plot

BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

Sommaire du n° 18

ABONNEZ-VOUS

voir page 34

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

ADHERENTS DE L'APM !

Commandez ces brochures à votre Régionale, dont c'est une des seules ressources.
(Voir les adresses en dernière page).

Numéro de collection	Titre	Prix en francs port compris (1/12/1981)
8	**Mots I**, 1974, 100 p.	15
9	Elem-Math I, 1975, 56 p.	6
10	Carrés magiques par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p.	6
11	**Mots II**, 1975, 108 p.	15
12	**Substitutions et groupe symétrique** par J. Dautrevaux.	Epuisé
13	Mathématique pour la formation d'adultes (CUEEP) par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p.	22,50
14	A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2e édition, 1976, 220 p.	22,50
15	Mots III, 1976, 136 p.	17
16	Elem-Math II, 1976, 56 p.	8,50
17	Hasardons-nous, 1976, 220 p.	32,50
19	**Elem-Math III, La division à l'école élémentaire**, 1977, 100 p.	15
20	**Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques**, 1977, 280 p.	32,50
21	**Géométrie au premier cycle, tome 1**, 1977, 208 p.	32,50
22	**Géométrie au premier cycle, tome 2**, 1978, 328 p.	37,50
23	**Pavés et bulles** par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.	32,50
24	**Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM)**, 1978, 120 p.	25
25	**Mots IV**, 1978, 152 p.	17
26	**Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire**, 1978, 64 p.	14
27	**Pour une mathématique vivante en Seconde**, 1979, 128 p.	20
D1	**La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, dictionnaire de l'A.P.M.E.P.** 1962-1979, 113 notices, 211 fiches	67
28	**Analyse des données, tome 1**, 1980, 248 p.	37,50
29	**Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaires**, 1979, 192 p.	25,50
30	**Les manuels scolaires de mathématiques**, 1979, 280 p.	37,50
31	**Calculatrices 4 opérations (Elémentaire et premier cycle)**, 1979, 176 p.	20
32	**Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978** dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen [Bulletin 314]	2
33	**Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 1**, 1979, 248 p.	32,50
34	**Recherche inter-IREM, 1973-78, en géométrie de Quatrième-Troisième, dite "O.P.C." : réflexion critique et évaluation**, 1979, 160 p.	Epuisé
35	**Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes**, 1979, 104 p.	25
36	**Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Elémentaire**, 1980, 64 p.	11,50
37	**Mots V**, 1980, 114 p.	19
38	**Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2**, 1981, 140 p.	32
39	**Le renouveau de l'enseignement français des mathématiques**, 1980, 152 p. (brochure publicitaire réservée aux Congrès de Mexico et de Berkeley, 1980)	
40	**Analyse des données, tome 2**, 1980, 296 p.	40,50
41	**Fragments d'histoire des mathématiques**, 1981, 176 p.	46,50
42	**"Mini-grille" d'analyse des manuels scolaires de mathématiques**, 1981, 56 p.	17,50
43	**Mathématique active en Seconde**, 1981, 220 p. environ	45,50

Rapide Histoire des Numérations Ecrites

Daniel DAVIAUD · Jonzac

Ce texte est extrait du cahier n° 11 du Groupe du Clain (le Clain est, rappelons-le, la rivière qui arrose Poitiers), qui est consacré aux bases de numération. Ce texte constitue la première partie de ce cahier.

L'ensemble de ca cahier est disponible à l'IREM de Poitiers.

Les pages qui suivent rassemblent quelques renseignements grapillés dans des livres d'Histoire des Mathématiques. Tant mieux si elles incitent le lecteur à se documenter plus solidement sur la grande question des numérations adoptées par les différentes civilisations.

Un système de numération se caractérise par sa *base* et son *type*. Certaines numérations sont de type additif; ce qui veut dire que tout nombre y est égal à la somme de ses chiffres. Telle était la numération des Romains au temps où quatre et neuf s'écrivaient IIII et VIIII au lieu de IV et IX. D'autres systèmes sont positionnels : la valeur d'un chiffre dépend alors de la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre. C'est le cas de notre système, inventé en Inde et véhiculé en Europe par l'intermédiaire des Arabes. Enfin, il existe un troisième type de numération : le type hybride.

Nous n'allons pas ici nous intéresser aux types mais aux bases des numérations.

L'IDEE DE GROUPEMENT

Dans la génèse d'une numération, l'idée fondamentale est celle de réunir les unités pour former des groupements, puis de réunir ces groupements pour former un groupement d'ordre supérieur, etc... Cette idée est née de la nécessité d'utiliser des grands nombres et d'élaborer un calendrier chez les peuples qui possédaient des troupeaux nombreux et qui pratiquaient une agriculture assez développée.

DES GROUPEMENTS DE COMBIEN ?

Depuis Aristote, on répète qu'il est naturel de grouper par dix vu que l'homme a dix doigts et qu'il s'en sert pour compter. Cette thèse "biologique" explique assez bien la base vingt des Aztèques et des Mayas par la prise en compte des orteils. Mais que dire de la base soixante utilisée en Mésopotamie et des diverses bases recensées chez plusieurs centaines de tribus primitives américaines ? (Voir Dirk J. STRUIK "Stone Age Mathematica", Scientific American n° 179, december 1948 : source indiquée sur (2) page 4 et (5) page 7).

Dans 146 cas, on groupait par 10.
Dans 106 cas, on groupait par 5, ou par 5 et 10.
Dans 81 cas, on groupait par 2.
Dans 35 cas, on groupait par 20, ou par 5 et 20.
Dans 15 cas, on groupait par 4.
Dans 3 cas, on groupait pat 3.
Dans 1 cas, on groupait par 8.

Le groupement par douze, couramment utilisé dans le commerce des oeufs et des huîtres n'a pas donné lieu à une numération écrite. Il en est de même de groupements aujourd'hui oubliés mais révélés par les numérations orales. "Onze cents, douze cents, ... dix-neuf cents" rappellent un groupement par cent. Les nombres en "quatre-vingts" et l'hospice des "quinze-vingts" (300) fondé par Saint Louis pour abriter les aveugles pauvres évoquent un système vigésimal *(1)*. Selon (2) page 4, on a suggéré que le latin "novem" (neuf) doit être rapproché de "novus" (nouveau) : ce serait

(1) Extrait de l'Avare (Molière). Acte II. Scène 5.

Frosine : – *Vous êtes d'une pâte à vivre jusques à cent ans (....) Montrez-moi votre main. Ah, mon Dieu ! Quelle ligne de vie !*
Harpagon : – *Comment ?*
Frosine : – *Ne voyez-vous pas jusqu'où va cette ligne-là ?*
Harpagon : – *Hé bien ! Qu'est-ce que cela veut dire ?*
Frosine : – *Par ma foi ! Je disais cent ans, mais vous passerez les six-vingt.*

le début d'un nouveau groupe après un premier groupement de huit. Quant à "soixante-dix, soixante et onze, ... soixante dix-neuf", ils perpétuent le souvenir d'un système sexagésimal prestigieux mais disparu.

LA BASE DIX

Depuis les temps historiques, cette base a été utilisée par les Egyptiens, par les peuples sémites (Hébreux et Arabes), par les indo-européens (Hindous, Grecs, Romains), par les Chinois. Mais, dans l'écriture des nombres, on distingue souvent l'emploi d'un base auxiliaire. Ainsi ,chez les Romains, cinq joue un rôle spécial dans les écritures V, VI, VII,..., L, LX,..., D, DC, ... Dans la numération alphabétique grecque, , on observe un groupement par myriades (dix mille). Appolonius a su prolonger cette numération en considérant des myriades de myriades (10^8) puis des myriades de myriades de myriades (10^{12}). Dans le même ordre d'idée, notons que l'une des numérations écrites utilisée en Chine privilé - giait le nombre cent, et que notre manie de découper les grands nombres en tranches de trois chiffres équivaut à l'utilisation de 1000 comme base auxiliaire.

LA BASE VINGT

C'était la base de numération parlée des Mayas. Ce fut aussi celle de la numération aztèque. Quant aux numérations écrites mayas, exclusivement réservées au dénombrement des jours, elles présentent une particularité intéressante. L'unité appelée *kin* est une durée de un jour; vingt kins valent un *uinal*; dix-huit uinals valent un *tun*, vingt tuns valent un *katun*; vingt katuns valent un *baktun* et vingt baktuns valent un *pictun*. Si bien que les différents ordres ne sont pas 1, 20, 20^2, 20^3, 20^4, etc... mais 1, 20, 360, 20x360, 20^2x360, 20^3x360. L'apparition de dix-huit nous paraît saugrenue. Elle empêche cette numération de se prêter à des algorithmes opératoires simples. Mais comme l'année civile des Mayas avait 360 jours, cette irrégularité permet de voir instantanément le nombre d'années contenues dans un nombre de jours exprimé avec cette numération. Voilà ce qui intéressait les Mayas. Ici, c'est un problème de calendrier qui a influencé le choix des groupements.

En exercice, on pourra vérifier les correspondances suivantes : on a écrit en *italique* la numération écrite maya (codée avec nos chiffres), et en romain notre numération.

3.5	65 = 3x20 + 5
1.0.7	367 = 360 + 0x20 + 7
9.10.0	3440 = 9x360 + 10x20 + 0
1.5.5.0	9100 = 1x7200 + 5x360 + 200x0
	ou bien 25x360 + 100

LA BASE SOIXANTE

Elle est née au troisième millénaire avant JC, à Sumer, dans cette région où le Tigre et l'Euphrate débouchent dans le Golfe persique. Elle résulterait de la combinaison de dix et de six.

Aux alentours de 2000 avant JC, les Acadiens sémites fondent Babylone et supplantent les Sumériens. Mais alors que la base dix des Acadiens servira pour les comptes vulgaires, c'est la base soixante des vaincus qui est adoptée pour les calculs un peu compliqués. Elle sera utilisée en Mésopotamie pendant toute l'Antiquité.

Après la conquête de l'Orient par Alexandre le Grand (environ 330 avant JC), la science grecque s'enrichit d'apports babyloniens. L'astronome grec PTOLEMEE (150 après JC) exécuta tous ses calculs en base soixante. Car si la numération décimale grecque allait bien pour la partie entière d'un nombre, les fractions sexagésimales convenaient mieux que les fractions ordinaires pour les mantisses (voir (3) pages 39 et 50). C'est ainsi que nous avons hérité de la division sexagésimale du temps et des angles.

BASE DIX CONTRE BASE SOIXANTE

En Occident comme dans le monde musulman, les nombres sexagésimaux se perpétuèrent jusqu'à l'arrivée tardive des décimaux que l'on inventa et réinventa à plusieurs reprises. Dans un ouvrage paru à Damas en 952, AL-UQLIDISI utilisait les nombres décimaux. Ceux-ci tombèrent dans l'oubli jusqu'à ce que AL-KASHI, astronome à Samarkande, mort en 1436 environ, en donne une description complète (voir (6)).

Indépendamment, les nombres décimaux furedécouverts par Simon STEVIN de Bruges en 1582, auteur de "*La Disme, enseignant facilement à expédier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes*" (sans rompuz veut dire sans fraction).

Partisan du système décimal, Viète écrivait déjà en 1579 : "*En mathématiques, les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire, les millièmes et les milles, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines, et les progressions du même genre, ascendantes ou descendantes, doivent être d'un usage fréquent ou constant*" (voir (4) page 290).

La Révolution Française apporta son soutien à la base dix. A l'Ecole Normale en l'an III, le 11 pluviose, LAGRANGE reconnaissait que 12 ou 60 ont plus de diviseurs que 10, mais qu'on préfère le système décimal parce qu'il est plus universellement adopté (voir (4) pages 266 et 267).

L'invention et la promotion du Système Métrique annonçaient la mort de la base soixante. Dorénavant, on diviserait toutes les unités en 10, 100, 1000 etc... et il suffirait de pousser la virgule à gauche ou à droite pour les conversions. On divisa l'angle droit en cent grades. Mais il restait la division du temps. *"On peut croire cependant que la division décimale du jour remplacera la division actuelle, qui contraste trop avec la division des autres mesures, pour n'être pas abandonnée"* disait LAPLACE de 11 floréal de l'AN III à l'Ecole Normale (voir (4) page 295). Hélas, les réticences de l'industrie horlogère furent les plus fortes.

BASE DEUX CONTRE BASE DIX

On aurait pu croire à l'hégémonie universelle et définitive de la base dix. mais, dans les calculatrices électroniques, les éléments de mémoire (appelés *bits*, abrégé de *binary digits*) ne peuvent prendre que deux positions, 0 ou 1. C'est ainsi que les nécessités technologiques ont mis la base deux à l'honneur.

Néanmoins, dans beaucoup de cas, le nombre reste structuré en base dix, et ses chiffres sont codés en base deux. Ainsi 279 s'écrit 10.111.1001 ou plutôt 0010. 0111.1001. Ce système s'appelle le D.C.B. : *Décimal Codé Binaire*.

En fait, le procédé n'est pas nouveau. Les Babyloniens qui exprimaient leurs nombres en base soixante n'avaient pas soixante chiffres; chacun de leurs chiffres était écrit en base dix. C'était en quelque sorte du S.C.D. : Sexagésimal Codé Décimal. On retrouve le même principe chez les Mayas; chez eux c'était du V.C.Q. : Vigésimal Codé Quintésimal (base cinq).

En D.C.B., chaque chiffre binaire s'inscrit sur un bit. Quatre bits sont nécessaires pour enregistrer en binaire un quelconque chiffre décimal (vu que 9 s'écrit 1001). Mais six configurations de ces quatre bits n'apparaissent jamais : 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 et 1111 puisqu'ils correspondent à dix, onze, douze, treize, quatorze et quinze. Alors, pour rentabiliser l'usage des bits, on a pensé à la base seize, ou plus précisément au système Hexadécimal Codé Binaire. Pour les seize chiffres, on a prévu l'affichage

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A b C d E F

Par exemple, le nombre 2700 (base dix) s'écrit A8C en base seize (car $2700 = 10 \times 16^2 + 8 \times 16 + 12$) et il sera codé 1010.1000.1100.

L'électronique nous réserve d'autres surprises. On a construit des calculateurs dans lesquels les trois chiffres de la base trois se réalisent avec du courant plus, moins ou neutre.

