plot

BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

Sommaire du n° 16

Le premier prix est «port compris»
Le prix entre parenthèses est «port non compris»

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

8. **Mots I**, 1974, 100 p., 14,50 F (10 F).
9. **Elem-Math I**, 1975, 56 p., 6 F (4 F).
10. **Carrés magiques**, par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p., 6 F (4 F).
11. **Mots II**, 1975, 108 p., 14,50 F (10 F).
12. **Substitutions et groupe symétrique**, par J. Dautrevaux, 1976, 48 p. Epuisé.
13. **Mathématique pour la formation d'adultes** (CUEEP), par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p., 21,50 F (15 F).
14. **A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième** (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2ème édition 1976, 220 p., 21 F (15 F).
15. **Mots III**, 1976, 136 p., 16 F (12 F).
16. **Elem-Math II**, 1976, 56 p., 8 F (6 F).
17. **Hasardons-nous**, 1976, 220 p., 31 F (25 F).
19. **Elem-Math III, La division à l'école élémentaire**, 1977, 100 p., 14 F (10 F).
20. **Quelques apports de l'Informatique à l'Enseignement des Mathématiques**, 1977, 280 p., 31 F (25 F).
21. **Géométrie au premier cycle, tome 1**, 1977, 208 p., 31 F (25 F).
22. **Géométrie au premier cycle, tome 2**, 1978, 328 p., 36 F (30 F).
23. **Pavés et bulles**, par Françoise Pécaut, 1978, 288 p., 31 F (25 F).
24. **Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM)**, 1978, 120 p., 24 F (20 F).
25. **Mots IV**, 1978, 152 p., 16 F (12 F).
26. **Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire**, 1978, 64 p., 13 F (9 F).
27. **Pour une mathématique vivante en Seconde**, 1979, 128 p., 19 F (15 F).
28. **Analyse des données, tome 1**, 1980, 248 p., 36 F (30 F).
29. **Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire**, 1979, 192 p., 24 F (18 F).
30. **Les manuels scolaires de mathématiques**, 1979, 280 p., 36 F (30 F).
31. **Calculatrices 4 opérations (Elémentaire et premier cycle)**, 1979, 176 p., 19 F (15 F).
33. **Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 1**, 1979, 248 p., 31,50 F (25 F).
34. **Recherche inter-IREM, 1973-78, en géométrie de 4ème-3ème, dite "O.P.C." : réflexion critique et évaluation**, 1979, 160 p., 34,50 F (30 F).
35. **Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes**, 1979, 104 p., 24,50 F (20 F).
36. **Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Elémentaire**, 1980, 64 p., 11 F (9 F).
37. **Mots V**, 1980, 114 p., 18,50 F (14 F).
39. **Le renouveau de l'enseignement français des mathématiques**, 1980, 152 p. (brochure publicitaire réservée aux Congrès de Mexico et de Berkeley, 1980).
40. **Analyse des données, tome 2**, 1980, 304 p., 40 F (33 F).

Commandez-les à votre Régionale dont c'est une des seules ressources ...

(Voir les adresses en dernière page).

MEMBRES DE L'APMEP ne commandez pas ces brochures en renouvelant votre adhésion nationale !

publicité gratuite

Drôles d'aires

Marc Blanchard

AVERTISSEMENT

Lors d'une séance de travail destinée à la redécouverte de la formule de Pick (cf. p. 7), certains participants, non spécialistes, sont allés dans une toute autre direction que celle attendue par l'animateur malgré ses réticences et ses suggestions appuyées ! Et cela s'est révelé fécond et généralisable. La classique formule de Pick se trouve ainsi reléguée dans la longue liste des résultats complètement dépassés.

L'histoire se passe...

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, les parallèles aux axes passant par les points à coordonnées entières (les noeuds) forment un quadrillage.

Le but de cette étude est de calculer de façon originale l'aire des domaines délimités par des polygones dont les sommets sont des noeuds.

Nous généraliserons ensuite le résultat trouvé à toute dimension finie.

La présentation suit à peu près le cheminement de la découverte.

DANS LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN

Une découverte curieuse

Dans un plan quadrillé, considérons un polygone quelconque dont les supports des côtés sont des droites du quadrillage. Par exemple :

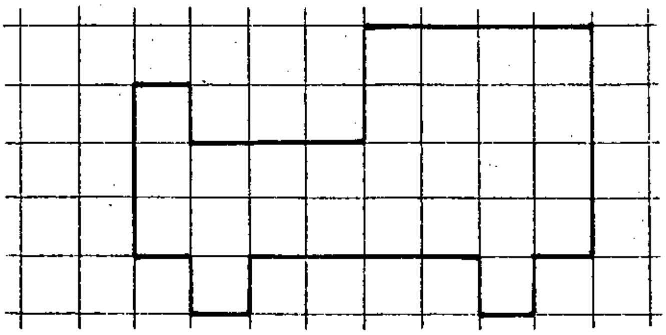


fig. 1

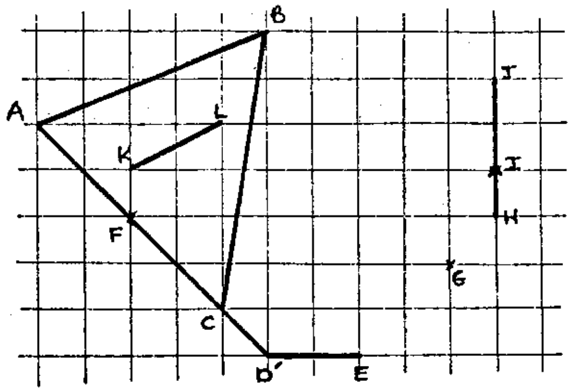


fig. 2

Les noeuds sont ou intérieurs au polygone, ou sur la frontière, ou extérieurs.

"Comptons" pour 1 chaque noeud intérieur (13 sur la figure 1), pour 0 chaque noeud extérieur. Quant aux noeuds sur la frontière, naïvement, comptons pour $\frac{1}{4}$ un coin saillant (10 ici), $\frac{3}{4}$ un coin rentrant (6) et $\frac{1}{2}$ un noeud non sommet (14).

Intuitivement chaque noeud relativement au polygone compte pour la portion de tour, intérieure au polygone quand on trouve autour de ce noeud, un degré d'appartenance au polygone en quelque sorte.

La somme obtenue : $(13 \times 1) + (10 \times \frac{1}{4}) + (6 \times \frac{3}{4}) + (14 \times \frac{1}{2}) = 27$, c'est justement l'aire du polygone (unité : l'aire du carreau élémentaire du quadrillage).

S'agit-il d'une coïncidence ou d'un résultat généralisable ?

S'il le désire, le lecteur vérifiera que le résultat reste valable pour tout autre exemple de polygone du type considéré, en particulier pour le carreau élémentaire $(4 \times \frac{1}{4} = 1)$.

Et maintenant, mathématisons.

Poids d'un noeud relativement à un domaine

Les seuls domaines du plan envisagés (sauf mention contraire) sont ceux délimités par un nombre fini de polygones dont les sommets -y compris les points de croisement éventuels- sont des noeuds du quadrillage.

L'ensemble de ces domaines est le clan de parties du plan engendré par les triangles dont les sommets sont des noeuds.

La frontière d'un domaine est la réunion d'un nombre fini de segments et de points isolés.

Soit D un domaine, pour tout noeud N :
on note $\{C_i \mid i \in I_N\}$ l'ensemble fini des droites supportant les côtés de D ne contenant pas N.

On pose $\delta_N = \frac{1}{2} \inf_{i \in I_N} d(N,C_i)$ où $d(N,C_i)$ est la distance de N à la droite C_i. δ_N est strictement positif.

Soit $\Gamma_{N,D}$ le cercle centré en N et de rayon δ_N.

$\Gamma_{N,D} \cap D$ est une réunion finie d'arcs de cercles.

Par définition, $P_D(N)$, le poids de N relativement à D est la mesure en tour, comprise entre 0 et 1, de la réunion des arcs de cercle de $\Gamma_{N,D} \cap D$ (mesure principale en tour de $\Gamma_{N,D} \cap D$). On peut remplacer $\Gamma_{N,D}$ par tout cercle de même centre et de rayon non nul, inférieur.

On peut vérifier que :

$$P_D(N) = 0 \iff N \notin \overline{\mathring{D}}, \quad (\overline{\mathring{D}} \text{ est l'adhérence de l'intérieur de } D)$$

$$P_D(N) = 1 \iff N \in \overline{\mathring{D}}$$

$$P_D(N) \in]0;1[\iff N \in Fr(\overline{\mathring{D}})$$

$\overline{\mathring{D}}$ est introduit pour éliminer d'abord les "excroissances" d'aires nulles (points ou segments), puis les "cicatrices" (points ou segments ôtés à des polygones).

Par exemple, dans le cas de la figure 2, on obtiendra :

$$D = ((ABC) \cup [C,D'] \cup [D',E[\cup \{G\} \cup [H,J]) \setminus ([K,L[\cup \{F\} \cup \{I\})$$

Alors

$\overline{\mathring{D}}$ est le polygone fermé (ABC), $Aire(D) = Aire(\overline{\mathring{D}})$ et pour tout N, $P_D(N) = P_{\overline{\mathring{D}}}(N)$ (ces dernières égalités dispensent désormais d'introduire $\overline{\mathring{D}}$ dans les formules liant les poids des noeuds et l'aire des domaines).

Dans le cas de la figure :

$$P_D(D') = P_D(E) = P_D(G) = P_D(H) = P_D(I) = P_D(J) = 0,$$

$$P_D(F) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_D(K) = P_D(K) = 1.$$

Tout domaine est borné (il peut être inclus dans une boule de diamètre fini), il n'existe donc, pour chaque domaine, qu'un nombre fini de noeuds de poids non nul.

Règle d'additivité

> D et D' sont 2 domaines tels que $Aire(D \cap D') = 0$.
> Alors pour tout noeud N,
>
> $$P_{D \cup D'}(N) = P_D(N) + P_{D'}(N)$$

Il suffit de le vérifier pour $N \in D \cap D'$.

On sait que $\Gamma_{N,D\cup D'} \cap (D \cup D') = (\Gamma_{N,D\cup D'} \cap D) \cup (\Gamma_{N,D\cup D'} \cap D')$

Pour ces réunions finies d'arcs de cercles, en tour :

- la mesure principale de $\Gamma_{N,D\cup D'} \cap (D \cup D')$ est $P_{D\cup D'}(N)$;
- celle de $\Gamma_{N,D\cup D'} \cap D$ égale $P_D(N)$ car $\Gamma_{N,D\cup D'}$ a même centre que $\Gamma_{N,D}$ et lui est inclus ;
- par analogie, celle de $\Gamma_{N,D\cup D'} \cap D'$ égale $P_{D'}(N)$;
- enfin celle de $\Gamma_{N,D\cup D'} \cap (D \cap D')$ est nulle.

