(x)dx$ est une fraction rationnelle. L'ordinateur sait résoudre ce type de problème maintenant. Mieux même. Si l'on pose

$$H(N) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x}$$

la simplification précédente n'a pas lieu et $H(N)$ n'est pas une fraction rationnelle de N. Mais l'ordinateur peut montrer que la quantité

$$K(N) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x^2}$$

est une fraction rationnelle de $H(N)$. Voilà, parmi d'autres, un problème soulevé par l'existence du calcul formel.

Quelques Livres

Gilbert WALUSINSKI : Ciel passé, présent. (Collection Axes-Sciences. Editions Etudes Vivantes).

"Est-il possible de comprendre les théories savantes de l'astronomie moderne?... Notre parti pris est donc de commencer par le commencement. Décrire d'abord les plus banales apparences,... Ensuite, placer les problèmes que cette observation propose dans leur perspective historique. Les méthodes ont changé depuis Képler,... Mais les grandes questions restent fondamentalement les mêmes. Où sommes-nous ? Comment cette complexe machine que nous appelons l'Univers fonctionne-t-elle ? Comment s'est-elle constituée ? Comment évolue-t-elle ?
Pratiquement, nous nous sommes efforcés d'écrire un livre accessible à un public curieux et de bonne volonté. (...) Nous avons voulu éviter tout pédantisme, mous n'avons pas craint d'être précis. Avons-nous réussi à être compréhensible ? Le lecteur est seul juge"

Ces lignes sont extraites de l'Avant-propos du livre. Que l'auteur se rassure : il a réussi à être compréhensible, et plus encore, captivant. Cela tient à la méthode suivie : remettre les pas dans ceux des grands découvreurs et ainsi rendre vivante cette partie de l'aventure humaine. Cela tient aussi au style clair, précis certes, mais aussi chaleureux, passionné, humain. Ainsi non seulement on comprend la loi des aires de Képler (ce protestant de Styrie obligé de se réfugier à Prague, en 1600, auprès de Rodolphe II), mais on comprend aussi comment il s'y prit pour la découvrir; et on comprend tellement bien qu'on pardonne à Képler de l'avoir découverte à partir d'une hypothèse fausse et d'une faute de calcul plus grave encore...
Il est des voyages dont on revient enchanté d'avoir beaucoup appris tout en se promenant dans de beaux paysages. Pour moi, ce livre est comme ces voyages.

Raymond Barra

QUI A DIT ?

REPONSE DE LA PAGE 7

C'est Evariste GALOIS (1811-1832), dans une lettre sur l'enseignement des sciences publiée par la Gazette des Ecoles du 2 Janvier 1831.

Dans les Revues

La GAZETTE APMEP d'Informatique n° 5 est parue (44 pages). Au sommaire, on trouve notamment :

- Hebenstreit J. : les ordinateurs à l'école, pourquoi ?
- Activités et publications "informatique" des IREM en 1981-1982.
- L'évaluation de l'expérience des 58 lycées.

SCIENCES & TECHNIQUES,,périodique édité par la Société des Ingénieurs et Scientifiques Français (I.S.F.) a consacré un dossier de Guy Benchimol, dans son n° 81 (Oct 81) à "Enseignement et Informatique".
ISF. 19 rue Blanche 75009 Paris.

Le bimestriel TERMINAL 19/84 publie dans son n° 7 un ensemble d'articles à propos des ordinateurs à l'école.
1 rue Keller. 75011 Paris.

La revue AUTREMENT a centré son numéro de février 82 sur "Informatique et vie quotidienne"
73 rue de Turbigo. 75003 Paris.

La revue de nos collègues suisses MATH-ECOLE propose un numéro double exceptionnel n° 100/101 (novembre 1981) : enseigner les mathématiques; pourquoi ? comment ?
SRP. 11 rue Sillem. CH 1207 Genève.

La REVUE DU PALAIS DE LA DECOUVERTE propose le texte intégral d'une des conférences du samedi "que fait un mathématicien pur, et pourquoi ?" par Serge LANG, dans son numéro de Janvier 1982.
Avenue F-D Roosevelt. 75008 Paris.

ORNICAR ?, bulletin périodique du champ freudien et diffusé par le Seuil, propose dans son numéro 24 une traduction d'un texte d'EULER "Solution d'un problème appartenant à la géométrie des situations" de 1736 sur les ponts de Königsberg.

DIOGENE publie les réflexions de Denis de Rougemont sur l'informatique et ses relations avec les processus de pensée, la formation culturelle et l'éducation sous le titre : " Information n'est pas savoir".

ELEMENTS POUR UN CENTENAIRE

AZRA (J-P) & BOURGNE (R) : GALOIS (Evariste) 1811-1832, in Encyclopaedia Universalis; tome 7 pages 450-451, 1968

DUPUIS (P) : La Vie d'Evariste Galois, in Cahiers de la Quinzaine, tome IV, n°6, 1903, avec une préface de Paul Tannery.