Alors, on peut imaginer qu'un jour viendra où l'étude des bases négatives ou rationnelles ne sera peut-être plus seulement une question théorique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(1) G GUITEL : Histoire comparée des Numérations écrites *(Collection "Nouvelle Bibliothèque Scientifique". Flammarion. Paris 1975. 850 pages).*

(2) C.B. BOYER : A History of Mathematics *(Wiley & Son. 1968. 718 pages).*

(3) VAN DER WAERDEN : Science Awakening *(Tome 1. Noordhoff International Publishing. Leyden. Groningen. 1954. 306 pages).*

(4) P. DEDRON et J. ITARD : MATHEMATIQUES ET MATHEMATICIENS *(Magnard. 1952. 433 pages).*

(5) J.P. COLLETTE : HISTOIRE DES MATHEMATIQUES *(Tome 1 : jusqu'à Galilée (228 p.); Tome 2 : de Descartes à Hilbert (360 pages) Editions du Renouveau Pédagogique. Montréal. diffusé en France par Vuibert).*

(6) M. ABDELJAOUAD : Vers une épistémologie des décimaux : Contribution des Arabes à l'invention des décimaux. *((in Bulletin de liaison et d'information de l'Association tunisienne des sciences mathématiques. n°50. Juin 1978. pages 1 à 27).*

(7) Y. MAREC : L'arithmétique révolutionnaire à Rouen (1789 - 1799) *(in Etudes Normandes. 3-1980).*

Fonctions transcendantes & Calculatrices de poche

Jacky COURTOIS · POITIERS

Pour permettre à la technologie moderne de fonctionner, on va parfois chercher des recettes établies au XVIIè siècle ...

Vous avez été certainement étonnés de constater avec quelle rapidité, x étant affiché à l'écran de votre calculatrice scientifique, le calcul de sin x (ou cos x, exp (x)...) pouvait s'effectuer dès que la touche correspondante était activée. Vous êtes-vous posé la question d'imaginer comment la calculatrice pouvait procéder ? Mathématicien, il est toujours possible d'imaginer quelque développement classique en série entière, résultat de la mathématique des XVIIIe et XIXe siècle. En fait, nous allons voir que l'origine de l'algorithme utilisé (parfaitement adapté à la technologie -hardware- de la machine) est plus ancienne.

Avant de s'intéresser au travail même de la calculatrice, quels sont les moyens nous permettant de calculer par nous-même par exemple : cos 51°, 283532.
Avant l'usage maintenant généralisé des calculatrices scientifiques au lycée, il suffisait de chercher la valeur particulière dans une table dite trigonométrique et, dans le cas d'une valeur comme celle ci-dessus mentionnée, cela nous donnait par interpolation linéaire -méthode en elle-même pédagogiquement intéressante- le détail suivant :

cos 51° = 0,6295
cos 51°,50 = 0,6225
D'où cos 51°,283532 = 0,6295

$$+\left(\frac{0,6225-0,6295}{0,5}\right)\times 0,283532$$

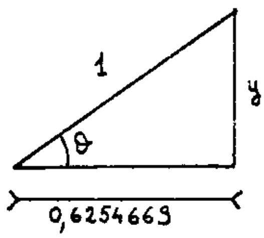
soit : 0,6255.

On peut imaginer la calculatrice comme une super table de valeurs trigonométriques, la frappe d'un quelconque x au clavier suivi de la touche fonction f correspondante déclenchant la recherche de f(x) de la même façon que nous avons lu cos 51° dans notre table de valeurs trigonométriques.

Si l'on prend l'exemple de la CASIO-Fx 80 Collège, affichant 8 chiffres avec 8 positions possibles pour la virgule décimale, cela représente 8 x 10^8 nombres différents, donc la mémorisation des valeurs d'une seule fonction f nécessiterait presque 1 milliard d'emplacements mémoire (et il y a cos, sin, tan, log...). Donc, pratiquement cette méthode est inutilisable (même sur gros ordinateurs).

Avant d'aborder quelques procédés mathématiques proprement dits, il est bon de remarquer que si une des valeurs trigonométirques d'un angle est connue, on peut facilement obtenir les autres

θ = 51°,283532   cos θ = 0,6254669(Casio)



En utilisant Pythagore :

$\sin\theta = y = \sqrt{1-(0,6254669)^2} = 0,7802507$

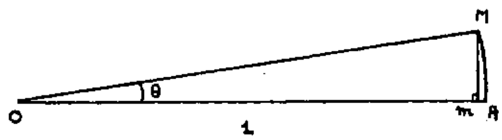
Il est ensuite possible d'obtenir tangente et cotangente, par exemple :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1,2474692$$

Les premières tables trigonométriques connues furent établies par l'astronome grec PTOLEMEE au 2ème siècle de notre ère. Il semble qu'elles furent établies à partir de deux idées :

(1) $\cos 2\theta = 2(\cos\theta)^2 - 1$

(2) si un angle est "très petit", il est possible d'avoir une bonne approximation de son sinus (il suffit de connaître sa mesure en radian)



Si OA = 1, m projection orthogonale de M sur OA, alors sin θ = Mm. Pour de petites valeurs de θ , Mm est "sensiblement égal" à la longueur de l'arc MA qui vaut $\frac{\theta}{360} \times 2\pi$ soit $\frac{\theta\,\pi}{180}$ (il faut remarquer que si θ est la mesure en degré de l'angle, $\frac{\theta\,\pi}{180}$ est sa mesure en radian).

Donc, si θ = 0°,4006525, $\frac{\theta\,\pi}{180}$ = 0, 0069927

Or la Casio donne

sin 0°,4006525 = 0,00699224

Ces considérations faites, il est possible de trouver cos 51°,28352

$\theta = 51,283532$

$\frac{1}{2}\theta = 25,641766$

$\frac{1}{4}\theta = 12,820883$

$\frac{1}{8}\theta = 6,4104415$

$\frac{1}{16}\theta = 3,2052208$

$\frac{1}{32}\theta = 1,6026104$

$\frac{1}{64}\theta = 0,8013051$

$\frac{1}{128}\theta = 0,4006525$

On a vu ci-dessus $\sin \frac{\theta°}{128} = 0,0069927$ en utilisant le calcul de $\frac{\theta°}{128}$ en radian. Puis par Pythagore

$$\cos \frac{\theta°}{128} = \sqrt{1 - (0,0069927)^2} = 0,9999755$$

Puis, il suffit de "remonter" en utilisant $\cos 2\alpha = 2(\cos \alpha)^2 - 1$

$$\cos \frac{\theta}{64} = \cos 2.\frac{\theta}{128} = 2(\cos \frac{\theta}{128})^2 - 1 = 0,9999022$$

$\cos \frac{\theta}{32} = 0,9996088$

$\cos \frac{\theta}{16} = 0,9984356$

$\cos \frac{\theta}{8} = 0,9937474$

$\cos \frac{\theta}{4} = 0,9750681$

$\cos \frac{\theta}{2} = 0,9015156$

$\cos \theta = 0,6254607$

Il est à remarquer que cette méthode nous donne cos θ avec 5 chiffres significatifs.

Plus récemment, les développements de Taylor permettent de meilleures approximations. En effet, on a vu que si x est la mesure en radian d'un angle "suffisamment petit", alors sin x ≈ x. On peut encore améliorer cette approximation avec le début du développement de sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \ldots$$

L'approximation, pour x petit, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ nous donnerait pour l'exemple précédent (θ = 0,0069927 radian)

sin x = 0,0069926 ce qui est le résultat fourni par la Casio.

Le développement de Taylor peut être poussé plus loin, x s'exprimant en radian,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \ldots\ldots$$

et de même

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots\ldots$$

Il est intéressant de remarquer que ces développements sont valables même si x n'est pas "petit". Plus x sera grand, plus bien sûr il sera nécessaire de calculer un nombre important de termes de la série (mais tout le monde sait que x! croît plus vite que x^n).

Exemple d'utilisation de ce développement pour le calcul de cos 51°,283532. La mesure en radian est $\frac{51,283532 \times \pi}{180} =$ 0,8950664

Le développement de cos x ne contenant que des puissances paires, il suffira de connaître $x^2 = 0,801144$

En utilisant l'algorithme dû à Horner pour le calcul des valeurs d'un polynôme,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}(1 - \frac{x^2}{12}(1 - \frac{x^2}{30}(1 - \frac{x^2}{56}(1 - \frac{x^2}{90}))))$$

(on s'arrête au terme $\frac{x^{10}}{10!}$)

Le calcul sur la Casio s'effectuera, sachant que x est stocké en mémoire, par :

MR : 90 − 1 = x MR : 56 + 1 = x MR : 30 +/− + 1 = x M : 12 = +/− + 1 = x MR : 2 = +/− + 1 =

On obtient 0,6254669 qui est la valeur exacte à huit chiffres près.

Dans ce genre de développement, x peut prendre toutes les valeurs possibles. L'erreur commise est inférieure au premier terme non calculé. Il suffit donc de calculer chaque terme jusqu'à ce que $\frac{x^n}{x!}$ soit inférieur à 10^{-8}, la machine affichant au plus huit chiffres. Malheureusement, il y a au moins deux os !!!

(1) Les erreurs d'arrondi sur x^n et sa division par n!
(2) Le nombre important de multiplications et de divisions.

De plus, en tenant compte de la quasi-simultanéité de la réponse après la frappe de la touche fonction correspondante, il semble évident que cette méthode n'est pas utilisée dans les calculatrices pour le calcul de cette fonction (ceux qui ont une calculatrice programmable peuvent essayer de programmer une telle méthode de calcul de cos x, ils verront que le temps d'exécution du calcul est loin d'être négligeable).

Le développement de Taylor, utilisable pour toute valeur de x n'est certainement pas la méthode la plus rapide d'obtention de sin ou cos. Chacun sait que sin π = sin(π − 0) = sin 0 = 0. La méthode utilisée ci-dessus, après un temps plus ou moins long, nous donnerait approximativement sin π = 0. En fait, il n'est pas utile d'avoir une méthode qui couvre toutes les valeurs de x, il suffit de pouvoir couvrir l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et, en utilisant les formules classiques de transformation, il est aisé de déduire toutes les autres valeurs. De plus, en se limitant à un intervalle restreint, il va être possible de simplifier les expressions de calcul.

Un exemple pour illustrer ce propos. Nous allons supposer x compris entre 0 et 90° et le développement de Taylor de sinus

$$\sin x = \frac{x.\pi}{180} - \frac{(x\pi/180)^3}{6} + \frac{(x\pi/180)^5}{120} - \frac{(x\pi/180)^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce qui donne avec les valeurs numériques données avec 6 chiffres significatifs

$$\sin x = 0.0174533x - (8.860960\times10^{-7})x^3 + (1.34960\times10^{-11})x^5 - (9.78839\times10^{-17})x^7 + (4.14127\times10^{-22})x^9 - (1.4682\times10^{-27})x^{11} + (2.23937\times10^{-33})x^{13} - \ldots$$

Vous pouvez penser qu'il y a trop de termes, mais si vous voulez une bonne approximation entre 0 et 90, le calcul ci-dessous va vous montrer qu'il n'en n'est rien.

Pour simplifier, avec x=100, le dernier terme donne :

$2.23937\times10^{-33}x(100)^{13} = 2,24.10^{-7}$ ce qui est assez important pour affecter la sixième décimale de la réponse.

Une réduction intéressante de ce développement est connue sous le nom de polynôme d'approximation de Tchebyschev. Il est possible de trouver un polynôme de degré donné capable de fournir la meilleure approximation de toute fonction sur un intervalle donné. Dans l'exemple ci-dessus, le meilleur polynôme de degré 5 couvrant [0,90°] est :

$$\sin x^0 \simeq 0.0174480x - (8.8079698.10^{-7})x^3 + (1.2168098.10^{-11})x^5$$

Il donne des valeurs remarquables, sin x exact avec 4 décimales.

Il est encore possible de réduire à [0,45°]avec le polynôme

$$\sin x^0 \simeq 0,0174532x - (8.8575\times10^{-7})x^3 + (1.3153\times10^{-11})x^5$$

Si l'on compare le résultat donné par les tables, le résultat par calcul avec le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 13 et le résultat de sin x donné par le polynôme ci-dessus pour les valeurs 0,1...45, les valeurs sont identiques jusqu'à la sixième décimale. De plus, il est aisé de calculer toute autre valeur. Exemple :

$$\sin 81° = \cos 9° = \sqrt{1-\sin^2 9°}$$

Pour le lecteur souhaitant plus de développement sur cette question, nous lui laissons le soin de se plonger dans un traité classique d'analyse numérique [voir par exemple biblio.(7)].

COMMENT CALCULE LA CALCULATRICE ?

En fait, l'algorithme de calcul utilisé dans les calculatrices est original par rapport aux procédés classiques du calcul numérique que l'on rencontre lors d'études universitaires.

La méthode utilisée (dans la plupart des cas, chez HP et TI en particulier) est une adaptation de celle, décrite en 1624 par Henry Briggs dans l'ouvrage "Arithmetica Logarithmica", adaptation faite par un ingénieur américain du nom de Volder pour une firme aéronautique (pour un calculateur capable de réaliser rapidement les calculs trigonométriques et logarithmiques de navigation). Cette adaptation porte le nom de CORDIC (COordinate Rotation DIgital Computer).

Le calcul, intéressant au point de vue technologique se fait uniquement à l'aide d'additions et de soustractions, l'angle étant d'abord exprimé en radian et ramené entre 0 et 2π (on remarquera que moyennant quelques constantes stockées en mémoire morte (MEM) de la calculatrice, tout calcul trigonométrique se fera à partir de la valeur de la tangente d'un nombre entre 0 et $\frac{\pi}{4}$). Il suffit de stocker un certain nombre de valeurs en mémoire morte, valeurs notées a_i définies de la façon suivante :

a_0= Arc tg 1	= 0,7853981	(soit $\pi/4$ ou 45°)
a_1= Arc tg 0,1	= 0,0996686	5°,7105931
a_2= Arc tg 0,01	= 0,0099997	0,5729387°
a_3= Arc tg 0,001	= 0,001000000	0,05729575°

et ensuite

a_i= Arc tg 10^{-i} = 10^{-i} (pour i > 3) et

cela jusqu'à la précision de la machine (8 pour la CASIO par ex.)

L'algorithme de calcul serait alors (x en radian).

```
Début
lire x ; i ← 0 ; y ← 0 ; X ← 1
tant que i ≤ 8 faire début
tant que x > a_i faire début
        k ← 10^-i ;
        x ← x - a_i ; X_0 ← X ;
        X ← X - ky ;
        y ← k X_0 + y ;
        fin
        i ← i + 1
        fin ;
écrire "tg x = " = y/X
fin.
```

La méthode consiste alors à se rapprocher de l'angle donné par pas de a_1 en lui soustrayant a_1 autant de fois que l'on peut puis, par pas de a_2 etc...

En étudiant l'algorithme d'un peu plus près, on remarque que cette méthode est analogue à celle de la division de x par y par soustractions successives.

```
      Début
lire x, y ; q ← 0
tant que x ≥ y faire début
                x ← x - y ;
                q ← q + 1 ;
                fin
quot ← q ; reste ← x
fin.
```

Si on désire un résultat plus précis (précision de 8 chiffres par ex.) ; on divise le diviseur par 10 et on recommence.

Cet algorithme est parfaitement adapté aux calculatrices ; en général au bout d'une dizaine d'itérations, la ligne trigonométrique est calculée. La suite d'opérations à effectuer est identique aux multiplications et divisions et les multiplications par k ne sont que décalages de chiffres ($k = 10^{-i}$).