D'après la règle d'additivité des mesures d'arcs de cercles, on en déduit celle des poids énoncée.

Sur le schéma D et D' sont hachurés.

$\Gamma_{N,D} \cap D$ est la réunion de 2 arcs de cercles

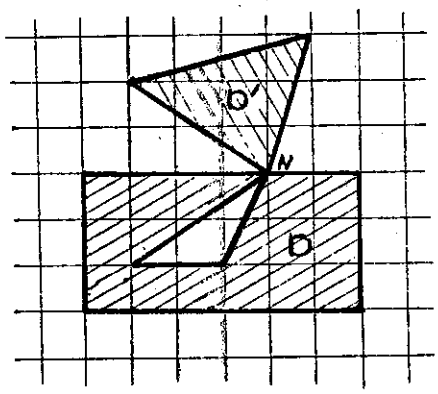


fig. 3

Applications de la règle d'addivité

Le résultat étant vérifié pour tout carreau unité, il l'est pour tout domaine du clan engendré par ces carreaux. (cf. figure 4)

Le résultat se généralise aux trapèzes rectangles, dont les bases sont supportées par des droites du réseau.

En effet, soit T l'un d'eux. On peut le réunir avec un trapèze isométrique T' pour obtenir un rectangle. (cf. figure 5)

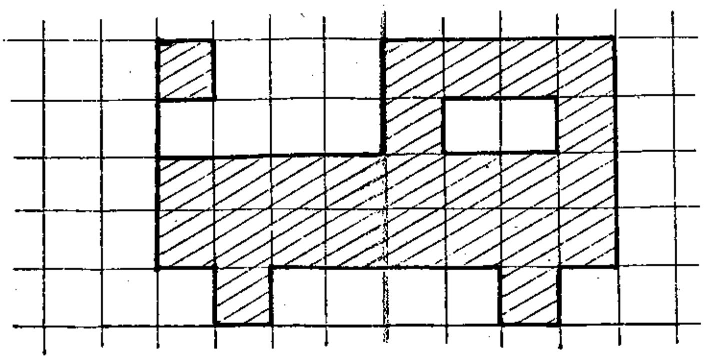


fig. 4

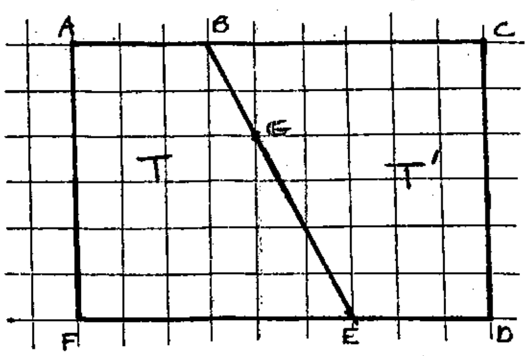


fig. 5

$Aire(T \cap T') = 0$, on peut donc appliquer la règle d'addivité.

On a par exemple : $P_{T \cup T'}(B) = P_T(B) + P_{T'}(B) = \frac{1}{2}$

$$P_{T \cup T'}(G) = P_T(G) + P_{T'}(G) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il est notable que $P_T(E) = P_{T'}(B)$ (par symétrie), donc $P_T(B) + P_T(E) = \frac{1}{2}$.

Calculons l'aire de T. Soit

- i le nombre de noeuds intérieurs à T (ou T') ;
- p le nombre de noeuds éléments de $]A,B[\cup]E,F[\cup]F,A[$ (ou $]B,C[\cup]C,D[\cup]D,E[$) ;
- p le nombre de noeuds éléments de $]B,E[$.

Alors le rectangle $T \cup T'$ possède

- $2i+p'$ noeuds intérieurs,
- $2p+2$ noeuds sur le périmètre autres que les sommets,
- 4 sommets.

On en déduit :

$$Aire(T) = \frac{1}{2} Aire(T \cup T') = \frac{1}{2} \left((2i+p') \times 1 + (2p+2) \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4}\right)$$

$$= i + \frac{1}{2}(p+p') + 1 \overset{(*)}{=} i + \frac{1}{2}(p+p') + \frac{1}{4} \times 2 + P_T(B) + P_T(E)$$

D'où le résultat attendu : $Aire(T) = \sum_{N \in \mathcal{R}} P_T(N)$

(où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des noeuds du réseau).

Cas des triangles

(ABC) étant un triangle dont les sommets sont des noeuds, on peut tracer :

A,B,C sont projetés orthogonalement sur une droite du quadrillage en A',B',C' respectivement.

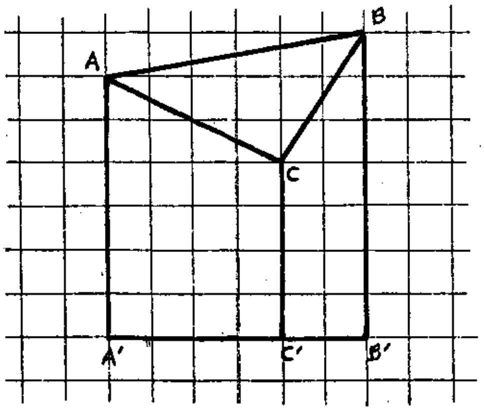


fig. 6

$Aire(ABC) = Aire(ABB'A') - Aire(ACC'A') - Aire(BCC'B')$.

(*) *C'est la* *formule de Pick*. *Soit P un polygone non croisé, non aplati, dont les sommets sont des noeuds, ayant i points intérieurs et p points sur la frontière, alors :* $Aire(P) = i + \frac{p}{2} + 1$.

On trouvera des précisions sur cette formule dans PLOT n° 2 (Oct. 76). Elle est fort mal généralisable.

Le calcul de l'aire de (ABC) se ramène donc au calcul de l'aire de trapèzes rectangles dont les bases sont supportées par des droites du réseau.

D'après la règle d'additivité, pour tout noeud $N \in \mathcal{R}$:

$$P_{(ABC)}(N) = P_{(ABB'A')}(N) - P_{(ACC'A')}(N) - P_{(BCC'B')}(N).$$

Il s'en déduit immédiatement : $\text{Aire}(ABC) = \sum_{N \in \mathcal{R}} P_{(ABC)}(N)$.

Domaines plans concernés

Cette formule vraie pour tous les triangles dont les sommets sont des noeuds, grâce à la règle d'additivité, est donc vraie pour tout domaine constitué d'une réunion finie de triangles à intérieurs 2 à 2 disjoints privée d'un ensemble du même type

Exemple de figure (c'est le cas de le dire !) : (cf. figure 7)

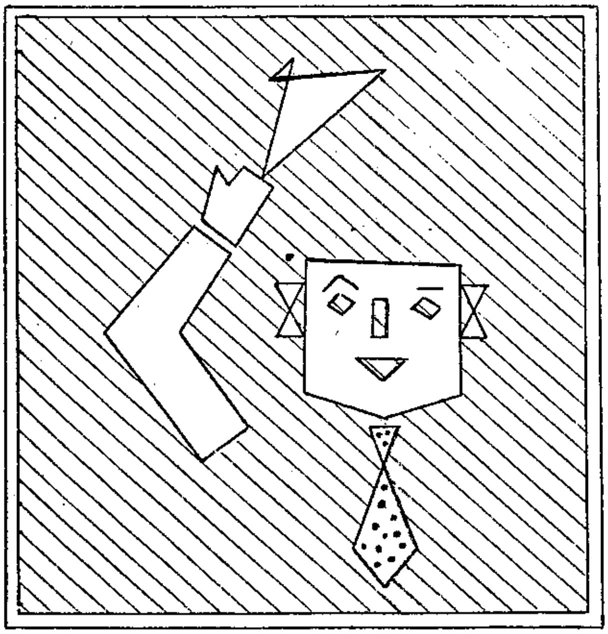


fig. 7

D'où le théorème :

Pour tout domaine D de diamètre fini, limité par un nombre fini de polygones dont les sommets sont des noeuds du réseau, en notant $P_D(N)$ le poids d'un noeud N quelconque, relativement à D, on a :

$$\boxed{\text{Aire}(D) = \sum_{N \in \mathcal{R}} P_D(N)}$$

Une généralisation dans le plan

Ce résultat peut s'étendre au clan des domaines engendré par les polygones dont les sommets (ou points de croisement) sont à coordonnées rationnelles dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ lié au réseau.

Soit M le p.p.c.m. de tous les dénominateurs des coordonnées rationnelles de tous les sommets écrites sous forme irréductible, d'un domaine D fixé du nouveau clan considéré.

Traçons le réseau $\mathcal{R}'$ plus fin que le réseau initial $\mathcal{R}$, dont les droites ont des équations de la forme $x = \frac{k}{M}$ ou $y = \frac{k}{M}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

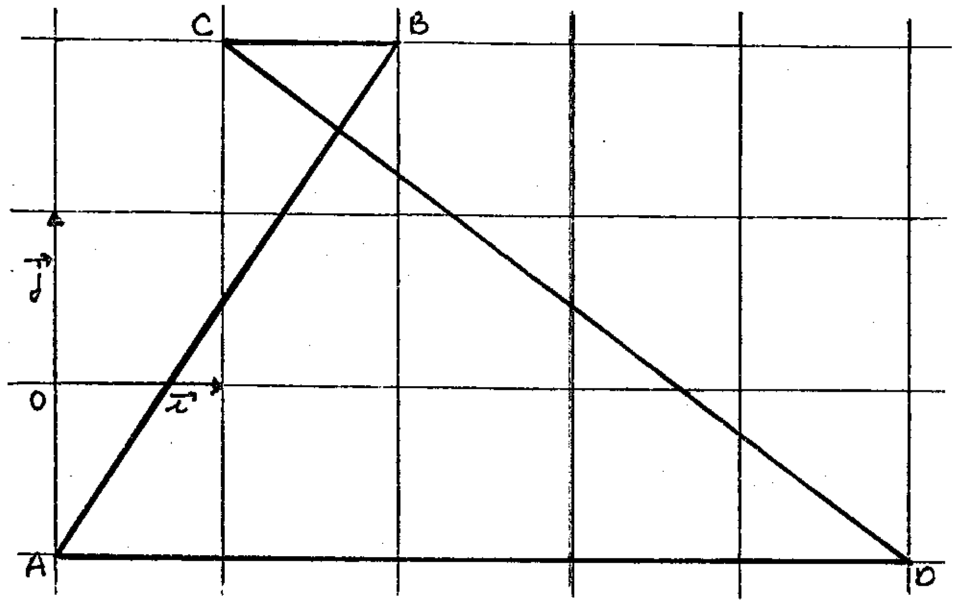
Choisissons comme nouveau repère $(O, \frac{\vec{i}}{M}, \frac{\vec{j}}{M})$. Tout noeud N de coordonnées $(\frac{\alpha}{M}, \frac{\beta}{M})$ dans le repère initial a pour coordonnées (α, β)

dans le nouveau repère.