INFELD (L) : Le roman d'Evariste Galois (Whom the Gods love), traduit de l'anglais par J. Sully. Editions La Farandole, Paris 1957. (362 p.)

LESIEUR (L) : La vie d'Evariste Galois, in Bulletin de l'Apmep n° 232, 1963.

MUTAFIAN : Equations algébriques et Théorie de Galois (Des problèmes historiques. Les extensions de corps. Groupe de Galois d'un polynôme. L'utilisation des groupes de Galois). Vuibert 1980. (128 p).

GALOIS (E) : Lettre sur l'enseignement des Sciences, in Bulletin de l'Apmep n° 311, 1977.

GALOIS (E) : Ecrits et Mémoires mathématiques. Gauthier-Villars. Paris 1962.

Commission du Bilan

La COMMISSION DU BILAN a fourni un rapport intitulé "LA FRANCE EN MAI 1981". Une partie de ce rapport était consacrée à l'enseignement et au développement scientifique. Nous reproduisons ci-dessous, à titre d'information, le commentaire sur le chapitre I de ce bilan qu'a rédigé le professeur Laurent SCHWARTZ.

Les dernières décennies ont connu une profonde mutation mondiale des Mathématiques, due à l'influence d'une équipe de mathématiciens presque tous français, qui s'est donné le nom de Nicolas Bourbaki et a publié (et publie encore), depuis un peu plus de 40 ans des "Eléments de Mathématique" qui contiennent déjà près de 40 livres (cela fait bien partie d'un bilan : l'oeuvre de Bourbaki est connue dans le monde entier). Il est impossible de décrire ici la révolution apportée dans la pensée et la production mathématiques par cette oeuvre, mais elle est considérable. Elle n'a pas eu que des qualités ! Par exemple, elle a trop privilégié les mathématiques pures, ignorant presque totalement les mathématiques appliquées et même les probabilités. Les idées modernes de liens de toutes les sciences et connaissances entre elles, et des sciences (y compris mathématiques) avec la technologie, sont étrangères à Bourbaki (qui par contre a forgé l'unité des mathématiques). Les mathématiciens membres de Bourbaki possèdent par ailleurs tous une oeuvre individuelle dans les branches les plus diverses des mathématiques et n'ont jamais songé à faire de leur exposé une méthode d'apprentissage pour les jeunes, bien que leurs livres aient pris les mathématiques à leur début; ceci pour une raison bien connue des mathématiciens, à savoir que les fondements des mathématiques sont les parties les plus difficiles à exposer et parfois à comprendre; elles viennent donc au début d'un exposé général *destiné aux mathématiciens*, mais sûrement pas au début de la formation mathématique pour des jeunes, ou pour des physiciens et ingénieurs. Pour ne citer que quelques exemples, il faut bien expliquer aux enfants (comme aux ingénieurs !) ce que sont un angle, une aire, un volume alors que, dans une théorie mathématique cohérente, cela vient très loin dans l'exposé !

D'ailleurs tout le monde voit que le Postulat d'Euclide (et les géométries non euclidiennes) ont mis longtemps à être débrouillées par la science, alors que le parallélisme s'impose à nos yeux immédiatement. Les méthodes modernes d'exposition de la théorie des ensembles, des groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, espaces euclidiens, de la topologie générale...etc, se sont introduites peu à peu partout chez les mathématiciens, dans l'ensemble des enseignements des Universités françaises dans les années 50 et début 60, et à partir de là dans les grandes écoles, puis dans les classes préparatoires aux grandes écoles dans les lycées. Cette expansion a été féconde; elle a rencontré beaucoup d'oppositions, parce que ces exposés modernes heurtaient les habitudes acquises; mais elle est, dans l'ensemble, restée raisonnable. Aujourd'hui les physiciens, mécaniciens, ingénieurs, formés dans les écoles et Universités, ont adopté une bonne partie de ce langage, à l'échelle mondiale. Les excès du "bourbakisme" ont causé quelques ravages parmi les mathématiciens, comme toujours en pareil cas, mais de façon relativement limitée et contrôlée.

Hélas, il n'en a pas été du tout de même dans les enseignements secondaire puis élémentaire. On a peu à peu introduit les "Mathématiques Modernes" dans les lycées, puis les collèges et écoles primaires, même parfois aujourd'hui à la Maternelle. Il est clair qu'une certaine modernisation était nécessaire et bienfaisante. Le langage mathématique et même scientifique gagne toujours à être unifié, simplifié, axiomatisé. Les enfants ont bien mordu à des définitions claires, générales, abstraites, bien articulées, différentes de la pensée quotidienne immédiate. Enseignants, parents, enfants avaient un peu l'impression exaltante de participer à la compréhension collective de la science moderne. Les discussions et réflexions occasionnées à cet effet ont été fructueuses pour tous les partenaires.