Si l'on reprend l'exemple pris au début de cet article $x=51°,283532=a_0+a_1+a_2$ comme par hasard!!!) = 0,8950664 radian. En appliquant l'algorithme ci-dessous :

	x	i	Y	X	k
début	0,8950664	0	0	1	
1	0,1096683	1	1	1	1
2	0,0099997	2	1,1	0,9	0,1
	0	3	1,109	0,889	0,01

D'où Y/X = 1.2474691

D'où tg 51°,283532 = 1.2474691 (valeur donnée par la Casio).

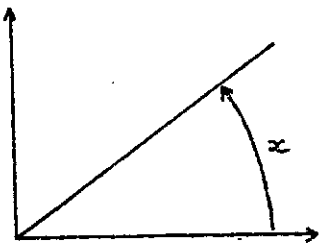
Pour obtenir cos, il suffit de faire

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = 0,6254669$$

On se rend compte de la rapidité d'exécution et de calcul d'un tel algorithme (addition et soustraction sont de l'ordre de 10^{-6} s, seuls les tests sont un peu plus lents).

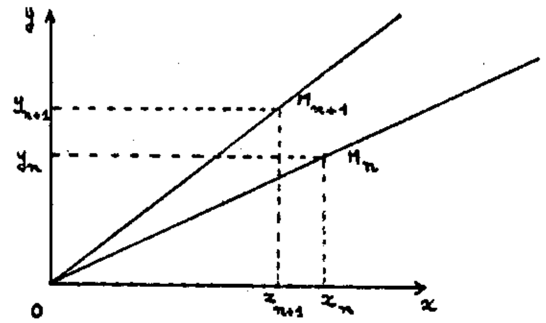
QUELQUES EXPLICATIONS

Chaque itération se rapproche de l'angle donné par pas successifs : a_1 puis a_2... Y/X est la tangente de l'angle se rapprochant de θ à une itération donnée.



Il reste à montrer que ce rapport "tend" vers tan x.

Soit le point $M_n(x_n,y_n)$



$(\vec{Ox}, \vec{OM_n}) = \theta_n$

et considérons le point M_{n+1} défini par l'itération suivante

$$M_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1} \text{ où } \begin{cases} x_{n+1}=x_n-k\ y_n \\ y_{n+1}=k\ x_n+y_n \end{cases}$$

(voir algorithme)

$(\vec{Ox}\ ,\ \vec{OM_{n+1}}) = \theta_{n+1}$

Pour vérifier que $\frac{Y}{X}$ tend vers tan x, il suffit de montrer que

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \text{Arc tg } k = \theta_n + \alpha_k$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1+k^2$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+k^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{1+k^2} & -\frac{k}{1+k^2} \\ \frac{k}{1+k^2} & \frac{1}{1+k^2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix}$$

donc c'est la matrice d'une rotation d'angle défini par

$$\sin\alpha_k = \frac{k}{1+k^2},\ \cos\alpha_k = \frac{1}{1+k^2}$$

donc $\tan\alpha_k = k$

D'où $\alpha_k = \text{Arc tg } k$

Donc la transformation $M_n \to M_{n+1}$ est la composée d'une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{1+k^2}$ et de la rotation de centre O et d'angle Arc tg k

D'où $\theta_{n+1}=\theta_n+\text{Arc tg } k$

Donc $\frac{Y}{X}$ tend vers tan x.

QUELQUES NOTES SUR LES LOGARITHMES

La même rapidité de calcul et la même méthode se retrouvent dans le calcul d'un logarithme (décimal ou népérien :

$$\log_{10}x = \frac{\ell n\ x}{\ell n\ 10},\ \text{d'où en mémoire}$$

morte, on stocke ℓn 10).

Tout nombre est représenté de façon interne en virgule flottante $A= x \times 10^p$ $(a > 0)$. Alors $\ell n\ A= \ell n\ x + p\ell n10$ avec $1 \leqslant A < 10$

Cette fois-ci les constantes stockées en MEM seront :

$A = \ell n\ 10$

$A_0 = \ell n\ 2 = \ell n(1 + 10°)$

$A_1 = \ell n1.1 = \ell n(1 + 10^{-1})$

$A_2 = \ell n1.01 = \ell n(1 + 10^{-2})$

.

.

.

$A_i = \ell n(1 + 10^{-i})$ (nombre fonction de la précision de la machine)

$(a_i = 1 + 10^{-i})$

```
Début
    lire x ; p ← 0 ; X ← x ; Y ← A ;
tant que p ⩽ 8 faire début
            si X * (1+10^-p) < 10 alors
            début
            Y ← Y - A_p
            X ← X * (1+10^-p)
            fin
            sinon   p ← p + 1
            fin;
    y ← Y + (X/10-1)
fin.
```

On peut en fait se contenter de faire une dizaine d'itérations sans attendre le test d'arrêt p > 8 !!

En conclusion, le calcul de fonction sur un calculateur de poche est réalisé avec une grande précision avec des techniques de calcul et des algorithmes particulièrement adaptés à la technologie de ces machines. Il est assez intéressant de constater que notre technologie du XXe siècle trouve aussi son bonheur dans les outils mathématiques du XVIIe.

BIBLIOGRAPHIE

(1) DELEDICQ-VASEHALDE : *Le calculateur programmable de poche.* (p.112 à 115). CEDIC.

(2) SMITH(Jon) : *Méthodes numériques pour calculateurs de poche.* (p.38 à 42). EYROLLES.

(3) KOKANOSKY(B)-LAMARD(J.L.) : *Voyage au coeur de votre calculatrice ou Coordinate rotation digital computer and co* in, Régionale AMP d'AMIENS : Journées de la Régionale APM-IREM (22-23 avril 1981).

(4) VOLDER(J.E.) : *The Cordic Trigonometric Computing Technique* IRE Transactions on Electronic Computer. (Sept. 1959).

(5) KROPA(James C.) : *Calculator algorithms.*

(6) Mathematics Magazine, Vol.61, n°2, march 1978(p. 106 à 109).

(7) LEGRAS(J) : *Méthodes et techniques de l'Analyse Numérique.* DUNOD (1971).

(8) BRIGGS (H) : *Arithmetica Logarithmica sine Logarithmorum. Chiliades Triginta* (Londres 1624).

LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDR RIVENT
LES POL ARRIVENT
LES POL EDRES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT
LES POLYEDI RIVENT
LES POLYEDRE RIVENT
LES POLYE VENT
LES POL ENT
LES POL ENT
LES POLY ES ARRIVENT
LES POLYEDRES ARRIVENT

voir page 30

Vers la proportionnalité

Jacques BELLICAUD · Poitiers

Un intéressant travail d'approche du concept de la proportionnalité à l'Ecole Primaire, qui peut aussi donner des idées à d'autres niveaux d'enseignement.

Ce travail a été réalisé dans un C.M.1 de 27 élèves, sous la conduite d'un Conseiller Pédagogique et du maître titulaire de la classe.

Ayant retenu l'idée que toute situation de proportionnalité peut se représenter graphiquement (fonction linéaire), nous avons essayé de déterminer une démarche possible faisant appel aux représentations, sans aucune ambition, et bien conscients du fait qu'il y a certainement beaucoup à "dire" et à "contester".
Trois étapes essentielles furent prévues:
1. La représentation graphique
2. L'étude de différentes représentations
3. Une représentation particulière : la fonction linéaire.

LA REPRESENTATION GRAPHIQUE

La lecture de la revue "l'Education" dans son numéro 367 du 9 novembre 1978 page 21 "*Pédagogie quotidienne : le cahier d'appel*" nous offre le point de départ. L'utilisation du tableau à double entrée de ce registre ne peut-elle pas servir de support à une représentation graphique ?
Nous décidons donc de mettre dans les mains des élèves répartis en groupes de quatre (groupes hétérogènes) des registres d'appel journalier des années antérieures, sans aucun commentaire. Nous demandons seulement aux enfants de formuler sur une feuille leurs questions et leurs observations.
Nous ne rapportons pas ici le détail des questions posées et celui des observations formulées mais nous précisons que plusieurs d'entre elles ont fait l'objet, dans un autre temps, de séquences de vocabulaire, de lecture et aussi d'activités d'éveil (lois sur l'obligation scolaire par exemple...). Toutes les questions ou observations exprimées sont discutées, justifiées par les élèves eux-mêmes, sans intervention magistrale dans la plupart des cas.

Citons ici une question particulièrement riche : *"A quoi sert le tableau de la fin ?"* et la réponse d'un enfant : *"Le tableau remplace toutes les pages"*. Un peu surpris, les élèves entreprennent de vérifier cette proposition, ce qui donne lieu à un bon nombre d'activités ayant trait au calcul numérique : calcul du nombre de présences possibles au maximum, calcul du nombre de demi-jours de classe du mois, calcul du nombre total des présences effectives ...

Chaque groupe reconnaît comme valable la réponse donnée et un autre élève conclut alors : *"Le tableau de la fin est un résumé des différents mois"*. Cette dernière constatation explicitée par les enfants est intéressante en ce sens qu'elle va permettre d'organiser la suite du travail sur le tableau final récapitulatif plutôt que de feuilleter sans cesse le registre.

C'est à cette étape que nous présentons au tableau, artificiellement et, il faut le dire, sans aucune motivation particulière pour les enfants, le résumé partiel suivant d'un tableau récapitulatif de registre d'appel.

Mois	*Nombre total d'absences du mois*
Septembre	*4*
Octobre	*14*
Novembre	*24*
Décembre	*18*
Janvier	*42*
Février	*38*
Mars	*38*
Avril	*16*
Mai	*28*
Juin	*57*

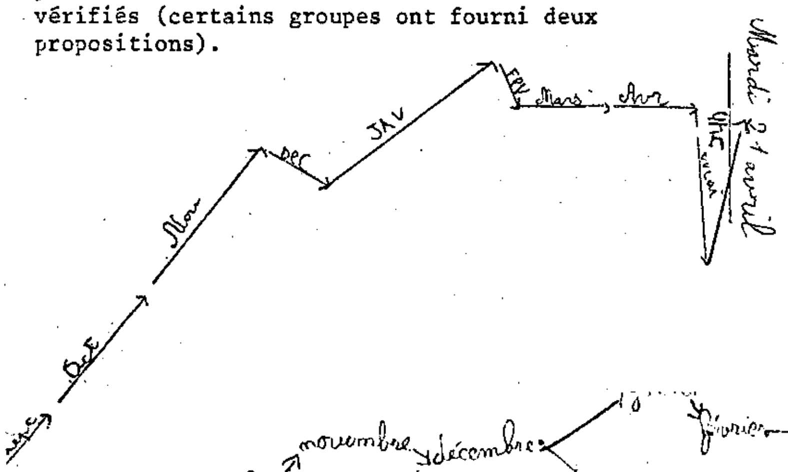
La question posée est celle-ci : *"Pouvez-vous imaginer d'autres représentations ?"*. A part une disposition différente de ce tableau, aucune proposition n'est émise. La situation semble bloquée.

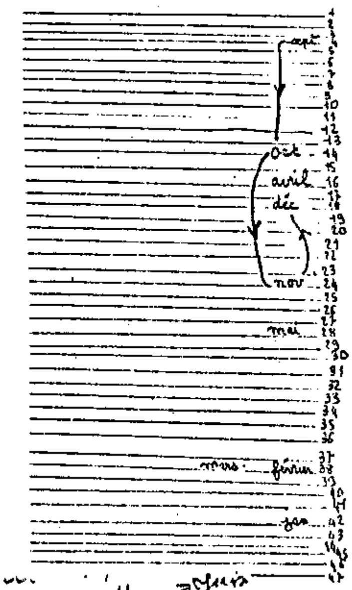
C'est alors que nous demandons aux enfants de *"dire des choses vraies"* concernant ces deux colonnes.
Les premières réflexions fusent rapidement, les enfants sont rassurés : *"Au mois de Septembre, c'est là qu'il y a le moins d'absences"* . *"Au mois de Février et de Mars, il y a le même nombre d'absences"* . *"Au mois d'Octobre, c'est le deuxième mois où il y a le moins d'absences"*.

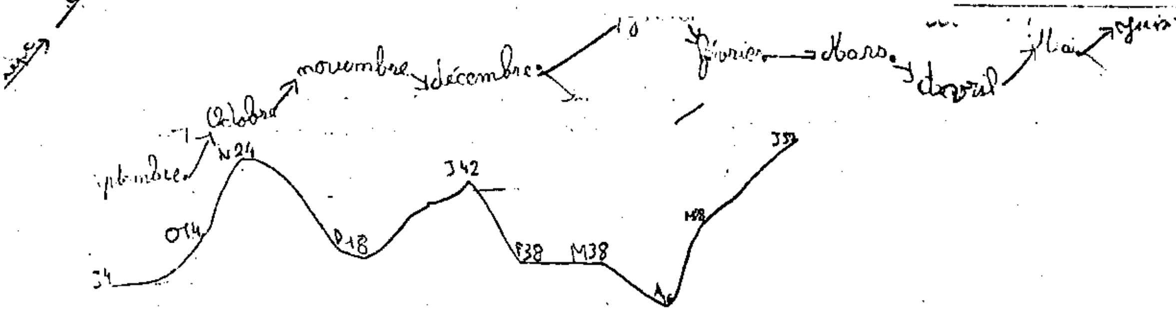
Les élèves travaillent donc beaucoup sur la comparaison des nombres. Une proposition est bientôt privilégiée : *"Ca monte, ça monte, ça descend..."* et un élève d'ajouter : *"On dirait des montagnes"*. Nous savons fort bien que cette façon de privilégier une réflexion est très discutable, mais a-t-on toujours le droit d'attendre ?

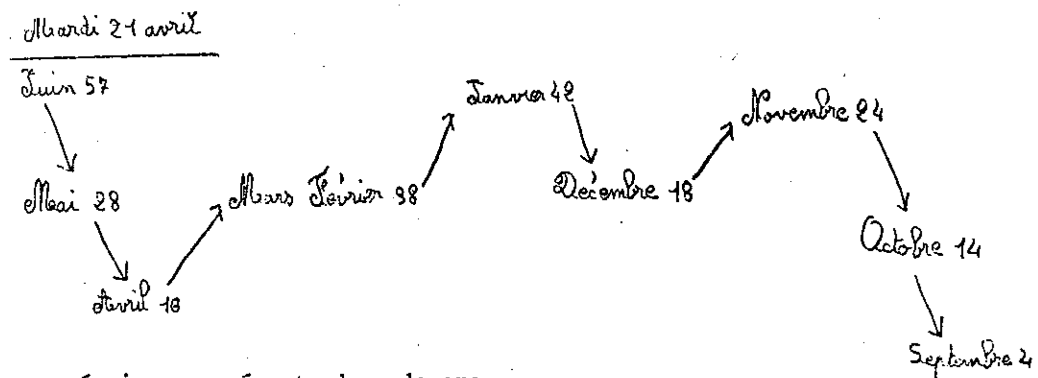
Nous renouvelons donc alors notre question qui est cette fois plus précise : *"Vous devez travailler une représentation sous forme de montagnes".*

Nous donnons ci-contre quelques travaux présentés. Tous ceux-ci furent discutés et vérifiés (certains groupes ont fourni deux propositions).