Il est donc possible d'appliquer la formule pour calculer l'aire de D. Mais alors la nouvelle unité d'aire est M^2 fois plus petite que l'unité initiale, le résultat trouvé dans le nouveau repère est donc à diviser par M^2 pour trouver le résultat dans le repère initial.

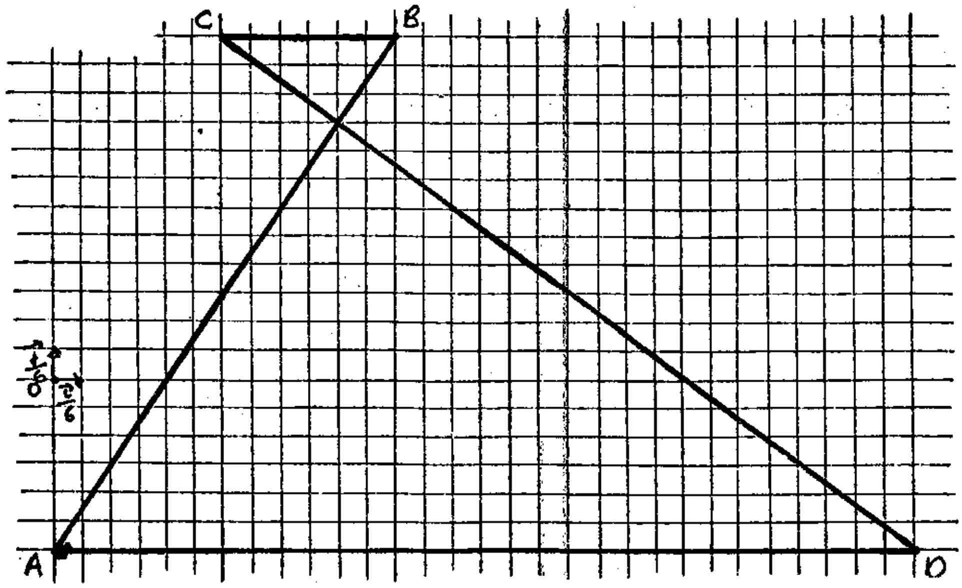
Par exemple, soit à calculer l'aire du quadrilatère croisé suivant :

fig. 8



Les coordonnées du point de croisement sont $(\frac{5}{3}, \frac{3}{2})$. Ici $M = 6$.
On trace :

fig. 9



D'où : $\quad \text{Aire(ABCD)} = \frac{1}{M^2} \sum_{N \in \mathcal{R}} P_{(ABCD)}(N) = \frac{13}{2}.$

La section d'un cube

Charles Pérol

Au groupe de travail que j'animais à Orléans le Vendredi 21 Novembre (1), j'ai proposé d'étudier l'exploitation en classe de Seconde Indifférenciée d'un thème constitué par la réalisation d'un tâche technique précise dont l'énoncé ne comporte pas de difficulté de compréhension. Je propose d'utiliser ce thème dès le début de l'étude de l'espace et même dès le début de l'étude de la géométrie en seconde.

Les élèves recoivent dès l'abord du travail l'énoncé ci-dessous :

> *Le CUBE COUPE en DEUX*
>
> *ABCD est un carré de 10 cm d'arête AA', BB', CC', DD' sont les 4 arêtes, perpendiculaires au plan ABCD d'un cube ABCD A'B'C'D'.*
>
> *Le point P est situé sur l'arête AB à 8 cm de A*
>
> *Le point Q est situé sur l'arête A'B' à 2 cm de A'*
>
> *Le point R est situé sur l'arête D'C' à 8 cm de D'*
>
> *Le plan PQR coupe le cube en deux morceaux. On se propose de réaliser des maquettes (grandeur réelle) de ces deux morceaux :*
>
> *a) en carton mince*
>
> *b) en polystirène expansé*
>
> *Question subsidiaire :*
>
> *Volume des morceaux.*

Pour les élèves il s'agit d'un thème très fermé, les seules libertés qui leur sont laissées sont :

a) pousser plus ou moins loin la réalisation,

b) choix des méthodes de réalisation et d'étude.

En développant ce thème j'essayais d'apporter une réponse à une question posée à Clermont-Ferrand en Juin par Michel MANIVEL :

" Comment peut-on traiter un thème spatial sans avoir acquis préalablement un minimum de connaissances théoriques ? Quel est le minimum indispensable ? "

Je me proposais de persuader les participants du groupe qu'il est possible de commencer par un thème et de l'utiliser pour motiver les études théoriques qui conduisent aux résultats fondamentaux.

Le travail sur ce thème durera dans la classe pendant au moins 4 heures, probablement 6 heures peut-être plus. Il importe qu'à chaque séance :

- La tâche technique progresse,
- Des résultats généraux soient acquis et notés.

Dans ce que je vais écrire ici, il est difficile de discerner ce que j'avais prévu avant la séance, ce qui a été apporté par les participants et ce que

(1) Ce groupe de travail s'est tenu lors d'une rencontre de la Commission Inter-Irem de Géométrie (NDLR)

j'ai modifié depuis la séance sous l'influence de ce qui a été dit.

Le découpage que je propose est seulement indicatif. Le maître doit être prêt à l'ajuster constamment suivant les réactions de la classe.

Première séquence - (les séquences ne sont pas d'égales durées, celle-ci est courte).

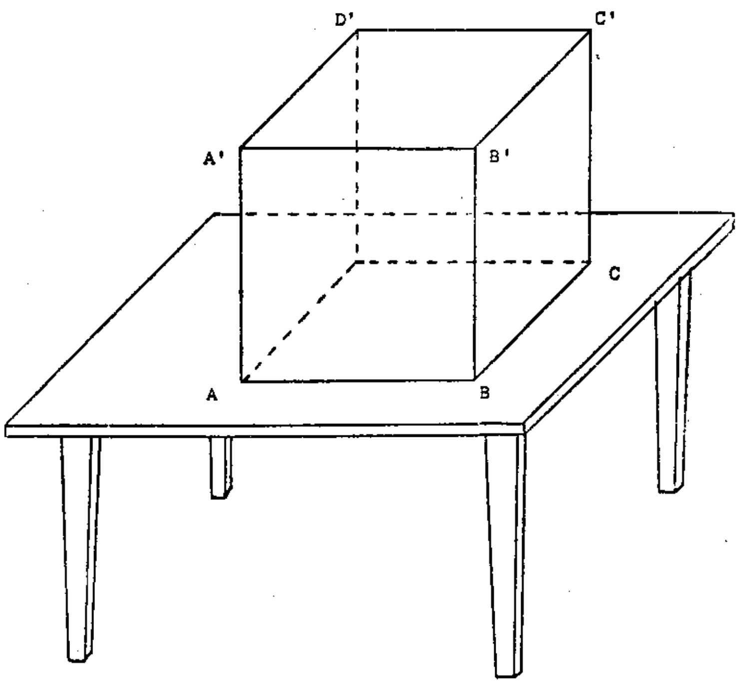
Faire dessiner une figuration plane de la situation. Je pense que la grande majorité des élèves, à cause de leur vécu, donneront la représentation ci-contre.

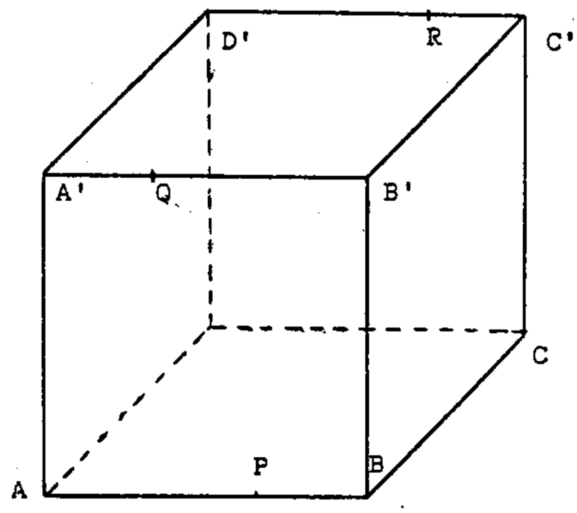
Un petit débat a eu lieu dans le groupe sur cette question. Je crois que la plupart des participants ont été d'accord sur ce point.

Je crois qu'il y a même intérêt à représenter le cube posé sur une table, comme ci-dessous.

Contenus à dégager :

- par 3 points non alignés il passe un point et un seulement,
- si une droite (PQ) a deux points dans un plan, elle y est contenue toute entière.





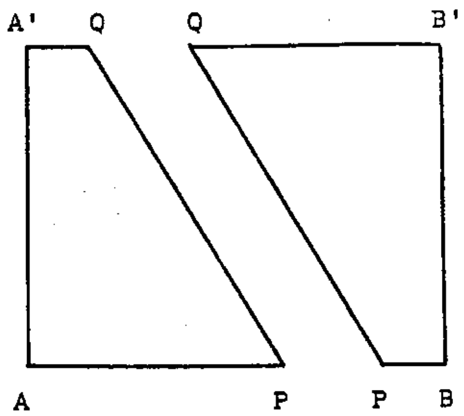
Deuxième séquence - (plus longue)

Faire amorcer la construction en papier.

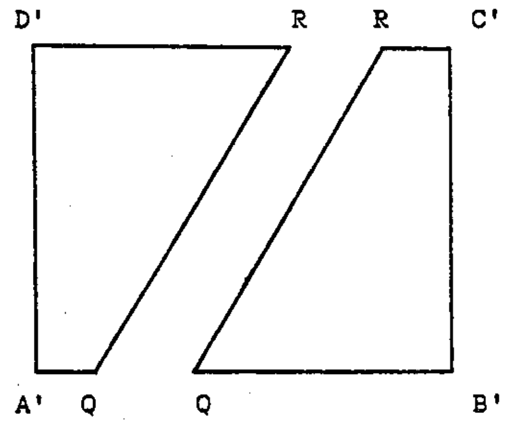
Face de " gauche " du morceau de gauche.