Ici encore les IREM ont bien aidé à la pénétration des "Maths Modernes", prises au meilleur sens du mot. Cette réforme a d'ailleurs poussé les physiciens à réformer aussi la physique dans les lycées, et à l'introduire plus tôt; espérons que les biologistes feront de même.

Mais hélas, il y avait là une part énorme d'illusion. Les enseignants, parents, enfants, n'apprenaient pas là les "Mathématiques Modernes", mais juste le langage de base élémentaire qui sous-tend une mathématique moderne extraordinairement vaste dans le monde, diversifiée, puissante, dont ces définitions données dans les lycées et écoles (du monde entier !) n'étaient que l'ABC.

Un immense prosélytisme s'est emparé de tous, partout dans le monde, y compris dans les pays du Tiers-Monde, et a poussé ces méthodes extrêmement loin. On a peu à peu remplacé toute la richesse des anciennes mathématiques dans les lycées, théorèmes, figures géométriques, relations entre les mathématiques et les autres sciences, par une pléthore d'axiomes et de définitions, incompréhensibles pour une grande partie des élèves, et *très pauvre* en résultats. Une mathématique est riche si elle introduit peu de concepts et de structures, et beaucoup de théorèmes à leur sujet; la mathématique moderne des écoles ou collèges introduisait énormément de concepts et de définitions, et presque pas de théorèmes; c'est une mathématique *très pauvre*. Elle est formatrice pour une toute petite part, déformatrice dans sa majeure partie. Les enfants apprennent des structures nombreuses, dont ils ne rencontreront dans leur scolarité que très peu d'exemples. On a presque tenu à violer la conscience enfantine pour lui faire adopter à coup sûr des concepts rigoureux; en les forçant à représenter des droites par des "patates", on est effectivement plus sûr qu'ils ne commettront pas de pétition de principe, parce que les propriétés à démontrer, visibles sur des droites, ne le sont plus sur des patates, et qu'ils devront faire des raisonnements rigoureux ; malheureusement, en fait, la majorité des enfants ne comprennent même plus ce qu'on leur demande avec des patates qu'on appelle des droites.

On déforme d'ailleurs leur pensée sur les mathématiques. Le but des mathématiques *n'est pas* de démontrer rigoureusement ce que tout le monde voit; il est de trouver des résultats riches et, pour en être sûr, de les démontrer; certains sont visibles, immédiatement, la plupart ne le sont pas ! On a introduit à plaisir des définitions ampoulées, des flèches, des objets abstraits qu'aucun scientifique adulte, même mathématicien pur, n'a jamais manipulé et ne manipulera jamais (il y a aussi *beaucoup de flèches en mathématiques*, et il *faut* apprendre à s'en servir, mais ce ne sont pas celles-là). Il est difficile de fixer exactement où sont les responsabilités de cette avalanche. Ce qui est sûr, c'est que les mathématiciens de l'Université auraient dû freiner la course avant qu'elle ne soit galopante.

Ils sont restés un peu en dehors de cela, comme non concernés, sans connaître l'ampleur du mal qu'on faisait, au fond, en leur nom ! C'est regrettable. (L'auteur de ces lignes s'accuse aussi lui-même !). Les livres de mathématiques de l'enseignement secondaire ont joué là, sans doute, un rôle néfaste, donc aussi les éditeurs commerciaux, qui ont beaucoup gagné à ce changement de fond en comble (...) On en est un peu revenu aujourd'hui. L'enseignement des écoles ou lycées est encore trop pauvre, dans la partie mathématique; on fait trop de théorie des ensembles, pas assez de table de multiplication, pas assez de géométrie, pas assez de mathématiques appliquées à d'autres disciplines, mais on est revenu des grands excès antérieurs, et on peut espérer qu'on va vers une bonne stabilisation; les programmes mathématiques du lycée sont bien meilleurs qu'il y a quelques années. Mais cette histoire a eu des conséquences nombreuses. Elle a traumatisé les enseignants de l'Ecole élémentaire, des collèges, des lycées, qui ont eu à enseigner des "mathématiques modernes", très abstraites et qu'ils ne connaissaient pas; on a ainsi aggravé notablement la crise créée par le recrutement des Maîtres du Collège, et cela bien inutilement ! En outre les enfants des classes laborieuses sont beaucoup moins que les autres préparés aux abstractions, aux raisonnements faits sur des droites en dessinant des patates; les mathématiques modernes deviennent donc un instrument majeur de sélection sociale. Pour finir elles ont, fréquemment, discrédité les mathématiques et les mathématiciens dans un monde où les mathématiques (les vraies !) sont bien indispensables, dans un pays où les mathématiques sont une des sciences les plus florissantes et où la recherche a fait des progrès énormes dans les dernières décennies.●

APMEP

JOURNEES NATIONALES

POITIERS

SEPTEMBRE 1982