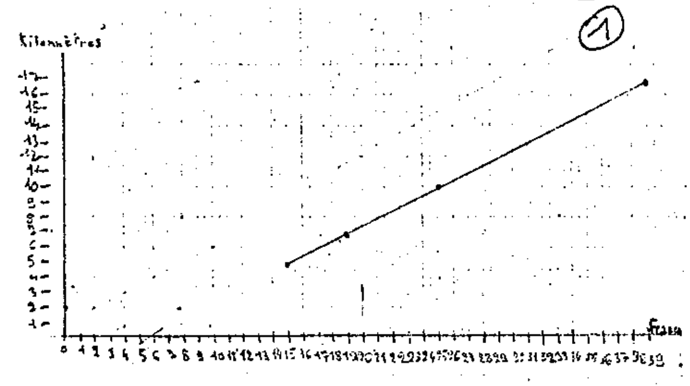


Aucune équipe ne présente donc de graphique comme nous l'aurions aimé, et nous imposons la méthode : sur l'axe horizontal nous indiquerons les mois et sur l'axe vertical gradué le nombre d'absences. Le "modèle" est présenté au tableau.

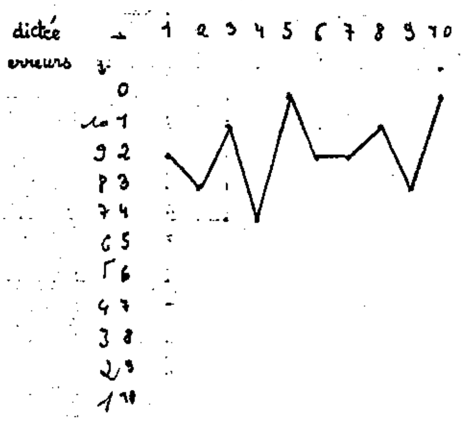
Un élève déclare alors : *"Quand j'étais à l'hôpital, il y en avait un au pied de mon lit pour la fièvre".* Cette réflexion nous conduit à demander aux enfants de rechercher, dans la semaine, des représentations graphiques. La recherche, fructueuse, a également conduit à des activités d'éveil, en particulier des relevés de température.

Afin d'évaluer si les élèves sont en mesure d'établir la représentation graphique d'une situation, nous proposons un travail à chaque groupe. Voici quelques exemples de textes proposés et du travail correspondant des groupes.

Voici des tarifs d'un déplacement en taxi :
pour 5 km, on paye 15 F
pour 7 km, " " 19 F
pour 10 km, " " 25 F
pour 17 km, " " 39 F

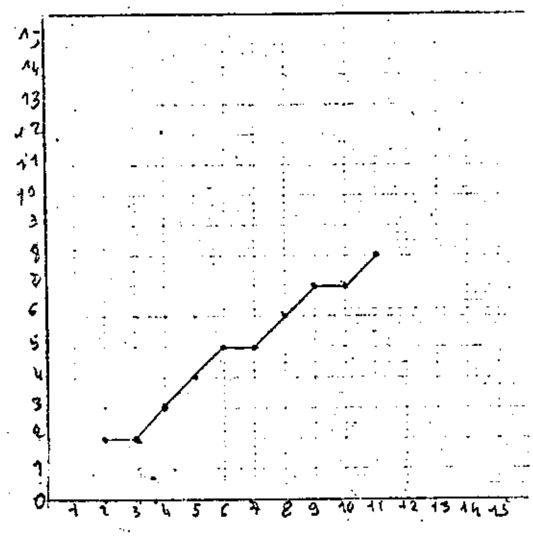


Voici le nombre d'erreurs de Pierre dans ses dictées depuis les vacances de Pâques:
1è dictée : 2 erreurs; 2è dictée : 3 erreurs
3è " : 1 " ; 4è " : 4 "
5è " : 0 " ; 6è " : 2 "
7è " : 2 " ; 8è " : 1 "
9è " : 3 " ; 10è " : 0 "

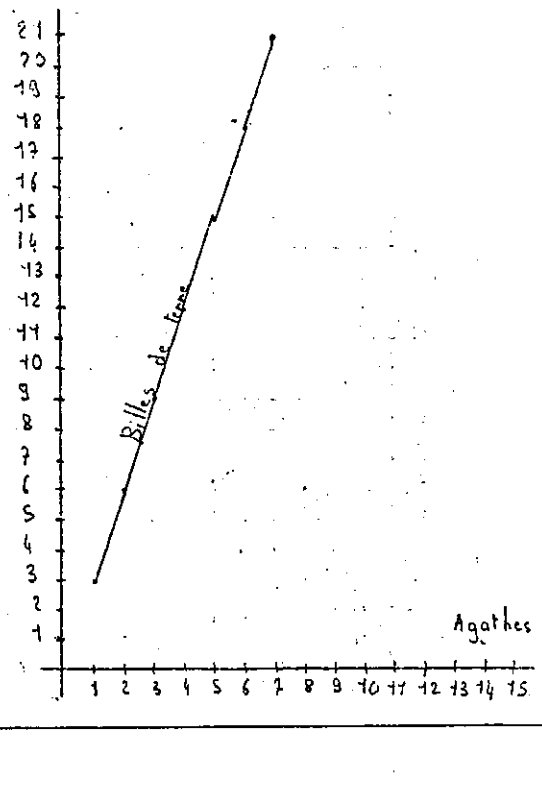


Les élèves ont, lors de la discussion, pris conscience de l'importance du point 0; en outre, ils ont également convenu que la plupart des graphiques étudiés ne sont pas orientés ainsi.

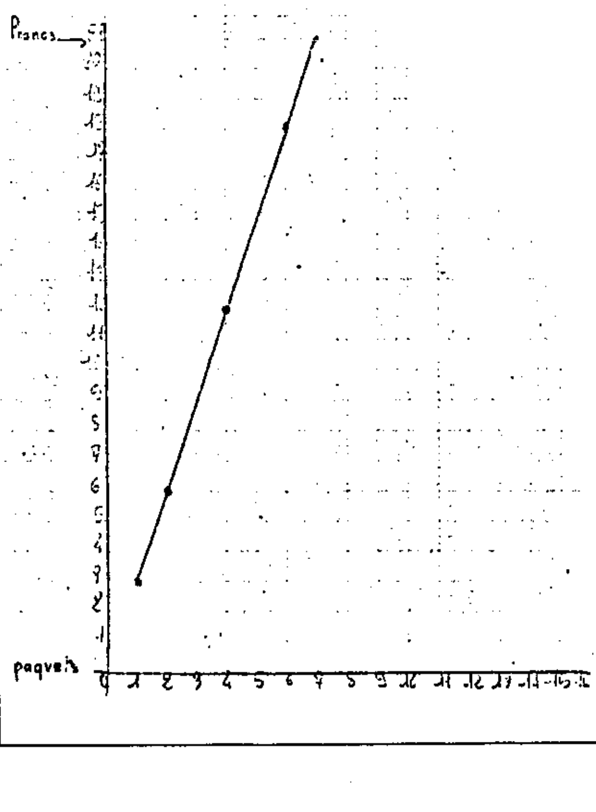
Etablis le graphique permettant de lire les résultats du tableau suivant :
2 ---> 2 ; 3 ---> 2 ; 4 ---> 3 ; 5 ---> 4
6 ---> 5 ; 7 ---> 5 ; 8 ---> 6 ; 9 ---> 7
10 --> 7 ; 11 --> 8 .



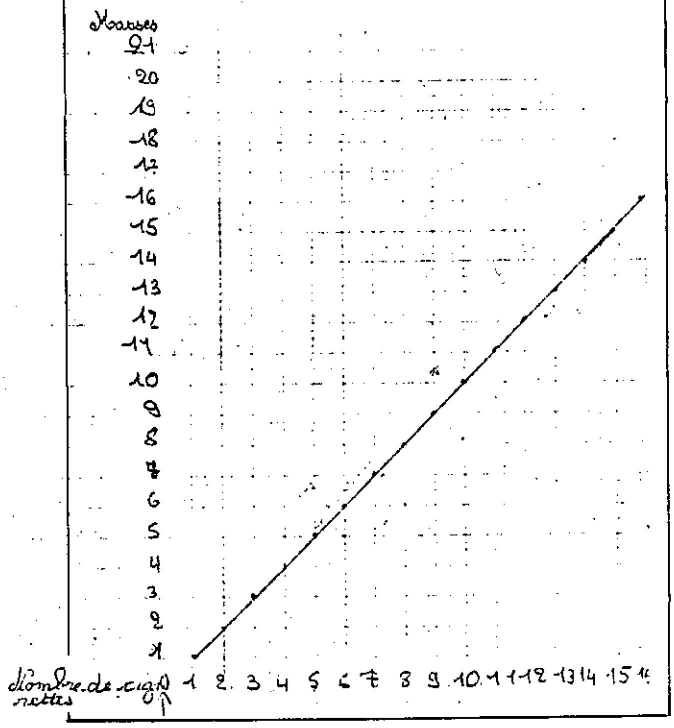
Des enfants procèdent à des échanges entre des billes de terre et des agathes. Voici la règle qui commande les échanges : 1 agathe pour 3 billes, 2 agathes pour 6 billes, ... etc.



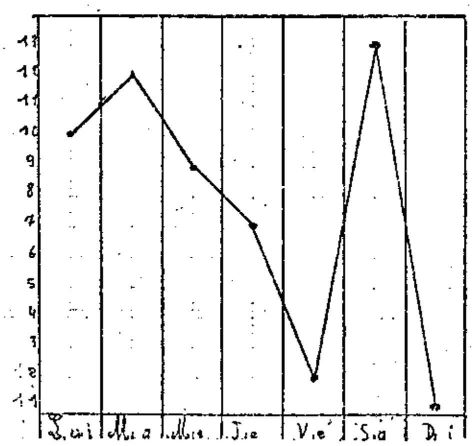
Un paquet de 4 yaourts vaut 3 F.
Deux paquets de 4 yaourts chacun valent 6 F.
Quatre " " " " " " 12 F.
Six " " " " " " 18 F.
Sept " " " " " " 21 F.



1 cigarette a pour masse environ 1 g.
2 cigarettes ont pour masse env. 2 g.
3 " " " " " 3g.
... etc



Depuis sept jours il pleut. On a relevé la hauteur d'eau tombée chaque jour.
lundi: 10mm mardi: 12mm mercredi: 9mm
jeudi: 7mm vendredi: 2mm samedi: 13mm
dimanche: 1mm.



Tous ces travaux sont discutés et vérifiés, après exécution, dans une synthèse commune.

ETUDE DE DIFFERENTES REPRESENTATIONS

Les représentations précédentes étant affichées, nous invitons les élèves à formuler leurs observations. Nous attendons, nous, l'observation toute banale : certaines représentations sont des lignes droites, d'autres des lignes brisées. Notre attente n'est pas déçue puisqu'une telle observation est donnée immédiatement. Nous prévenons les enfants qu'une telle remarque est intéressante pour la progression de l'étude.

Afin de poursuivre l'étude de représentations graphiques, nous présentons aux élèves le travail suivant :

Chaque groupe doit proposer une "petite histoire" pouvant être représentée sous la forme d'un graphique à un autre groupe qui aura la charge d'établir le graphique.

Voici quelques exemples de textes proposés par les groupes.

Pierre joue aux billes tous les jours et il a gagné dans la semaine : le 1er jour, 4 billes; le 2è jour, 8 billes; le 3è jour, 1 bille; le 4è jour, 6 billes; le 5è jour, 3 billes; le 6è jour, 7 billes; le 7è jour, 9 billes.

Chaque jour, l'épicier reçoit un arrivage de fruits : le lundi, 32 kg; le mardi, 28kg; le mercredi, 15kg; le jeudi, 36kg; le vendredi, 20 kg.

Ces types de propositions, aux textes très discutables et peu riches, ont abondé. Elles ont été facilement représentées par les élèves.

Une dernière proposition a relancé l'action entreprise puisque le groupe auquel elle s'adressait n'avait pas réussi une représentation graphique correcte.

Tous les jours, un libraire fabrique 12 livres. Combien en fabriquera-t-il pendant 15 jours ? pendant 1 mois ? pendant 6 mois ?

De la discussion qui s'instaure autour de ce texte, il ressort que le groupe a échoué parce qu'on ne voit pas clairement les différents couples. Le groupe "émetteur" du texte a donc été contraint d'expliciter sa proposition en précisant :

Chaque jour, il fabrique 12 livres; le 2è jour il y en a 24; le 3è jour, il y en a 36...etc.

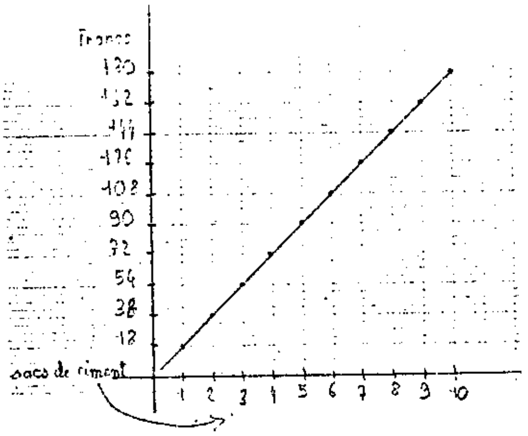
Aussitôt tous les élèves de la classe ont alors entrepris de tracer le graphique, ce qui a entraîné des discussions au sujet du nombre de jours des mois, du travail du dimanche et aussi du choix de l'unité sur un quadrillage de feuille de cahier.

Nous nous servons de cette représentation, qui est la seule représentation graphique obtenue qui soit sous forme de ligne droite pour faire prendre conscience aux enfants d'une nouvelle remarque :

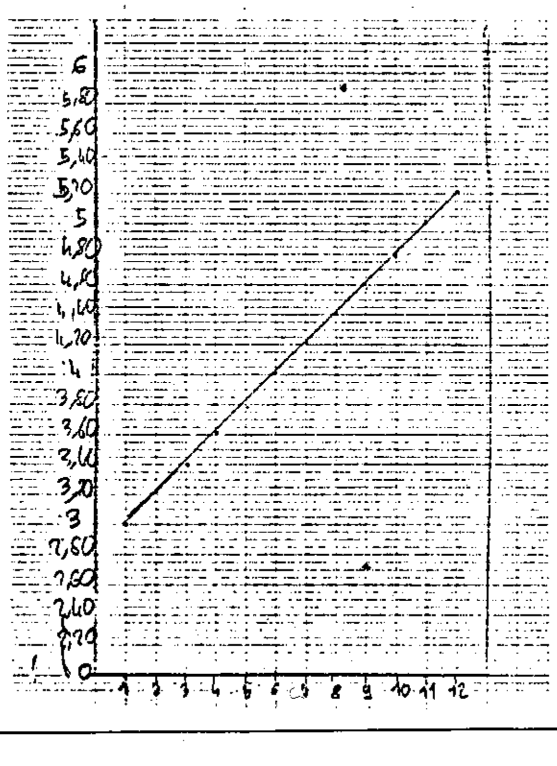
Certaines représentations graphiques sont des lignes droites qui, si on les prolonge, passent par le point d'intersection des deux axes.