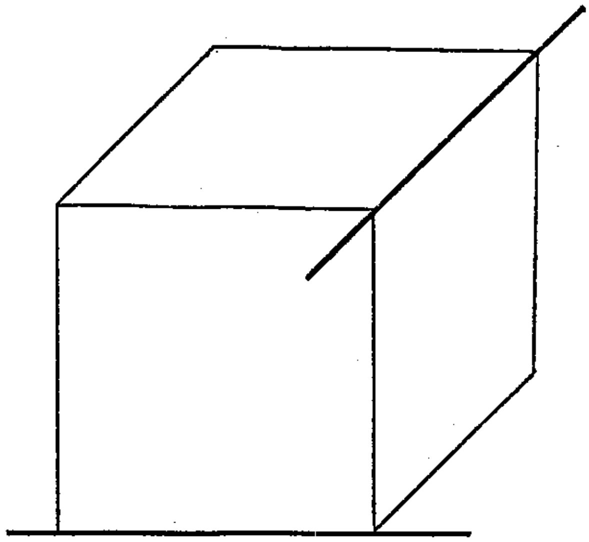
Le carré ADD'A' n'est pas coupé par le plan PQR. Je crois que pour les élèves aucun problème ne se pose. Il ne serait pas opportun de couper les cheveux en quatre.

Faces avants : pas de problème

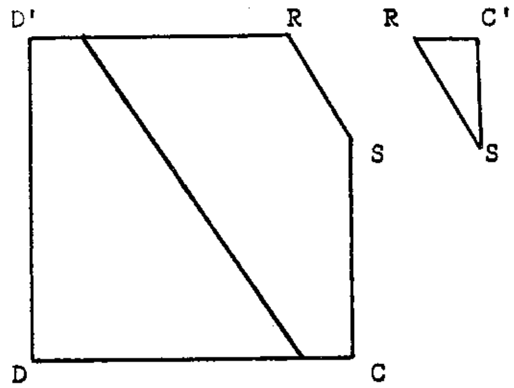


Faces supérieures : pas de problème

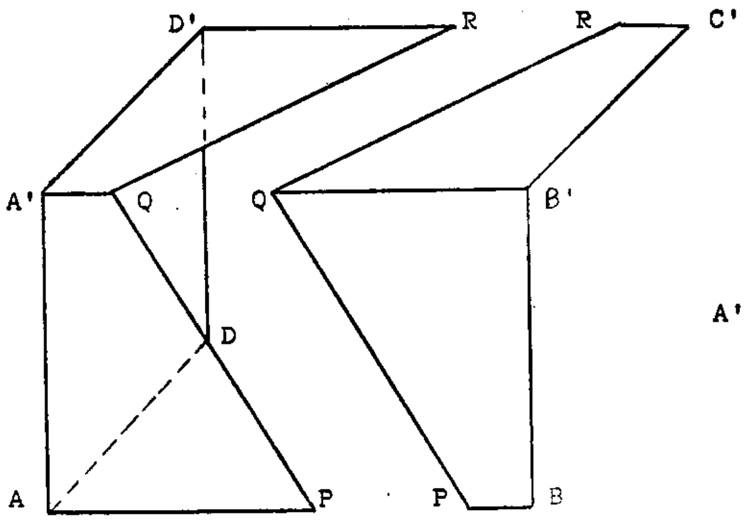




Faire réaliser les morceaux ci-dessus en vraie grandeur dans le carton prévu par l'énoncé et les assembler par exemple en scotchant. Faire dessiner ce que nous avons obtenu.



Contenus à dégager : (?)

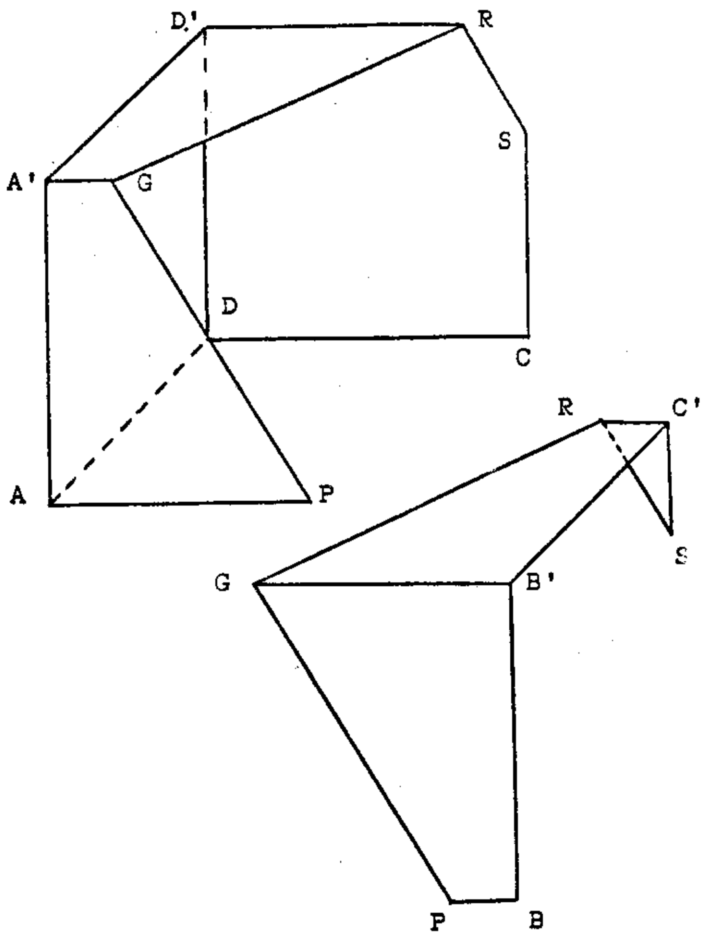


Troisième séquence -

Poursuite de la construction en papier.

Face arrière : il faut reconnaître que le plan PQR coupe les faces arrière et avant suivant des droites parallèles.

A cette occasion on discutera les positions relatives de 2 droites dans l'espace et on exhibera, sur le cube c'est facile, des droites qui n'ont aucun point commun sans être parallèles.



Contenus à dégager dans la synthèse :

- si 2 plans distincts ont un point commun alors ils ont une droite commune,

- positions relatives de 2 droites dans l'espace,

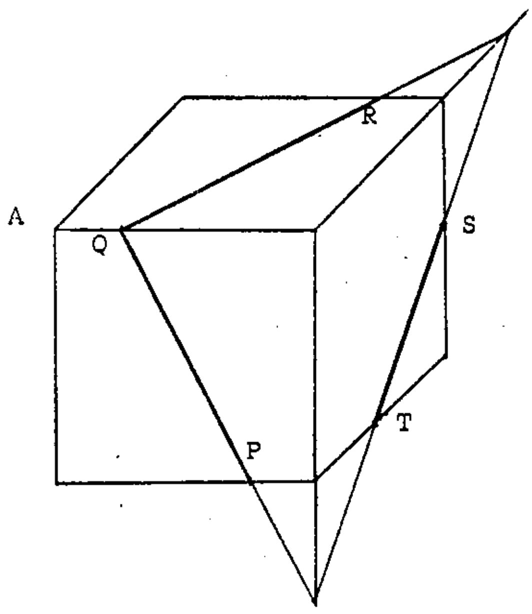
- notion de plans parallèles,

- positions relatives de 2 plans,

- sections par un plan (π) de deux plans parallèles (π') et (π'').

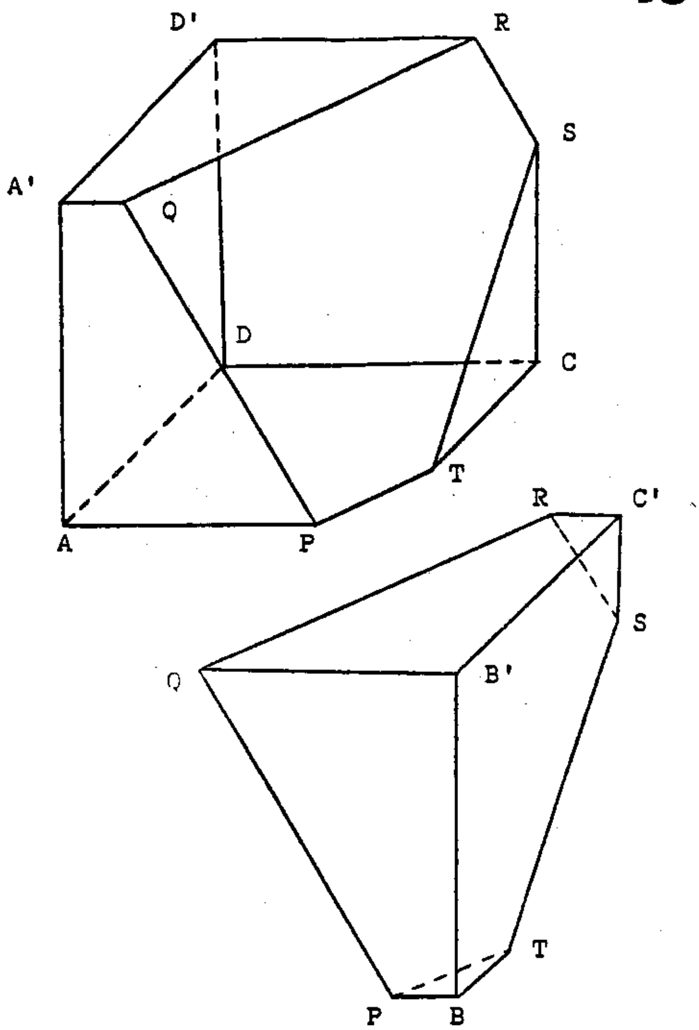
Et aussi figuration des droites parallèles en perspective cavalière.

Remarque - Quelques participants ont pensé que des élèves pourraient préalablement chercher l'intersection avec la face de droite de la manière suggérée par le croquis ci-contre et en déduire les intersections avec la face arrière et la face inférieure.



Quatrième séquence -

Réinvestissement de ce qui précède pour déterminer les faces inférieures (Pas de nouvelle difficulté) et détermination des faces de droite. Assembler.



Cinquième séquence

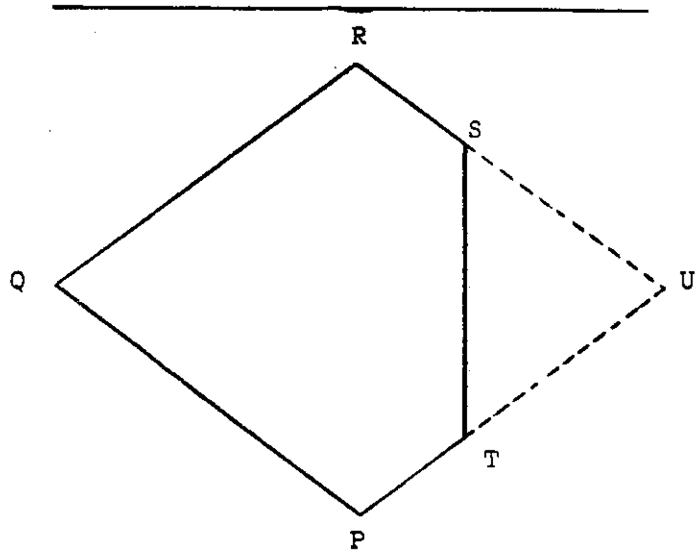
Etude de la face PQR.

Cette séquence est difficile.

Il nous a semblé que dans un premier temps, les élèves verraient bien :

a) que la face a 5 côtés,

b) que PQ et RS sont parallèles ainsi que QR et PT.



Nous avons aussi pensé qu'en tenant compte des particularités de dimension d(AP) = d(DR), les élèves trouveraient vite que d(PQ) = d(QR) et qu'ils trouveront ces longueurs sur les figures déjà dessinées.

Nous avons pensé qu'ils auraient de la même manière d(PT) = d(RS) et la longueur commune est construite.

La difficulté provient de la détermination de " l'applatissement " du losange PQRU.

Les méthodes envisageables sont variées. Il serait bien que les diverses équipes dans la classe trouvent des méthodes diverses. La synthèse serait riche.

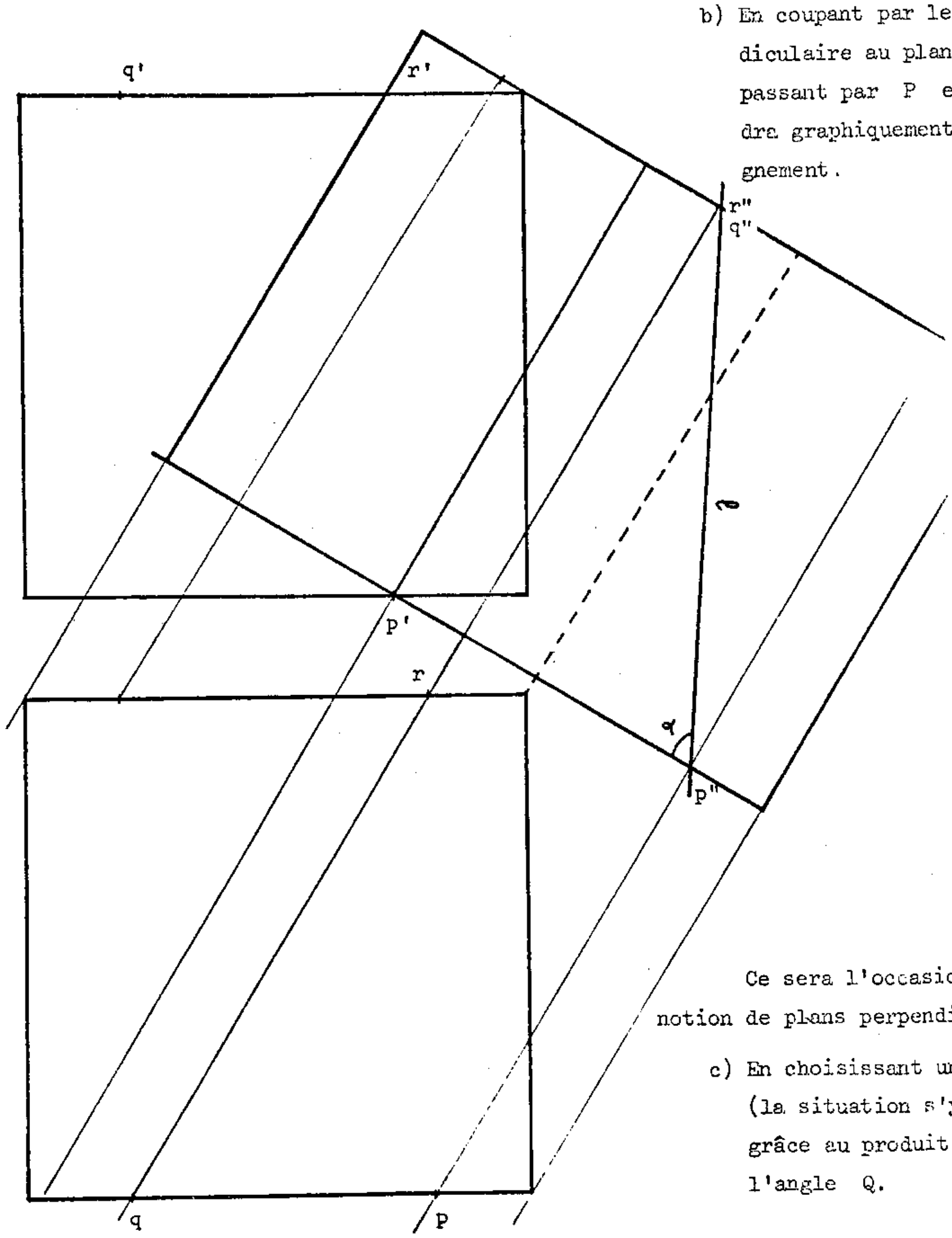
Il a semblé au groupe qu'il ne serait pas mauvais d'exploiter les particularités dimensionnelles déjà signalées pour obtenir $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{BC}$ et $d(PR) = 10\sqrt{2}$ cm.

La construction en résulte .

Avec un énoncé modifié, pour éviter cette particularité, que peut-on faire ?

a) En coupant par 2 plans passant par P et R parallèles à ADD'A' on isole un pavé dans lequel PR est une diagonale. La longueur PR en résulte d'après le programme de 3ème

b) En coupant par le plan perpendiculaire au plan ABCD et en passant par P et R, on obtiendra graphiquement le même renseignement.



Ce sera l'occasion d'introduire la notion de plans perpendiculaires.

c) En choisissant un repère orthonormé (la situation s'y prête), on pourra grâce au produit $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}$ calculer l'angle Q.

Mais peut-être cela devra-t-il être repris en 1ère.

d) En coupant par un plan perpendiculaire à la direction QR, on obtiendra la distance ℓ des parallèles PT et QR.
On obtiendra en même temps la mesure ou la construction du rectiligne α des dièdres d'arête PT et QR.

Ce renseignement permettra à la fois d'achever les constructions en carton et de régler le fili-coupeur pour la seconde réalisation demandée.

La voie d, permet et demande de préciser les contenus apparentés aux notions de :
- droite perpendiculaire à un plan,
- plans perpendiculaires,
- dièdre.

Pour toute cette partie la figuration en perspective cavalière est inadéquate. C'est une occasion d'introduire la figuration de MONGE et de pratiquer un changement du plan frontal de projection (ou de le choisir d'emblée de manière pertinente). Voyez figure page .

Objectifs poursuivis -

A) Au groupe de travail d'Orléans :
- persuader les participants qu'on peut partir d'un problème et, chemin faisant, dégager une bonne partie des résultats théoriques qu'on souhaite obtenir dans la classe.
- Persuader les participants que cette méthode conduit les élèves à une bonne attitude vis-à-vis de la géométrie et plus généralement des maths.
- Persuader les participants que sans partir d'une axiomatique on peut néanmoins raisonner et déduire.

B) Dans la classe de 2ème.
- Donner aux élèves la bonne attitude mentionnée ci-dessus.
- Contribuer à former la vision de l'espace.
- Faire acquérir quelques résultats théoriques.

La tâche technique (couper le cube) est un thème. Pour les élèves elle apparaît comme le but et il est bien qu'il en soit ainsi. Elle apporte la motivation et l'encouragement. Elle ne doit pas être dévalorisée aux yeux des élèves.

Elle est le moyen de validation des connaissances et des méthodes de travail acquises.

Prolongement possible pour les plus rapides -

Problème analogue mais avec 3 points choisis de manière plus vicieuse ce qui exigera de faire intervenir des points extérieurs.

P sur le segment AB
Q sur le segment A'D'
R sur le segment C C'

Remarques diverses -

- Je considère comme essentiel que le thème concerne une figure " épaisse ". Je crois satisfaire ainsi une exigence formulée par Rodolphe BKOUCH.
- Il me semble intéressant que le thème soit fermé. Il ne s'agit pas d'étudier dans l'abstrait et le vague " les " sections planes du cube.
- Peut-être pourra-t-on dans les diverses équipes de la classe varier les données, mais pour chacune d'elles le problème sera fermé.

La rubrique du Rubik (1)

Gérard Chauvat et Pierre Nury

Le Rubik's Cube ou Cube Hongrois (ou encore cube magique !) est un casse-tête à la mode que vous connaissez sans doute déjà pour l'avoir vu à la Télévision, dans les vitrines des magasins de jouets ou dans les grandes surfaces à la veille de Noël 1980.

Cet objet peut être à la base d'activités mathématiques poussées (voir Bibliographie B3) et nous souhaitons ouvrir dans ce numéro du PLOT une rubrique qui lui soit consacrée, et à laquelle vous pourriez contribuer en nous envoyant vos propres réflexions et recherches[1].

Cette rubrique sera divisée en trois parties visant à :

1) donner la possibilité de reconstituer le cube en moins de 10 mn sans dextérité ni mémorisation excessives. Nous exposerons ici les méthodes publiées par : Deledicq-Touchard (B2), Halberstadt (B3), Singmaster (B1)...
2) donner des manoeuvres permettant d'accélérer le remontage et proposer des problèmes à résoudre,
3) envisager l'utilisation du cube dans la classe.