A ce stade du travail, nous demandons aux élèves de proposer de "petites histoires" dont la représentation graphique sera une ligne droite. Voici quelques exemples:

Un revendeur vend un sac de ciment 18 F
Il vend 2 sacs de ciment 36 F
" " 3 " " 54 F
..... etc

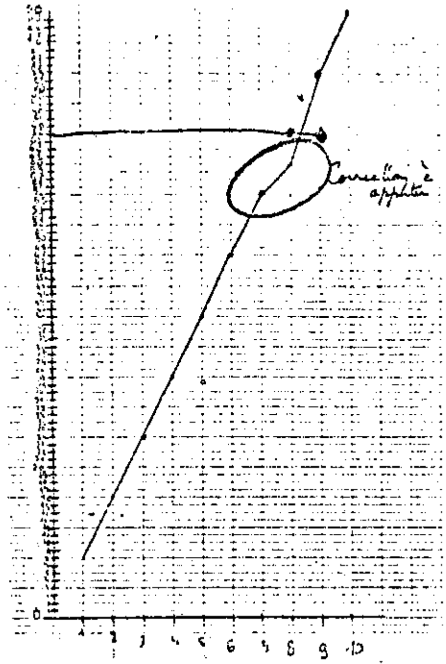


Un boulanger vend des petits gâteaux à 3 F. Tous les mois, il les augmente de 20 c.
Au bout d'un mois :....... 3 F
au bout de deux mois : ... 3,20 F
au bout de trois mois : .. 3,40 F
..... etc



Un étranger vient visiter un musée. Il regarde le tableau des tarifs.

entrées :	1	2	3	4	....
francs :	8	16	24	32	....



Tous les textes proposés furent de nouveau discutés. Pour toute représentation sous forme de ligne droite, les enfants prolongent systématiquement la ligne afin de vérifier si elle passe ou non par le point O.

LA FONCTION LINEAIRE

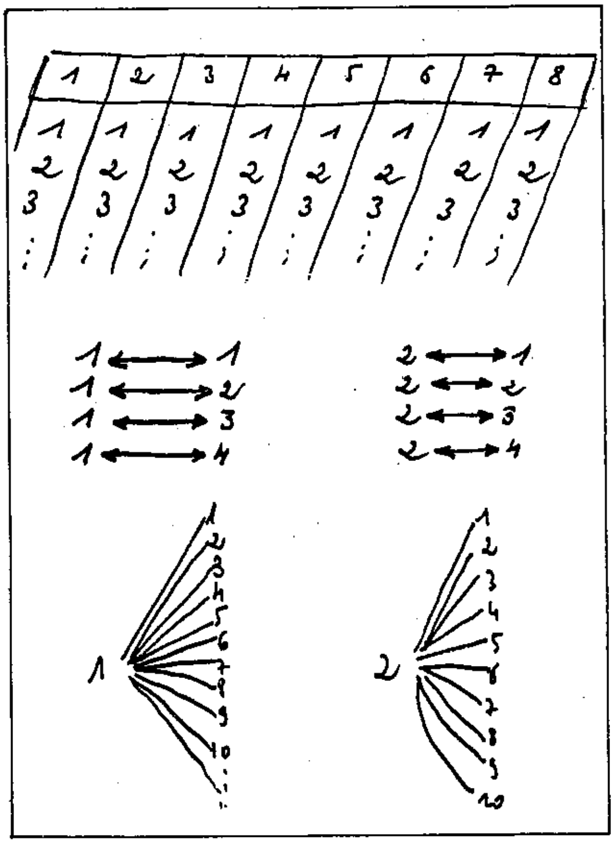
Nous informons les élèves du fait que les représentations graphiques sous forme de ligne droite passant par O sont les représentations que nous voulons leur faire étudier car elles possèdent des propriétés importantes.

Pour ce faire, nous demandons à chaque groupe de rechercher tous les couples possibles dont le premier élément appartient à l'ensemble A = {1,2,3,4,5,6,7,8} et le second à l'ensemble B des 24 premiers entiers non nuls.

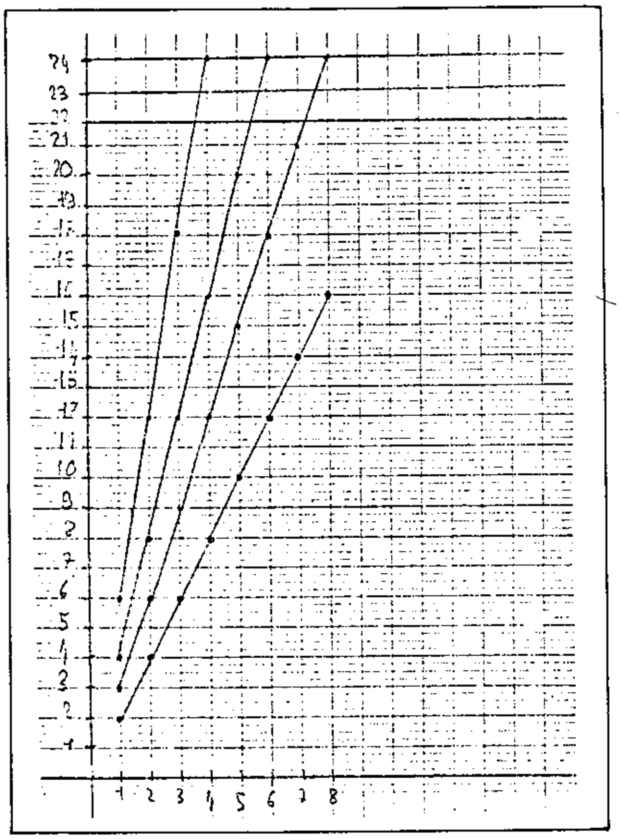
La recherche systématique des 192 couples fut une étape intéressante et chaque groupe a parfaitement réussi.

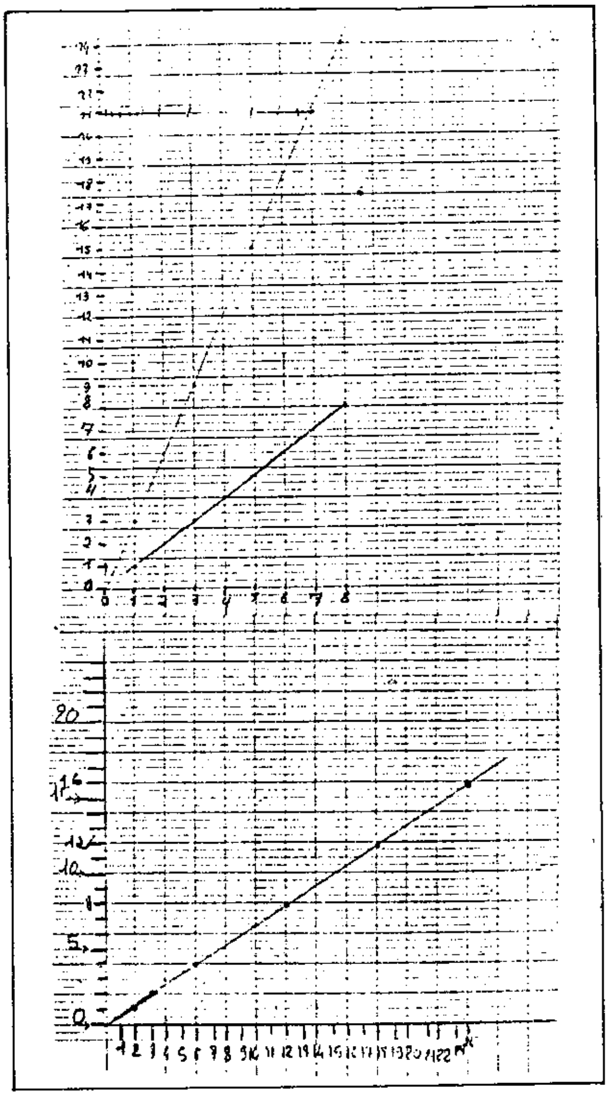
Voici quelques exemples de cette étape de recherche.

1,1 - 1,2 - 1,3 - 1,4 - 1,5 - .
2,1 - 2,2 - 2,3 - ...



Puis nous proposons aux enfants de choisir plusieurs de ces couples qui leur permettent de tracer une représentation graphique sous forme de ligne droite passant par 0. Voici quelques-unes de leurs réalisations.





Tous ces derniers travaux ayant été discutés et vérifiés, nous écrivons au tableau certaines suites de couples lus sur les graphiques de la manière suivante.

(1)			(2)			(3)			(4)		
	1	1		0	0		1	3		2	1
	2	2		1	2		2	6		6	3
	3	3		2	4		3	9		12	6
	4	4					4	12		18	9

L'examen de ces tableaux amène les enfants à formuler qu'on passe du premier terme du couple au second en multipliant. La liste (4) pose problème. Plusieurs proposent : *"Au lieu de multiplier, on peut diviser"*. La vérification est aussitôt entreprise.

Enfin, la liste (5) ci-contre présente elle-aussi une difficulté supplémentaire. Toutefois, un élève explique qu'on *"on pouvait aller de 3 à 2 en multipliant par 2 et en divisant par 3"*. Tous les élèves ont vérifié cette proposition qui fut donc reconnue valable.

(5)		
	3	2
	6	4
	12	8

Les propriétés de linéarité ont été formulées par nos soins sur des exemples précis. C'est à ce stade que nous avons dit aux élèves que nous étions dans ces différents cas devant des "*situations de proportionnalité*".

Finalement, nous avons systématisé ces derniers travaux en prenant dans divers manuels les exercices concernant les situations de proportionnalité.

Un "jeu", en particulier, a obtenu un certain succès : plusieurs listes de couples figurent au tableau

6	24	3	7	3	12	16	8
12	48	6	12	5	20	23	12
18	72	12	22	8	32	38	19
24	96	24	48	10	40	42	21
48	192			40	160		

Chaque équipe formulant une remarque sur ces tableaux prouvant qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité ou non marque un point. Toute erreur est sanctionnée par la perte d'un point. Cet exercice a surtout pour but l'application des propriétés de linéarité.

Remarques :

Ce travail a été réalisé en une dizaine de séquences d'environ une heure.

La grande majorité de la classe paraît avoir compris et est en mesure de représenter graphiquement une situation.

La notion de "situation de proportionnalité" nous paraît avoir été "sentie". •

Mots Croisés

Michel LABROUSSE · Limoges

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I	E	X	P	O	N	E	N	T	I	E	L	L	E
II	N	I	L	P	O	T	E	N	T	■	I	I	X
III	D	■	A	E	■	A	D	H	E	R	E	N	T
IV	O	U	T	R	A	I	S	■	R	I	S	E	E
V	M	A	■	A	L	■	I	D	A	■	■	A	N
VI	O	■	E	T	U	D	E	■	T	R	O	I	S
VII	R	A	C	I	N	E	■	R	I	O	■	R	I
VIII	P	N	■	O	S	L	O	■	V	I	D	E	O
IX	H	A		N	■	■	V	I	E	T	E	■	N
X	I	L	■	■	S	O	I	■	S	E	M	A	S
XI	S	Y	M	E	T	R	I	E	■	L	O	I	■
XII	M	S	■	P	O	L	E	■	G	E	N	R	E
XIII	E	E	■	O	P	E	R	E	N	T	■	E	S

Horizontalement.

I Exemple de fonction réciproque.
II Dont les valeurs propres sont nulles - S'écrit plutôt VIII.
III Initiales pour un relativiste - Un tel point est intérieur au complémentaire.
IV Exagérais - Moquerie.
V Possessif - Début du nom de mathématiciens arabes - Montagne crétoise - Révolution.
VI Travail d'élève - Avait sa règle.
VII Annule un polynôme - Au Brésil - Du verbe rire.
VIII Deux cinquièmes de point - Capitale au pays d'Abel - Fréquence de modulation contenant une information !
IX Co-auteur d'un célèbre théorème d'analyse - On a beaucoup parlé de lui dans le dernier PLOT (n° 17).
X Pronom - Pronom personnel - Répandis.
XI Peut être centrale - Il y a celle des grands nombres.
XII Le début et la fin des maths - Point fixe pour une inversion - Le mauvais encourt la réprobation.
XIII Voyelles pour réel - Multipliant, par exemple - Précède parfois mathématiques.

Verticalement.

1 Permet un transport de structure en restant dedans.
2 Grecque ou romain - Unité astronomique - Branche des mathématiques.
3 Tel certain module - Tentative phonétique.
4 L'addition en est une - A l'envers : trou.
5 Refus anglais - Sulfates doubles - A la fin d'un programme.
6 Pièce de soutien - Moitié de déluge - Bordure ou filet.
7 Permutation pour Denise - Peut se mettre en bijection avec voirie ou ivoire.
8 Tranche de tranche.
9 Telles des méthodes qui recommencent.
10 Participe - Petit roi.
11 Dépendants - Diable.
12 Une telle forme a son image dans un corps - Mesure d'une surface.
13 Certaines sont galoisiennes - Préposition.

SOLUTION page 25

La rubrique du Rubik (3)

Gérard Chauvat et Pierre Nury · Tours

Nous achevons la publication de la suite d'articles parus dans les deux derniers numéros du PLOT (n° 16 et n° 17). Pour le détail des notations, les lecteurs voudront bien se reporter aux articles en question.

On trouvera page 25 un erratum au précédent article (paru dans PLOT n° 17) où une petite erreur s'est glissée...

I REMONTONS

Nous voici maintenant à la dernière étape : la remontée du troisième étage; elle s'effectue en deux temps :
- mise en position des cubes-arêtes (que nous notons c-a)
- mise en position des cubes-sommets (que nous notons c-s).

Pour décrire les états possibles du cube lors de cette étape, on utilise des schémas simplifiés dont voici la légende.