INFORMATIONS GENERALES

- Vous pouvez vous procurer le cube hongrois dans les magasins de jouets, certaines grandes surfaces et certains catalogues de vente par correspondance à des prix fort divers : de 49 à 65 F !
- Bibliographie :

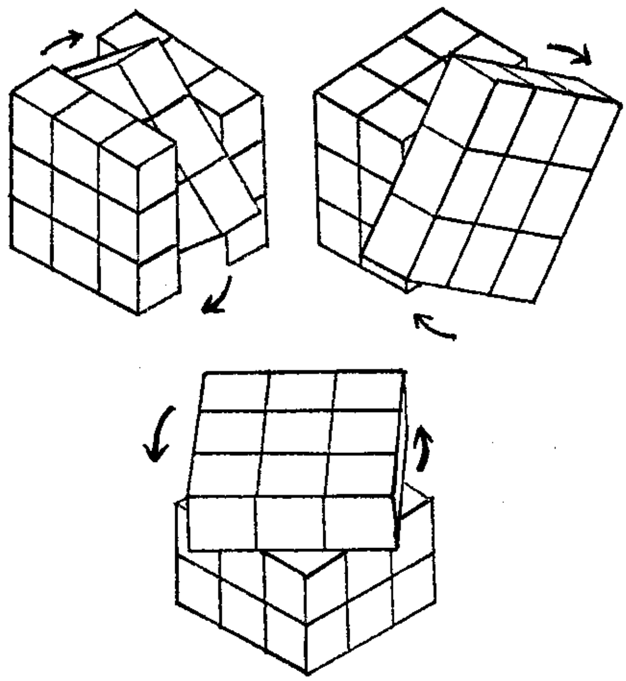
B1 - David SINGMASTER : Notes on the magic cube (Octobre 1979).
B2 - A.DELEDICQ et J.B. TOUCHARD : Le cube Hongrois-mode d'emploi. (IREM Paris VII : Mars 1980 ; 3è tirage Mars 1981).
B3 - Emmanuel HALBERSTADT : Cube Hongrois et théorie des groupes (Pour la science n° 34, Août 1980).
B4 - Science & Vie, n° 753, Juin 1980.
B5 - Jeux et Stratégies n° 6
B6 - IREM de Besançon, Bulletin de liaison n° 9, 10 et 11 (1980)
B7 - IREM de Toulouse , Bulletin n° 1 (Janvier 1980)

1. *Ecrire au journal, qui transmettra.*

- Structure externe du cube et but du jeu :

D'une conception technique très astucieuse, il se présente lorsqu'on l'achète (observez le bien ce jour là ... vous risquez de ne pas le revoir sous cet aspect pendant longtemps !) sous forme d'un cube 3x3x3 semblant être constitué de 27 "petits cubes" colorés dont 26 sont plus ou moins visibles. Ces "cubes élémentaires" forment les 6 faces du cube Hongrois, chacune de couleur uniforme au départ.

A l'aide d'une articulation centrale très ingénieuse (voir encadré) chacune des faces (ou plutôt chacun des étages) du Rubik's cube peut tourner de 90° (ou 180°, ou 270°), dans les deux sens selon un axe vertical ou horizontal pour reformer un "nouveau cube".

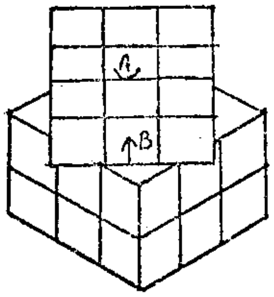


Le jeu est simple, en tous cas dans son principe : après avoir mélangé les cubes de chaque étage en les ayant fait tourner chacun sur son axe horizontal ou vertical, il faut parvenir à reconstituer le Rubik's cube d'origine dont chaque face présente une couleur unique.

- Ecorché :

Vous pouvez démonter votre cube (évitez cependant de le faire avec un cube neuf : vous pourriez l'endommager) selon la méthode suivante :

1°) Faites pression avec le pouce en A.
2°) Faites levier après avoir introduit un objet (lame ou clef) en B.



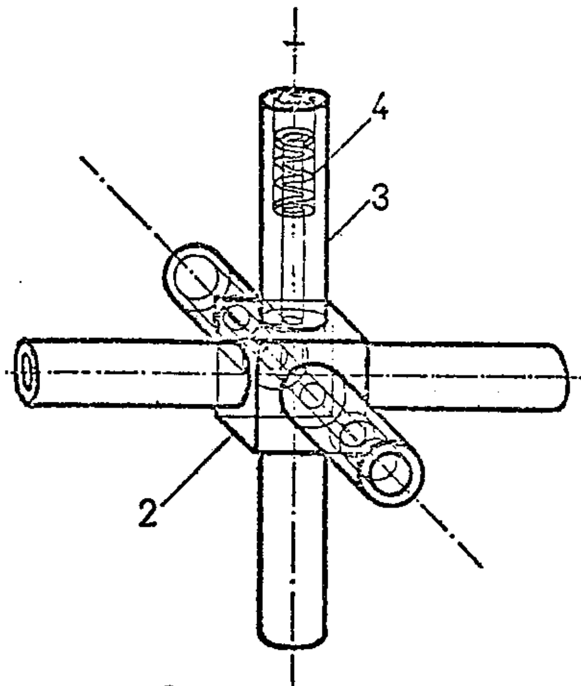
- Structure interne :

Les documents qui suivent illustrent l'intérieur du cube. Les dessins ci-dessous sont extraits du brevet que Rubik a déposé auprès le l'Etat hongrois. Les photos de la page suivante ont été prises après avoir démonté un cube.

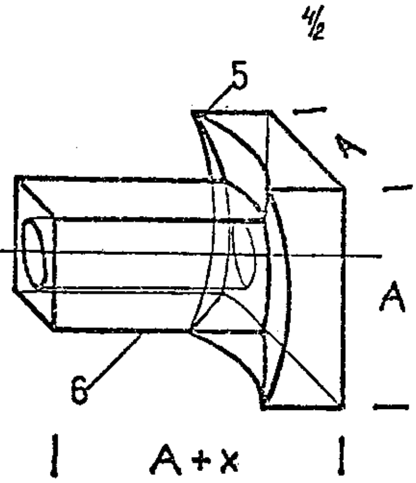
Remontage : Dans la position indiquée pour le démontage, vous faites pression sur le dernier cube arête remonté.

Attention : Si après l'avoir démonté, vous remontez votre cube de façon aléatoire, vous risquez d'avoir une surprise en tentant de reconstituer les rotations précédemment citées...

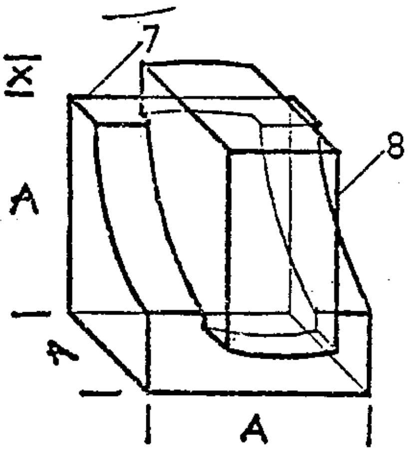
Quelques figures dessinées par Rubik pour illustrer son brevet.



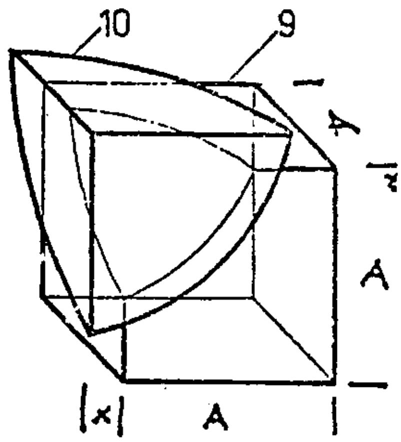
5.ÁBRA



6.ÁBRA



7.ÁBRA



8.ÁBRA

REMARQUES PRELIMINAIRES

On s'aperçoit rapidement que les 26 petits cubes colorés et visibles qui constituent le CH sont de plusieurs types ; on trouve (voir Ex.1) :

- 6 cubes-faces liés aux axes de rotations qui ne présentent qu'une seule facette colorée. Cette facette tourne autour de son centre mais ne se déplace pas (par rapport aux axes) ; Elle sert donc de repère pour la couleur de la face à reconstituer.
- 12 cubes-arêtes tous différents, qui ne présentent que 2 facettes colorées. Il est clair qu'à l'issue d'une manoeuvre un cube-arête (en abrégé c-a) ne peut prendre la place que d'un autre c-a.
- 8 cubes-sommets tous différents et qui présentent 3 facettes colorées. Un cube-sommet (en abrégé c-s) ne peut prendre la place que d'un autre c-s.

Notations:

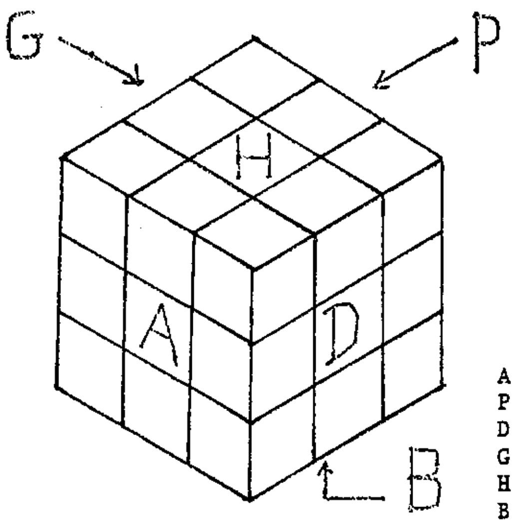
Pour cette rubrique, nous avons décidé d'adopter la notation utilisée par Deledicq-Touchard car, bien qu'elle soit contraire aux habitudes des mathématiciens, elle est tout à fait naturelle et sans doute plus accessible au grand public.

Signalons aussi que cette notation ne fera pas référence aux couleurs, celle-ci n'étant pas nécessairement les mêmes, ni placées de la même façon, d'un cube à un autre.

Vous pouvez tenir votre cube, une configuration (ou "état") étant donnée, de 24 façons de sorte que vous l'avez sous les yeux dans une position du type :

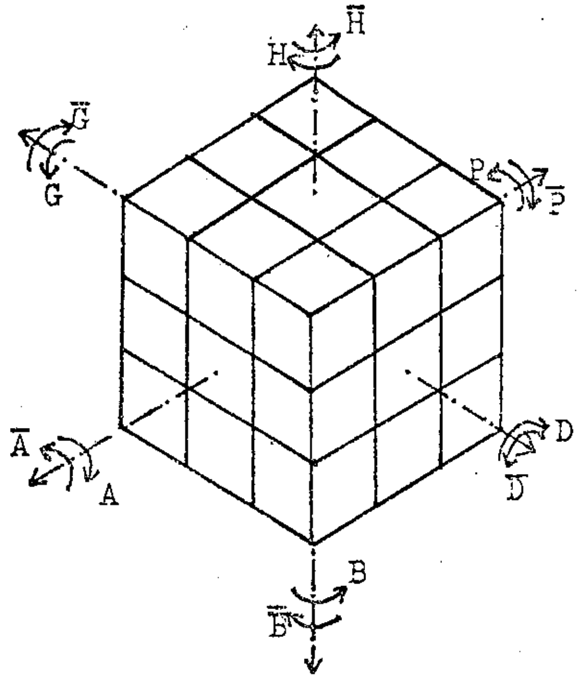
Nous symboliserons ainsi le cube et allons coder à partir d'une position de ce type les divers mouvements possibles.

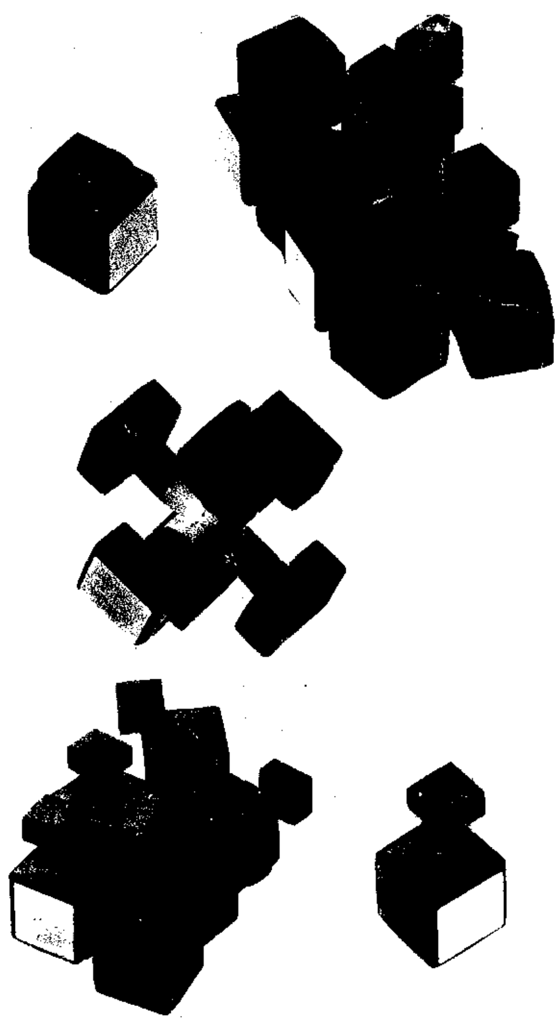
Codage des faces



A : *Antérieur*
P : *Postérieur*
D : *Droite*
G : *Gauche*
H : *Haut*
B : *Bas*

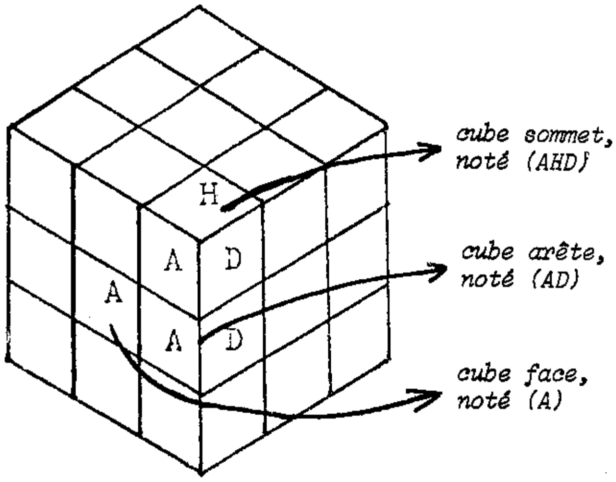
Codage des mouvements





Ce qu'on voit quand on a démon- démonté le Rubik Cube ... sans le casser !

Codage des cubes élémentaires



Les rotations d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre[2] seront notées de la même façon que les faces :

Exemple : D désigne une rotation d'1/4 de tour de la face droite.

$\bar{D}$ désignera la rotation inverse de D(1/4 de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre)

"D suivie de A" sera notée DA

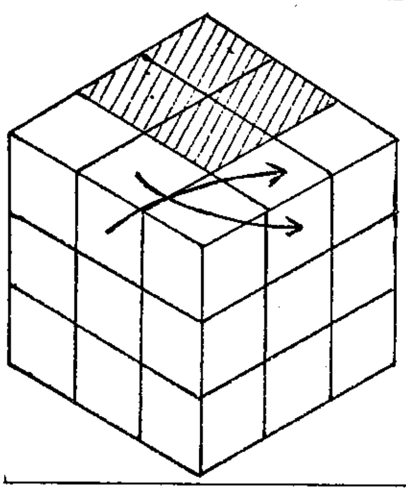
"D suivie de D" sera notée D^2 (rotation de D d'un demi tour).

Définitions :

Nous appelerons :
"coup" toute transformation du type A ou $\bar{D}$
"manoeuvre" toute suite finie de coups
Exemple : A, ADAD, AH^2D ...
"longueur d'une manoeuvre" le nombre de coups la constituant, après simplification éventuelle (voir paragraphe suivant)

Exemple : A est de longueur 1 : $\ell(A) = 1$
ADA est de longueur 3 : $\ell(ADA) = 3$
AH^2D est de longueur 4
$AH\bar{H}D = AD$ est de longueur 2
(voir exercice n° 4)

Nous schématiserons les mouvements par un dessin du cube sur lequel apparaîtra par une flèche une transformation de cube élémentaire, et par des hachures les cubes élémentaires (visibles) n'ayant pas changé de place en fin de transformation.



$A\bar{D}$

Simplifications d'écriture :

L'inverse d'une manoeuvre est obtenu en inversant l'ordre des coups de la manoeuvre et en inversant chaque coup la constituant.

Exemple : l'inverse de $AD\bar{A}\bar{D}$ est $\overline{AD\bar{A}\bar{D}} = DA\bar{D}\bar{A}$

Puissance d'une manoeuvre :

$$(AH^2D)^2 = AH^2DAH^2D$$

Quel que soit le coup C : $C^3 = \bar{C}$

C^4 ou $C\bar{C} = \bar{C}C$ ne modifie pas l'état initial ; on notera I de telles manoeuvres.

Par conséquent : $H\bar{H} = I$

Pour toute manoeuvre M :
$MI = M$

Commutateurs : L'écriture [HD] désignera $HD\bar{H}\bar{D}$

[HD] sera dans la suite appelé un "commutateur".

On pourra remarquer utilement que l'inverse de [HD] est [DH]

REMONTONS

La méthode exposée par Deledicq-Touchard dans B2 consiste à remonter le cube étage par étage (un étage étant constitué par une tranche de 9 cubes élémentaires).

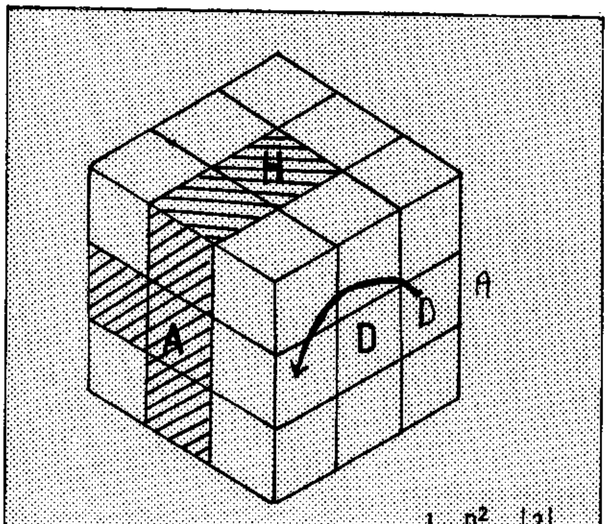
Nous allons montrer dans ce numéro comment remonter le premier étage en deux étapes :

i) mise en place des c-a (cubes-arêtes)
ii) mise en place des c-s (cubes-sommet)

Les manoeuvres indiquées concernent le remontage de la face antérieure (notée A) située devant le manipulateur.

i) Mise en place des cubes-arêtes :
Supposons qu'il s'agisse de mettre en place, et bien orienté, le cube (AD), quitte à tourner le cube autour du centre de la face A.

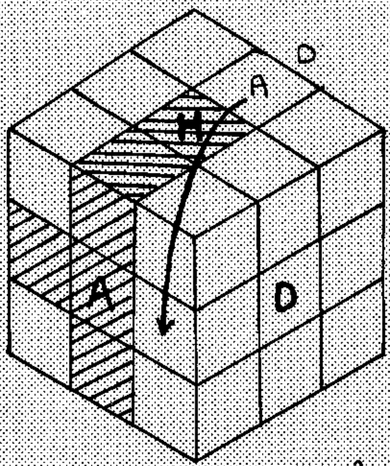
a) (AD) se trouve dans la tranche postérieure.



1. D^2 |2|

---

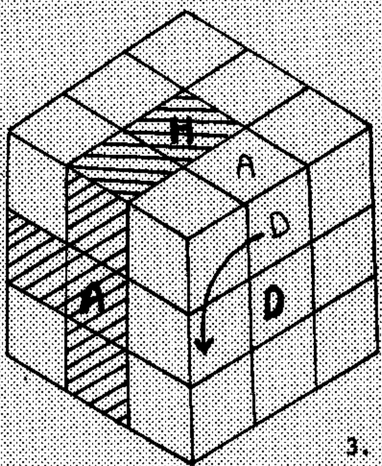
2. *La face considérée étant supposée placée devant soi.*



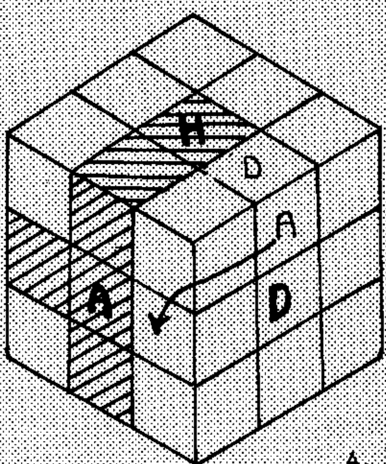
2. $H\overline{D}\overline{H}$ [3]

Les autres cas se ramènent à ceux-ci après P ou $\overline{P}$. Entre crochets figure la longueur de la manoeuvre. Remarquez que les manoeuvres indiquées dans ce chapître ne touchent pas aux autres c-a qui se trouveraient déjà bien positionnés.