X : *cube bien placé, bien orienté.*
o : *cube bien placé, mal orienté.*
• : *cube dont la facette supérieure est de la couleur du centre de H;*
⟶ : *on doit faire glisser le cube sans changer sa facette supérieure.*
- - → : *on doit faire glisser le cube en changeant sa facette supérieure.*

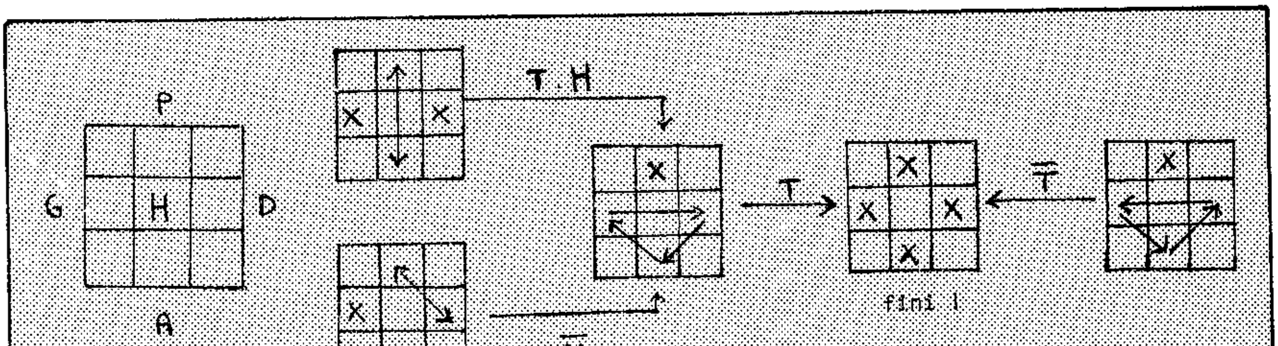


fig 1

1. Mise en position des cubes-arêtes.

Observez les facettes supérieures des 4 c-a; vous vous trouvez dans l'un des trois cas suivants (les états retenus étant ceux auxquels on peut toujours se ramener après une rotation totale du cube ou une rotation de la seule face H) :

1er cas : 4 facettes de la couleur du centre de H.

On est alors dans l'une des positions de la figure 1, et on s'en tire grâce à la manoeuvre

$$T = [G,H^2].[H,G] = GH^2\bar{G}\bar{H}G\bar{H}\bar{G} \quad (8)$$

2è cas : 2 facettes de la couleur du centre de H.

Deux manoeuvres énantiomorphes permettent de ramener toutes les situations au premier cas :

$$R = [H,A]_G = GHA\bar{H}\bar{A}\bar{G} \quad (6)$$
$$S = [\bar{H},\bar{A}]_{\bar{D}} = \bar{D}\bar{H}\bar{A}HAD$$

3è cas : aucune facette de la couleur du centre de H.

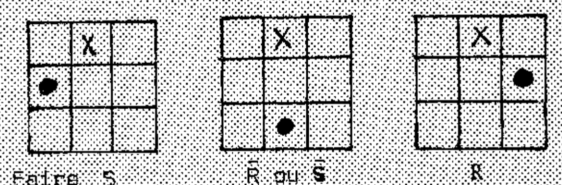


fig 2

Faire S, R, $\bar{S}$ ou $\bar{R}$ (voir figure 2), et on est ramené au deuxième cas.

2. Mise en position des cubes-sommets.

A- Mise en place :

i) échange de deux couples de sommets consécutifs

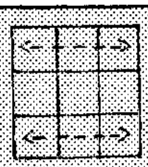


fig. 3

$A[D,H]^3\bar{A}$ (14)

ii) permutation circulaire de 3 sommets.

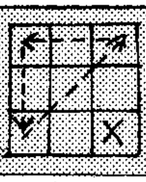


fig. 4
$H\bar{D}\bar{H}.\bar{G}.H\bar{D}\bar{H}.G$ (8)

iii) échange de deux couples de sommets opposés.

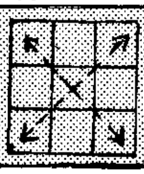


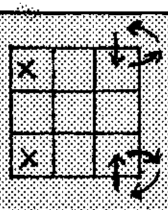
fig. 5
$[A_H,\bar{P}] \longrightarrow$ ii))(18)

B- Mise en position :

Tout repose sur la manoeuvre :

$$M = B_{\bar{D}}.B_A = \bar{D}BDAB\bar{A}$$

i) sommets consécutifs;



$[M,H]$

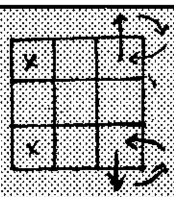


fig. 6
$[H,M]$
(8)

ii) sommets opposés.

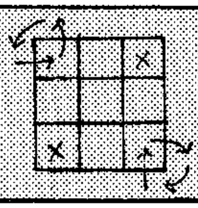
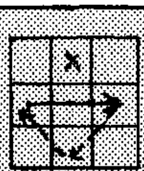


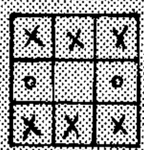
fig. 7
$[M,H^2]$ (16)

II OPTIMISONS

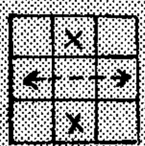
Mise en position des cubes-arêtes



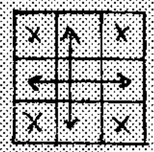
$[\bar{A},G]_{\bar{D}\bar{A}}$ (8)



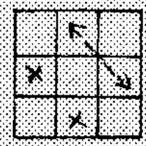
$\bar{D}H\hat{A}.D\bar{H}.\bar{A}P.G\bar{H}A\bar{G}H.A\bar{P}$ (14)

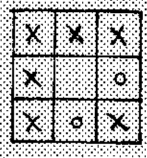


$\bar{D}H\hat{A}.D\bar{H}.\bar{A}P.G\bar{H}A\bar{G}H.A\bar{P}$ (14)

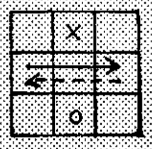


$\bar{D}H^2D^2H\bar{D}\bar{H}\bar{D}H^2GAD\bar{A}\bar{G}$ (16)

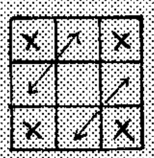




$[PG,\bar{H}].[\bar{P},D].\bar{H}$ (11)



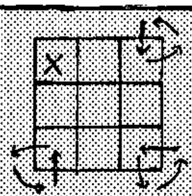
$DGH^2\bar{G}\bar{D}.\bar{A}\bar{P}H^2AP$ (12)



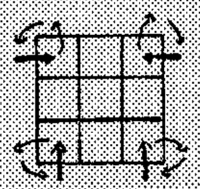
$D^2G^2\bar{B}A^2D^2G^2P^2D^2G^2BD^2G^2$ (22)

fig. 8

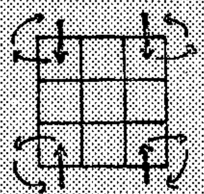
Mise en position des cubes-sommets



$A^2\bar{B}AH^2\bar{A}BAH^2\bar{G}PGA\bar{G}\bar{P}G$ (18)



$PB([\bar{G},H].[A,\bar{H}])^2\bar{B}\bar{P}$ (20)



$P^2[A,B]^2\bar{P}\bar{H}[B,A]^2H\bar{P}$ (22)

fig. 9

III UTILISONS DANS LA CLASSE

Les deux exercices qui suivent donnent des réponses à la question 2 de l'exercice 1 du précédent article (voir PLOT n° 17, page 16) et permettent donc de comprendre la partition en 12 orbites de l'ensemble de tous les états possibles du Cube Hongrois. Le second a été traité avec des classes de Troisième.

1. Flip and Twist.

Grâce à une méthode développée par J.H. Conway, E. Berkelamp et R. Guy (cf "Pour la Science", mai 1981), nous allons montrer qu'il est impossible, à la suite d'une manoeuvre, de "flipper" un seul c-a, ou "twister" un seul c-s.

* quelques définitions.

On appelle "sites" les positions des "petits cubes" constituant le CH. Ici, on ne s'intéresse pas aux cubes-faces et il y a donc 20 sites de deux ou trois facettes.

La "facette principale" d'un site est, s'il y en a une, celle située sur le haut ou sur le bas, sinon celle située sur la droite ou sur la gauche (voir figure 10).

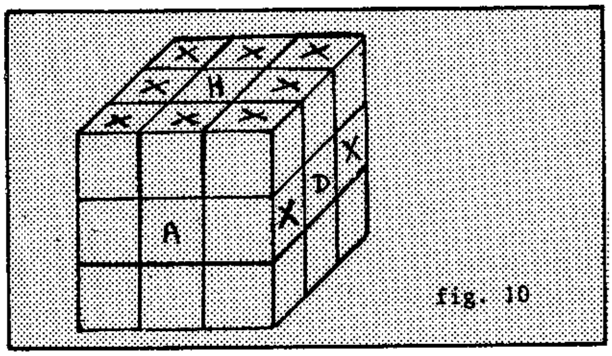


fig. 10

Il y a donc 8 facettes principales sur H, 8 sur B et 4 sur la "tranche centrale horizontale".

La "couleur principale" d'un petit cube est la couleur de la facette principale du site qu'il occupe quand le CH est dans sa position "standard" (non mélangé).

Exemple : Si l'on prend le cube de façon que le cube-face A soit jaune, B bleu, D rouge, G orange, H vert et P blanc, alors :
la couleur principale de (ahd) est vert.
" " " de (ad) est rouge.

Q1 Dans l'exemple ci-dessus, quelle est la couleur principale de (gba) ? de (gp) ? Quels sont les cubes dont la couleur principale est vert ? orange ? jaune ?...

Considérons maintenant le CH dans un état quelconque (brouillé). Un petit cube est "normal" si sa couleur principale est sur la facette principale du site qu'il occupe; sinon, on dit qu'il est flippé si c'est un c-a, twisté si c'est un c-s.

Pour chaque c-a, on appelle "flip" le nombre 0 s'il est normal, 1 sinon. Le "Flip total" ou "Flip" du CH est la somme, modulo 2, des douze flips. Le Flip vaut 0 si un nombre pair de c-a sont flippés et 1 s'il s'agit d'un nombre impair.

Q2 Quel le Flip du CH en position standard ?

Pour chaque c-s, on appelle "twist" le nombre 0 s'il est normal, +1 s'il est twisté dans le sens des aiguilles d'une montre, et -1 s'il est twisté dans le sens contraire. Le "Twist total" ou "Twist" du CH est la somme, modulo 3, des 8 twists.

Q3 Quel est le Twist du CH en position standard ? Dans quels cas le Twist vaut-il +1 ? 0 ? -1 ?

* "démonstrations"

Considérons un état quelconque du CH appartenant à l'orbite de la position standard; nous allons montrer que le Flip et le Twist valent toujours 0.

Pour cela, il suffit de vérifier que les 6 coups qui engendrent toute manoeuvre laissent invariant le Flip et le Twist (lesquels valent 0 en position standard)..

i) C'est évident pour H et B puisqu'aucun cube ne monte ni ne descend.

ii) A et P ne modifient pas le Flip. Deux des c-s déplacés voient leur twist augmenter de 1 modulo 3, les deux autres diminuer de 1 modulo 3. Par conséquent le Twist est conservé.

iii) G et D ne modifient pas le Twist (les twists des c-s se compensent deux à deux comme au ii). Le flip des chacun des c-a déplacés est augmenté de 1 modulo 2; mais $4 = 0$ (2), et le Flip reste encore inchangé.

2. Parité d'une permutation et CH.

Q4 Combien de mots de 3 lettres différentes peut-on écrire avec les lettres a,b,c ? Combien sont inscrits au Petit Larousse Illustré?
L'arrivée d'un tiercé est, dans l'ordre: 7, 13, 1. Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ?
Combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on écrire avec 3, 5 et 7 ? Quelle est leur somme ?
Démontrer que la somme des nombres de 3 chiffres écrits avec trois chiffres quelconques est divisible par 3 et par 37. c'est à dire par 111.

Soit un ensemble E. Une permutation s de E est une bijection qui associe à chaque élément x de E un élément de E appelé image de x par s, et noté s(x).

On note S_n ($n \in \mathbb{N}^*$), l'ensemble des permutations de $E = \{1,2,\ldots,n\}$.

Par exemple, si $E = \{1,2,3\}$, on obtient les 6 permutations suivantes :

$$e = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

où la notation utilisée signifie que, par exemple : $s(1) = 1 \quad s(2) = 3 \quad s(3) = 2$

On désigne par sot le composé des deux permutations s et t; c'est la permutation obtenue en effectuent d'abord t, puis s :

$$sot(x) = s(t(x))$$

Ici, on a : $\begin{array}{l} \ 1\ 2\ 3 \\ t\downarrow\ 2\ 1\ 3 \\ s\downarrow\ 3\ 1\ 2 \end{array}$ de sorte que sot = v

Q5 Construire ainsi la "table de composition" de S_3, ensemble des 6 permutations définies ci-dessus. Vérifier que S_3, muni de la composition, est un groupe non commutatif.

Q6 Quand un groupe G a un nombre fini N d'éléments, N est appelé l'ordre de G et est noté O(G).
Déterminer $O(S_2)$, $O(S_3)$, $O(S_8)$, $O(S_{12})$, ..., $O(S_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

* Parité d'une permutation.

Considérons la permutation

$$p = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&2&8&1&3&4&7\end{pmatrix}$$

et comptons dans la deuxième ligne combien de paires ne sont plus dans l'ordre induit par la première ligne; ainsi, dans l'ordre "naturel", 2 est avant 5 mais ici 2 vient après 5; ceci constitue un renversement.
On procède en prenant successivement chaque chiffre :

5 suivi par 2,1,3 et 4 : 4 renversements
6 " " 2,1,3 et 4 : 4 "
2 " " 1 : 1 "
8 " " 1,3,4 et 7 : 4 "
1,3,4 et 7 ne fournissent aucun renversement.
Total : 13 renversements.

Ce nombre est impair et cette permutation sera donc dite impaire. Naturellement, si le nombre de renversements est pair, la permutation est dite paire.

Q7 Trouver ainsi la parité des permutations suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&4&1&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{TRACE}\\\text{ECART}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\text{TRACE}\\\text{CARTE}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\Delta & \neq & \square & *\\ * & \square & \neq & \Delta\end{pmatrix}$$

Q8 Quelle est la parité de poq lorsque :
i) les permutations p et q ont même parité ?
ii) p et q ont des parités différentes ?

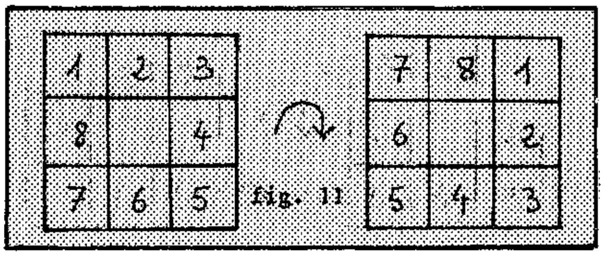


fig. 11

Revenons au Cube Hongrois pour constater que tout coup engendre deux 4-cycles : l'un sur les c-s et l'autre sur les c-a. En numérotant les petits cubes de la face que l'on tourne comme sur la figure 11, on peut les noter :

$$p = \begin{pmatrix}1&3&5&7\\7&1&3&5\end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix}2&4&6&8\\8&2&4&6\end{pmatrix}$$

Q9 Quelle est la parité de p ? de q ?

Ces 4-cycles ayant même parité, les permutations sur les c-s et les c-a engendrées par toute manoeuvre ont égelement même parité. Par conséquent, si une manoeuvre échange 2 c-a, elle doit échanger aussi une autre paire de c-a ou une paire de c-s. Il est impossible de n'échanger qu'une seule paire de c-a ou de c-s.

BIBLIOGRAPHIE

Voici un additif à la Bibliographie parue dans l'article (1) (PLOT n° 16).

B8 - André WARUSFEL (préface de E. Rubik). *Le Rubik's Cube*. Denoël 1981.
B9 - *"Science et Vie"* Mai 1981.
B10- Douglas HOFSTADTER *in "Pour la Science"* n° 43. Mai 1981.
B11- A. et J-C DELEDICQ / J.B. TOUCHARD. *Le Cube, mode d'emploi*. Cedic-Nathan. 1981.
B12- Pierre JULIEN. *Remontez votre Rubik's Cube en moins de deux*. Université Scientifique et Médicale de Grenoble. 1981.
B13- *"Science et Avenir"*
- *Un certain Cube hongrois* (André WARUSFEL. n° spécial 35 : La Science des Jeux).
- *Le Rubik's Cube dans l'ordinateur de poche : un programme pour Sharp 1211* (E. HALBERSTADT. n° spécial 36 : l'Invasion des micro-ordinateurs).
B14- Tom WERNECK. *Le Cube magique* (préface de E. Rubik). M.A. Editions. 1981.
B15- Thierry GAGNAIRE *Le Rubik's Cube en 15 secondes*. Denoël 1981.

Raison & Sensation

Alain GOUGEON · Chartres

Il y a vingt-siècles, Mathématiques et Philosophie allaient de pair. Pourquoi ont-elles tant divergé depuis ? Une tentative de réponse.

Les participants

- Des élèves de Seconde (option gestion) du lycée Jehan de Beauce de Chartres, en demi-groupes (16 + 16).
- Une enseignante de Philosophie de l'établissement (Mme Jacqueline Marre).
- Le professeur de mathématiques de la classe (Alain Gougeon).

But

Montrer aux élèves que dans certaines circonstances, une preuve est nécessaire pour accéder à la vérité.

Moyen : les illusions d'optique

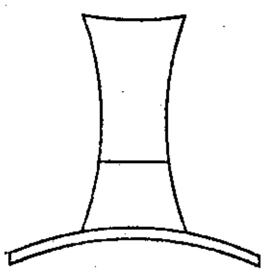
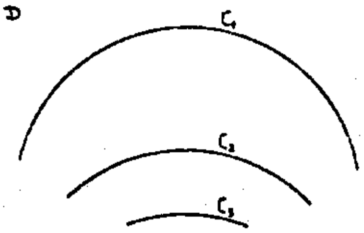
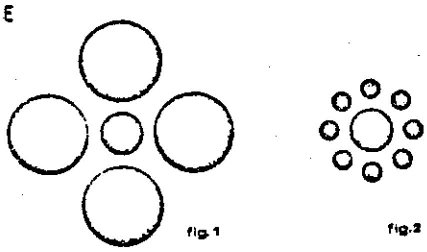
Durée : 1h 30

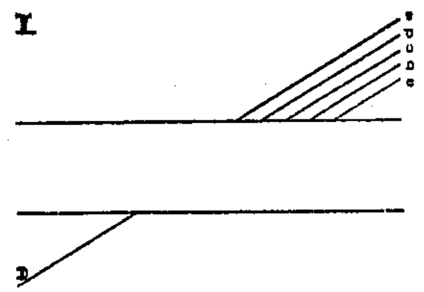
Matériel utilisé

- Documents R7 "Les illusions d'optique" édité par l'Irem d'Orléans-Tours.
- Un extrait de Kant.
- Photocopie de la couverture du "Petit Archimède" (La femme sans âge) de Janvier 1980.

Déroulement de la classe

1) On observe au rétroprojecteur les illusions d'optique, et les élèves répondent individuellement au questionnaire (voir annexe).

DOCUMENT RETROPROJETE	QUESTIONNAIRE DISTRIBUE A CHAQUE ELEVE
A 	Mettre une croix dans la case correspondante. A - Le chapeau est : plus haut que large.............. 1 aussi haut que large............. 2 plus large que haut.............. 3
B 	B - L'arc de cercle C_1 a pour rayon R_1 " " " C_2 " " R_2 " " " C_3 " " R_3 . $R_1 > R_2 > R_3$ .... 1 . $R_1 < R_2 < R_3$.................. 2 . $R_1 = R_2 = R_3$.................. 3
E 	E - Soit R le rayon du disque central de la figure 1. Soit R' le rayon du disque central de la figure 2. . $R > R'$ .... 1 . $R = R'$ .... 2 . $R < R'$ 3



I - La droite D prolonge

. la droite a 1

. la droite b 2

. la droite c 3

. la droite d 4

. la droite e 5

Cette femme a

. moins de 30 ans

. plus de 60 ans

2) Etude par la collègue de philosophie des réponses au questionnaire pendant que l'on distribue aux élèves la "femme sans âge".

Discussion spontanée des élèves jusqu'à ce que chacun arrive à voir les deux femmes.

3) Observation collective des résultats des questionnaires (voir annexe), puis recherche des moyens pour trouver dans chaque cas la bonne réponse avec expérimentation immédiate des différentes propositions.

4) On demande aux élèves :
"Que recherchaient les enseignants par cette activité ?"

Dans la discussion, les thèmes suivants sont abordés :
- dans toute activité scientifique, il faut passer par le détour d'un raisonnement et ne pas se fier uniquement à ce que l'on perçoit.
- il est nécessaire de confronter les opinions et d'argumenter.
- il y a des circonstances où l'on ne peut pas trancher de façon définitive entre le vrai et le faux (voir la différence entre l'image de la "femme sans âge" et les autres illusions d'optique).

Réponses au questionnaire (32 élèves)

Questions	1er groupe	2è groupe	Total
A_1	7	9	16
A_2	9	5	14
A_3	0	2	2
D_1	11	6	17
D_2	4	7	11
D_3	1	3	4
E_1	1	0	1
E_2	6	2	8
E_3	9	14	23
I_1	1	0	1
I_2	2	0	2
I_3	6	1	7
I_4	6	14	20
I_5	1	1	2
Moins de 30 ans	4	4	8
Plus de 60 ans	10	7	17
Les deux	2	5	7

5) Distribution aux élèves de l'extrait de KANT *(Prolégomènes à toute métaphysique future, paragraphe 19)*

Lecture individuelle, puis collective. Analyse du texte.

6) Le professeur de philosophie demande aux élèves de répondre sur papier à la question :

"Pensez-vous que l'expérience d'aujourd'hui peut influencer votre comportement ultérieur ?"

Les deux groupes d'élèves ont répondu :

8 non ; 3 peut-être ; 21 oui

Remarques relatives à cette activité

Les élèves ont trouvé en général cette activité intéressante.

Les professeurs ont fait les remarques suivantes :
- le professeur de philosophie pense qu'elle devrait pouvoir intervenir fréquemment avec d'autres collègues, quand les objectifs se rejoignent.
- les élèves ont bien compris (après précisions de vocabulaire) le texte de KANT. Ceci permet de détruire l'argument selon lequel il faut une certaine maturité (ie : un certain âge) pour accéder à la philosophie.
- le professeur de mathématiques pensait qu'à partir de là, les élèves hésiteraient à affirmer sans démontrer. C'est pourtant ce qui s'est produit pour certains d'entre eux, dès le devoir suivant !
- la discussion (l'activité) pourrait déboucher sur l'explication physiologique et psychologique de ces illusions d'optique en liaison avec le professeur de Sciences Biologiques.

Emmanuel KANT : Prolégomènes à toute métaphysique future (paragraphe 19).

Que la chambre soit chaude, le sucre doux, l'absinthe agréable, ce sont là des jugements d'une valeur simplement subjective. Je ne prétends pas qu'en tout temps moi-même ou tout autre doive sentir ainsi; ces jugements n'expriment qu'un rapport de deux sensations au même sujet, moi-même, et de plus seulement dans la disposition actuelle de ma perception, et ne doivent pas non plus valoir pour l'objet : je nomme ces jugements, jugements de perception. Il en va tout autrement du jugement d'expérience. Ce que l'expérience m'apprend dans certaines circonstances elle doit en tout temps me l'apprendre et à chacun de même, la validité ne s'en restreint ni au sujet ni à sa disposition momentanée. C'est pourquoi j'énonce tous les *jugements* de ce genre comme valables objectivement; ainsi quand je dis, par exemple : l'air est élastique, ce jugement n'est tout d'abord qu'un jugement de perception. Je ne fais que rapporter dans mes sens deux sensations l'une à l'autre; s'il doit être nommé jugement d'expérience, j'exige que cet enchaînement soit soumis à une condition qui le rende valable universellement. J'exige donc qu'en tout temps moi-même, et chacun comme moi, unisse nécessairement la même perception dans des circonstances identiques.

La rubrique du Rubik (2)

ERRATA

Quelques erreurs se sont glissées dans cet article, que nous avons publiée dans le PLOT n° 17 (4è trimestre 1981).

Page 17, il faut lire :

L'action sur A, D et H est déterminée, respectivement, par la 1ère, 2è, 3è colonne de la matrice avec les identités :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et plus bas :

$$s_V \Big\downarrow \begin{array}{cccccc} A & B & D & G & H & P \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{G} & \bar{D} & \bar{H} & \bar{P} \end{array}$$

SOLUTION DES MOTS CROISES

Horizontalement.

I Exponentielle. II Nilpotent - IIX
III AE - Adhérent IV Outrais - Risés
V Ma - Al - Ida - An VI Etude - Trois
VII Racine - Rio - Ri VIII PN - Oslo - Video IX Hahn - Viète X Il - Soi - Semas
XI Symétrie - Loi XII MS - Pôle - Genre
XIII EE - Opèrent - Es

Verticalement.

1 Endomorphisme 2 XI - UA - Analyse
3 Plat - EC 4 Opération - Epo
5 No - Aluns - Stop 6 Etai - Del - Orle
7 Nedsie - Ovlier 8 TNH 9 Itératives - GN
10 Ri - Roitelet 11 Liés - Démon
12 Linéaire - Aire 13 Extensions - Es

Le Pentimètre

Nicole CHERAMY · Tours

Les prochaines Journées de l'APMEP (Poitiers, septembre 1982) sont consacrées au matériel didactique. En prélude à ces rencontres, l'auteur nous propose un matériel facile à réaliser et bien instructif.

Voici une série de fiches pour la classe de Seconde. Les fiches 1,2,3 peuvent également être utilisées en 3ème.

Si vous ne connaissez pas le pentimètre, commencez par faire vous-même, la fiche 1.

Les élèves ont à faire chez eux la fiche n°1; s'ils trouvent à quoi sert cet instrument, tant mieux, s'ils ne trouvent pas on cherche tous ensemble pendant le cours suivant.

Le parallelogramme articulé n'est pas indispensable mais il est commode si on ne travaille pas sur papier quadrillé : il permet de garder l'axe du pentimètre parallèle à l'axe des abscisses. Pour découvrir le rôle du pentimètre on peut, dans un premier temps, escamoter le parallélogramme en alignant tous ses sommets.

On fait ensuite en classe la fiche n°2 pour se familiariser avec l'utilisation du pentimètre, puis à la maison la fiche n°3.

Le pentimètre de la fiche 1 permet de visualiser assez bien la pente d'une droite mais son utilisation est très limitée, c'est pour cette raison que je prévois la construction d'un 2ème pentimètre.

A la fin de la fiche 3, il est bon de signaler aux élèves qu'on peut construire un instrument semblable pour mesurer le coefficient directeur d'une droite dans un repère quelconque, mais il faut contruire un instrument pour chaque repère choisi, c'est la raison pour laquelle je ne le fais pas.

Ce travail doit déboucher sur la mise au point de tout ce qui a été fait en 3ème sur : équation de droite, fonction linéaire, fonction affine.

La fiche 4, à faire un peu plus tard, est une introduction à la notion de taux de variation et sens de variation d'une fonction et les fiches 5 et 6 introduisent la notion d'approximation locale d'une fonction par une fonction affine.

Dans ces deux dernières fiches, parler de bonnes approximations ou d'approximations intéressantes me gêne un peu mais, si cela manque de précision, est-ce que pour un élève ce n'est pas plus parlant qu'un encadrement ?

$|\alpha|<0{,}2 \Rightarrow |\alpha^3-3^2|<0{,}13$ *demande une bonne manipulation sur les valeurs absolues et encadrements que beaucoup d'élèves auront sans doute du mal à faire.*

Le pentimètre pourra être utilisé en 1ère pour visualiser le nombre dérivé et la fonction dérivée. En décrivant la courbe de façon à ce que la flèche du pentimètre reste tangente à la courbe, on voit bien apparaître, en particulier, les points d'inflexion avec les changements de variation de la dérivée.

FICHE N° 1

Avec du carton réalisez aussi soigneusement que possible l'instrument dont le schéma est représenté figure 1.

Ces différents morceaux de carton doivent être assemblés par des attaches parisiennes. Pour cela il faut d'abord perforer le carton (en faisant par exemple pivoter une pointe de ciseaux) aux points A,A',A",B',B",C',C",D',D". On assemble ensuite les points A, A',A" (A au-dessus de A' qui est lui-même au-dessus de A"), les points B' et B" (B' au-dessus de B"), les points C' et C" (C' au-dessus de C"), les points D' et D" (D' au-dessus de D").

Vous avez maintenant entre les mains un instrument de mesure, en le manipulant [Pouvez-vous trouver ce qu'il permet de mesurer ?]

FICHE N° 2

L'instrument que vous venez de contruire permet de mesurer la pente d'une droite, c'est-à-dire le coefficient directeur de cette droite dans un repère orthonormé, nous l'appellerons : pentimètre.

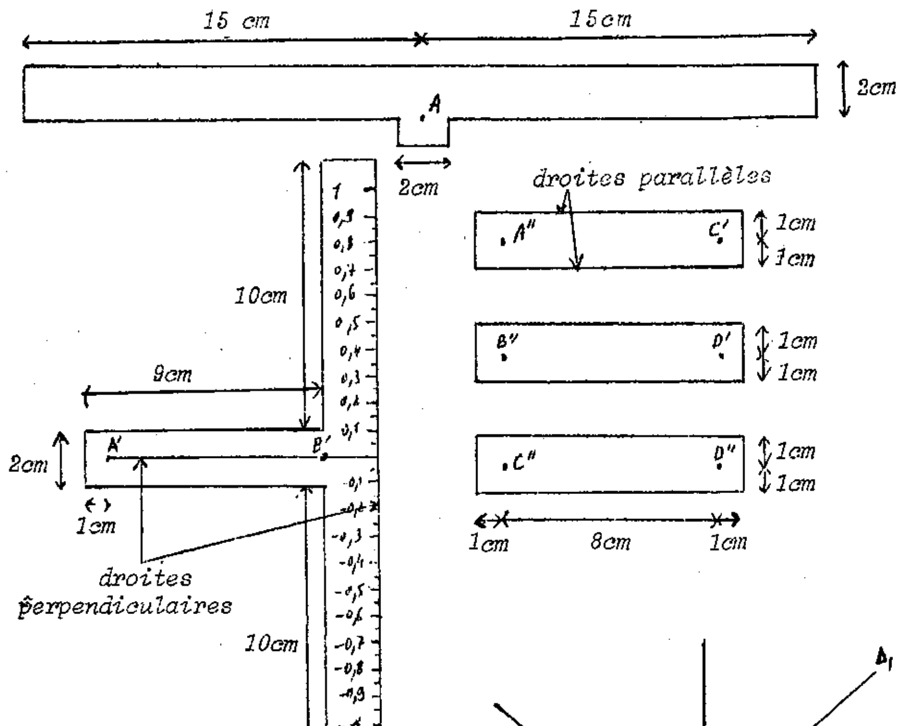


fig. 1

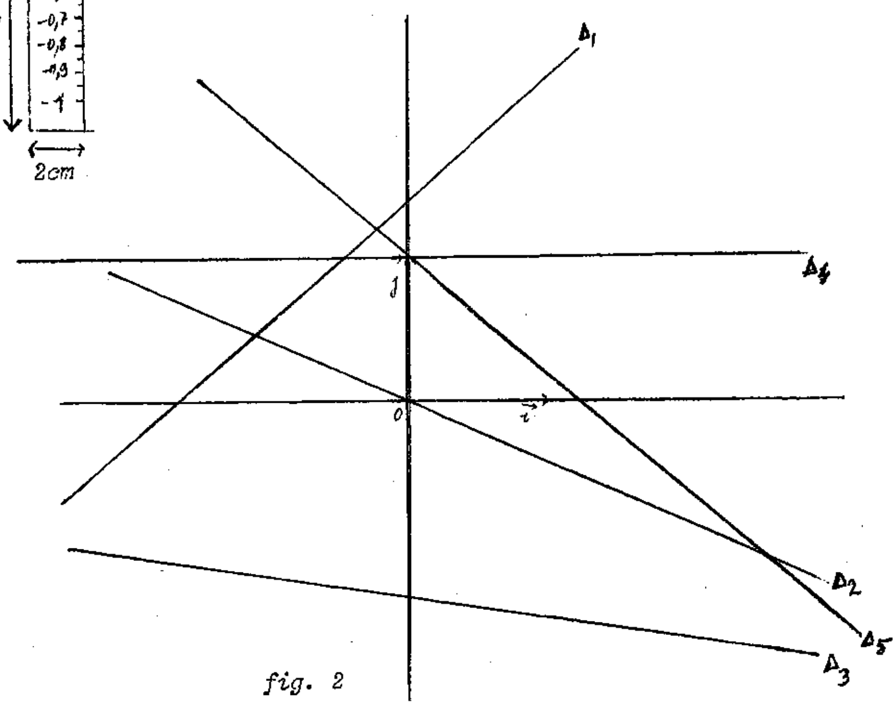


fig. 2

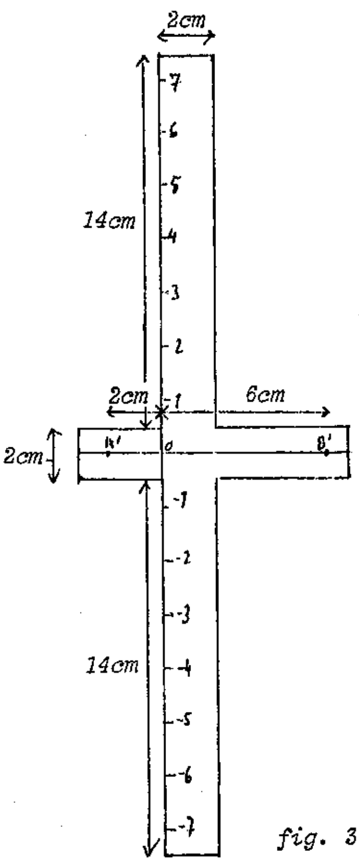


fig. 3

A l'aide de votre pentimètre mesurez les coefficients directeurs des droites : Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, de la figure 2.

Trouvez une équation des droites Δ_2, Δ_4, Δ_5,

FICHE N° 3

Réalisez un instrument semblable à celui que vous avez réalisé à l'aide de la fiche n° 1, en remplaçant la partie qui porte la graduation par celle de la figure 3 et en prenant une unité de 2cm.

Entre les traits de la graduation, tracez des subdivisions tous les 2mm.

Quel avantage cet instrument présente-t-il par rapport au premier ?

Dans un plan P choisissez un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Evitez de prendre 2cm comme unité de longueur), construisez ensuite, en utilisant votre instrument, les droites suivantes :

- Δ_1 passe par le point O, et a pour coefficient directeur 4,5.
- Δ_2 passe par le point $B\binom{0}{-1}$ et a pour coefficient directeur 2.
- Δ_3 passe par le point $C\binom{-2}{+1}$ et a pour coefficient directeur -2,8.
- Δ_4 a pour équation $y = -0{,}5x + 2$
- Δ_5 passe par le point C et est parallèle à Δ_2
- Δ_6 passe par le point B et a pour vecteur directeur $\vec{V}\binom{-2}{3}$

FICHE N° 4

La figure 4 représente, dans un plan P muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction f.

On appellera M_x le point d'abscisse x du graphique.

Complétez le tableau :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)										

A l'aide du pentimètre mesurez le coefficient directeur de la droite $(M_{-5}M_{-2})$.

On peut obtenir ce résultat par un calcul en utilisant les nombres du tableau précédent. A votre avis quel calcul faut-il faire ?

Cherchez avec deux autres points, M_{-2} et M_0 par exemple, si vous obtenez le même résultat, avec pentimètre :
et avec le calcul :

Le nombre que vous venez de trouver s'appelle taux de variation de la fonction f de -2 à 0.

On notera $T_{x_1;x_2}$ le taux de variation de x_1 à x_2.

Trouvez : $T_{-3;1}$. $T_{-1;2}$. $T_{1;2}$. $T_{2;3}$. $T_{3;4}$

Pour tous les réels x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$), appartenant à l'intervalle $[-5,-3]$, les réels T_{x_1,x_2} ont une propriété commune. Laquelle ?

Que pouvez-vous dire de T_{x_1,x_2} quand les réels x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$) appartiennent à $[-3,1]$? à $[1,4]$?

Les réels T_{x_1,x_2} pour les réels x_1 et x_2 appartenant à $[-3,4]$ ont-ils tous le même signe ?

Le taux de variation d'une fonction permet de trouver le sens de variation d'une fonction. Comment ?

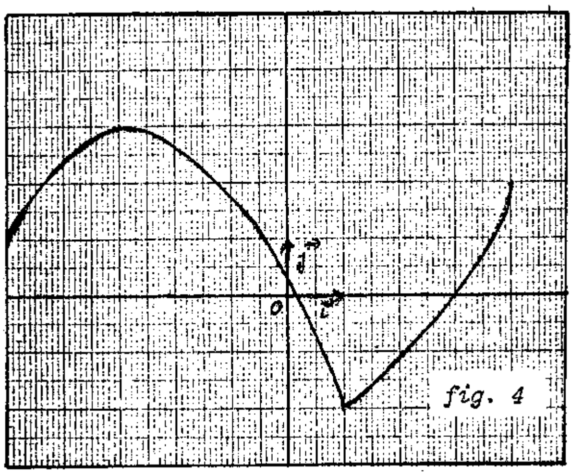


fig. 4

FICHE N° 5

Dans la fiche "La mitose" vous avez tracé la représentation graphique de la fonction g de N vers N qui à x associe le nombre 2^x de bactéries que l'on obtient après x heures. En reliant les points d'une façon aussi continue et régulière que possible, on obtient une courbe qui à l'air d'être la représentation graphique d'une fonction g_1 de R vers R.

Nous admettrons que c'est le cas. Sur une feuille de papier millimétré tracez, avec soin, la représentation graphique dans un repère orthonormé de la restriction à l'intervalle $[0,4]$ de la fonction g_1.

Vous savez calculer $g_1(2)$, ($g_1(2)=$), mais vous ne savez pas, par exemple calculer $g_1(2,5)$.

A l'aide du graphique, vous pouvez trouver une valeur approchée de $g_1(2,5)$

$g_1(2,5) =$

Nous allons chercher une autre méthode nous permettant de trouver des valeurs approchées de $g_1(x)$ pour x voisin de 2 par exemple.

Tracez la droite Δ_1 passant par les points $A\binom{1}{g_1(1)}$ et $B\binom{3}{g_1(3)}$.

Trouvez une équation de cette droite .

Cette droite est la représentation graphique d'une fonction affine f_1

$f_1(x) =$

Pour $x \in [1,3]$, on peut prendre comme valeur approchée de $g_1(x)$, le réel $f_1(x)$. Pour les réels x les plus voisins de 2 pensez-vous, en voyant le graphique, que $f_1(x)$ soit une valeur approchée intéressante de $g_1(x)$?

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,95	2	2,05	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f_1(x)$													
$g_1(x)$													
$\|f_1(x)-g_1(x)\|$													

fig. 5

Pour avoir plus de précisions, vous pouvez utiliser une machine à calculer qui possède la touche y^x, cette touche vous permet, en effet d'obtenir $g_1(x)$.
Complétez le tableau de la figure 5.

Le tableau confirme-t-il votre réponse précédente ?
Sur le graphique, essayez de trouver la droite Δ_2 qui vous permettra d'obtenir les meilleures approximations de $g_1(x)$ pour les réels x les plus voisins de 2. Tracez cette droite. A l'aide de votre pentimètre mesurez son coefficient directeur α, lisez les coordonnées d'un point M de cette droite, trouvez une équation de cette droite et la fonction affine f_2 représentée par cette droite.
Remplissez un tableau analogue au précédent en remplaçant f_1 par f_2.
Vous pouvez faire plusieurs essais et comparer vos résultats avec ceux de vos camarades.
Maintenant, sans utiliser la machine ni le graphique, trouvez une valeur approchée de $g_1(2,1)$, et de $g_1(1,98)$.

FICHE N° 6

Dans un repère orthonormé, tracez la représentation graphique C de la fonction
$f : [-2,0] \quad \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^3$

1) En utilisant le pentimètre trouvez une fonction affine h qui soit, à vos yeux, la meilleure approximation de la fonction f pour les réels voisins de -1.

Complétez le tableau de la figure 6

2) Soient : A le point de C d'abscisse -1,
M un point de C d'abscisse x
A' le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses
M' le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

Calculez $\overline{A'M'}$ en fonction de x

On pose $\overline{A'M'} = \alpha$, démontrez que

$$f(x) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1$$

Complétez le tableau de la figure 7

On constate que pour des réels α voisins de 0, $\alpha^3 - 3\alpha^2$ est également voisin de 0.
Démontrez que par exemple :

$$|\alpha| < 0,2 \Rightarrow |\alpha^3 - 3\alpha^2| < 0,12$$

On peut donc considérer que pour des réels α voisins de 0, $(3\alpha - 1)$ est une valeur approchée intéressante de f(x), on note dans ce cas $f(x) \simeq 3\alpha - 1$

Vous connaissez α en fonction de x; exprimez $3\alpha - 1$ en fonction de x. Vous pouvez ainsi définir une fonction affine g qui, pour des réels x voisins de -1, vous permet d'obtenir des valeurs approchées des réels f(x).
Complétez le tableau de la figure 8.

Comparez les fonctions h et g que vous avez obtenues.

x	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1,07	-1,04	-1,03	-1,02	-1,01	-1	-0,99	-0,98	-0,97	-0,96	-0,93	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6
f(x)																			
h(x)																			
$\|f(x)h(x)\|$																			

fig. 6

α	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	-0,07	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4
$\alpha^3 - 3\alpha^2$																			
$3\alpha - 1$																			
f(x)																			

fig. 7

x	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	-0,07	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4
f(x)																			
g(x)																			
$\|f(x)-g(x)\|$																			

fig. 8

nouveau

ABONNEZ-VOUS

LE SUPPLEMENT DU plot

EN 1982, DEUX NUMEROS HORS-SERIE DU PLOT :

POLYEDRES n° 1 & POLYEDRES n° 2

Avec le matériel fourni, vous pourrez réaliser, ou faire réaliser dès le plus jeune âge des dizaines de polyèdres :

7 polyèdres réguliers : les 5 polyèdres de Platon
1 polyèdre de Képler (n° 2) *(1)*
1 polyèdre de Poinsot (n° 2)

les 13 polyèdres semi-réguliers d'Archimède (dont 9 avec le seul POLYEDRES n° 1),

des prismes et des antiprismes,

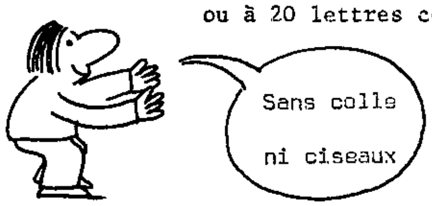
des polyèdres convexes et des polyèdres étoilés,

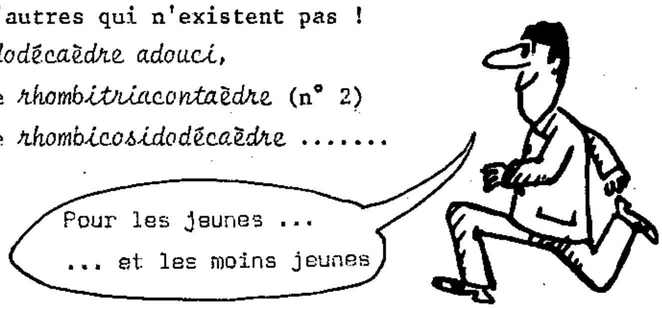
des polyèdres qui existent... et d'autres qui n'existent pas !

des polyèdres à 92 faces comme le *dodécaèdre adouci*,

des polyèdres à 19 lettres comme le *rhombitriacontaèdre* (n° 2)

ou à 20 lettres comme le *rhombicosidodécaèdre* ....





Vous pourrez également fabriquer vous-même votre matériel et construire d'autres polyèdres....

Chaque numéro Hors-Série contient :

* 30 feuilles prédécoupées de carton en 3 couleurs permettant d'obtenir
  pour le POLYEDRES n° 1 : des polygones réguliers à 3, 4, 5, et 6 côtés
  pour le POLYEDRES n° 2 : des éléments pour fabriquer des octogones; des décagones, des "rhombes" (pour réaliser des polyèdres étoilés)...
* Une feuille-modèle pour reproduire vous-même ces pièces.
* Plusieurs textes d'explication pour assembler et reproduire les polyèdres sans colle ni ciseaux, mais avec des élastiques !

Les numéros 1982 du PLOT fourniront des fiches techniques sur les polyèdres et des activités à faire avec ce matériel.

Pour recevoir ces numéros Hors-Série, il suffit de souscrire lors du renouvellement de votre abonnement au PLOT (voir en dernière page)

Prix de l'abonnement aux deux numéros du Supplément : 30 F

(1) La référence (n° 2) indique que le numéro POLYEDRES n° 2 est indispensable pour réaliser le polyèdre indiqué.