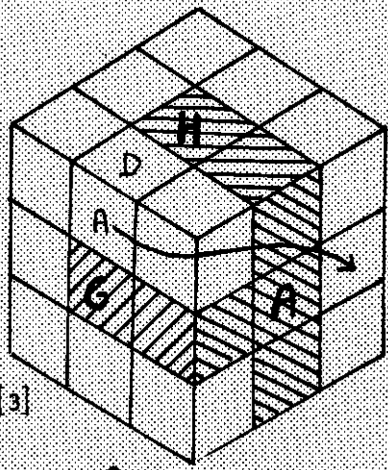
b) (AD) se trouve dans la tranche médiane :



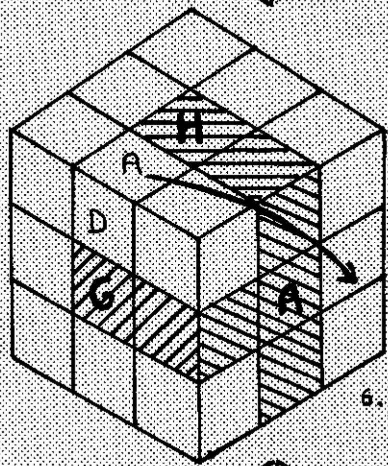
3. $\overline{D}$ [1]



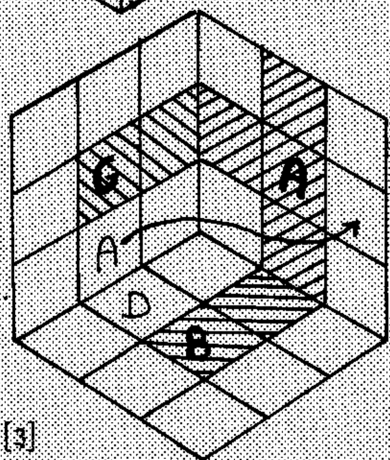
4. $\overline{A}HA$ [3]



5. $\overline{A}\overline{H}A$ [3]



6. A^2GA^2 [5]

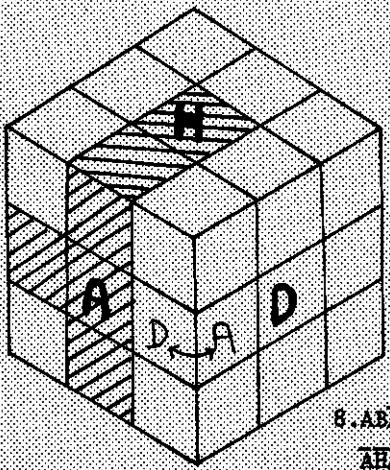


7. $AB\overline{A}$ [3]

Vous résoudrez les autres positions par analogie avec celles-ci.

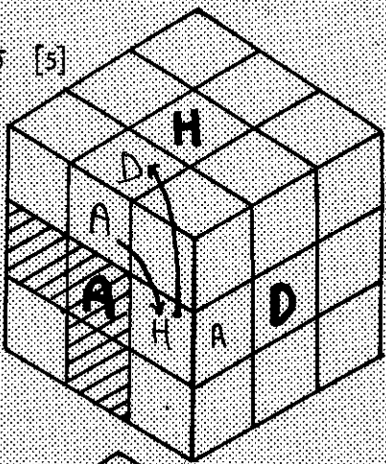
c) (AD) se trouve dans la tranche antérieure

- s'il est à la bonne place, mais mal orienté, utilisez les manoeuvres 8. $AB\overline{A}D$ ou $\overline{A}\overline{H}A\overline{D}$
- s'il est à la place d'un c-a se trouvant dans une autre tranche, mettez d'abord en place l'autre c-a grâce à l'une des manoeuvres trouvées en a) et b) ! Ou bien reportez-vous à B2.
- s'il doit être échangé avec un autre c-a du premier étage, utilisez l'une des manoeuvres 9 à 13.

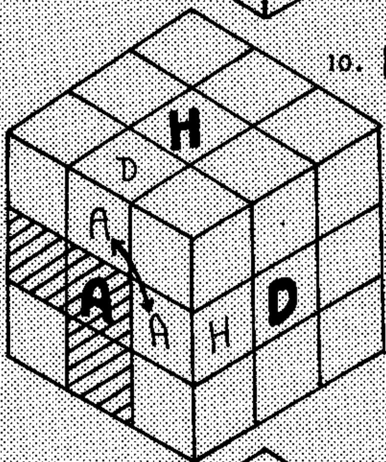


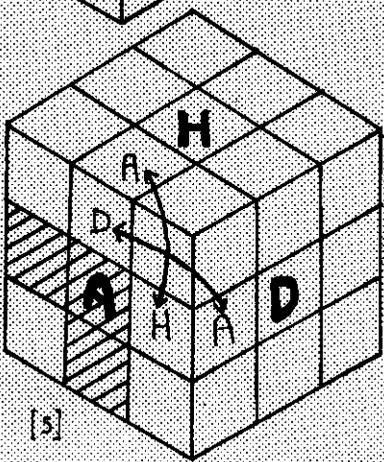
8. $AB\overline{A}D$ ou $\overline{AHAD}$ [4]

9. $ABD\overline{AD}$ [5]



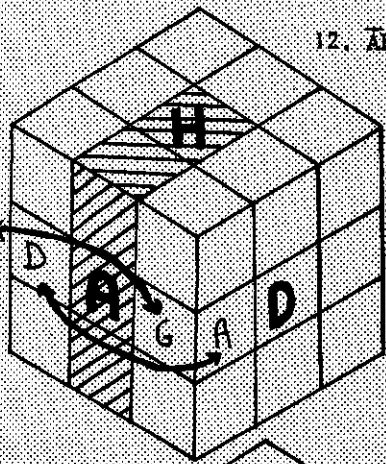
10. $[\overline{HA}]\overline{H}$ [5]

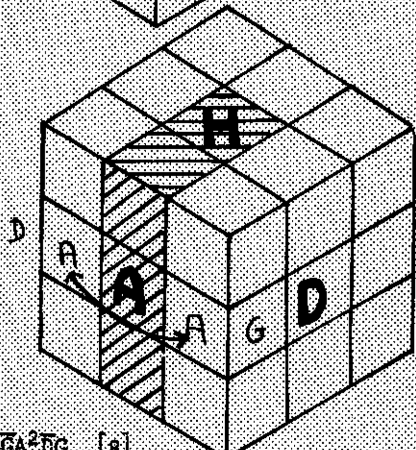




11. HDHD^2 [5]

12. $\overline{A}HBADG$ [6]



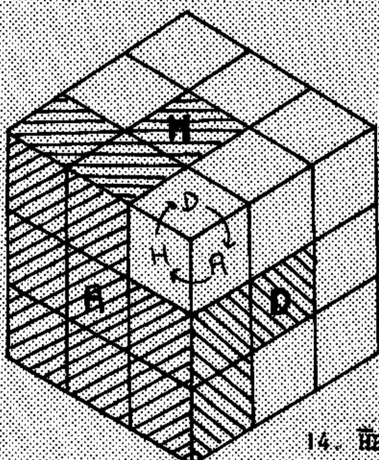


13. $A^2D\overline{G}A^2\overline{D}G$ [8]

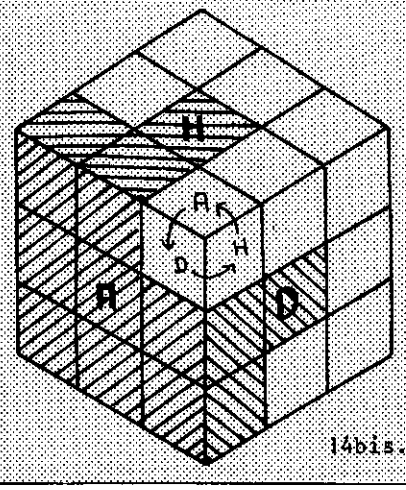
ii) Mise en place des cubes-sommets : Nous supposons, ici, qu'il s'agit de mettre en bonne position le cube (AHD). Vous remarquerez que les manoeuvres données ci-après ne touchent pas aux c-a déjà bien positionnés mais de plus elles laissent invariants les trois autres c-s. Elles permettent donc, en procédant de proche en proche, d'achever le premier étage.

Il y a 2 cas :

a) (AHD) est à sa place mais mal orienté : voir manoeuvre 14. $\overline{H}PDDP\overline{D}$ ou la manoeuvre inverse qui fait pivoter le c-s dans l'autre sens : 14bis. $DP\overline{D}\overline{H}\overline{P}H$.



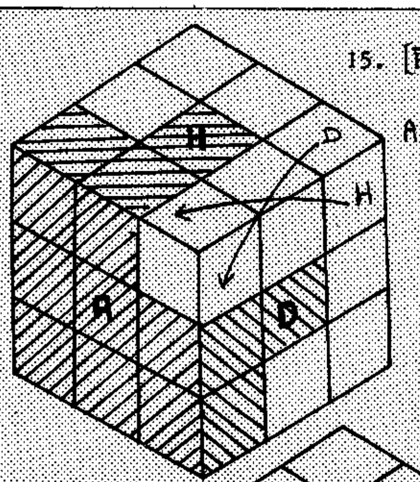
14. $\overline{H}PDDP\overline{D}$ [6]



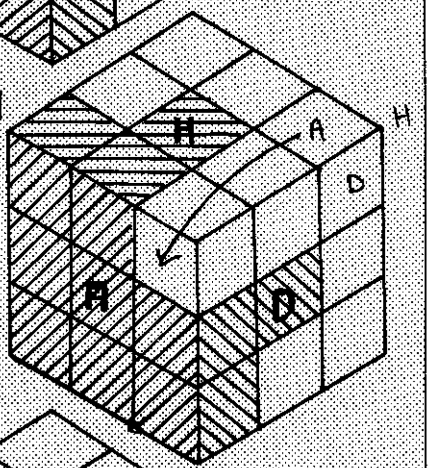
14bis. $\overline{DPDHP}H$ [6]

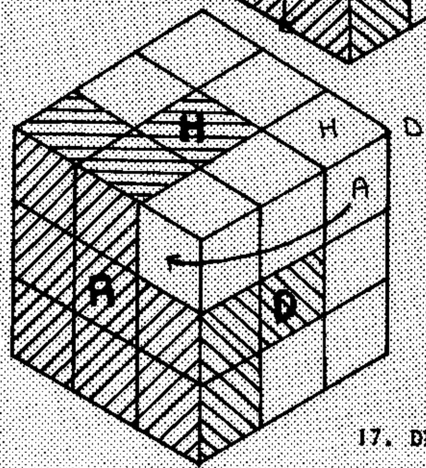
b) (AHD) est dans la tranche postérieure : vous l'amenez en (DHP) par P, $\overline{P}$ ou P^2 ; puis utilisez l'une des manoeuvres 15 à 17 suivant la place de la facette A.

15. [$\overline{HP}$]$D\overline{PD}$ |7|



16. $\overline{HP}H$ |3|





17. $DP\overline{D}$ |3|

CHERCHONS ET OPTIMISONS

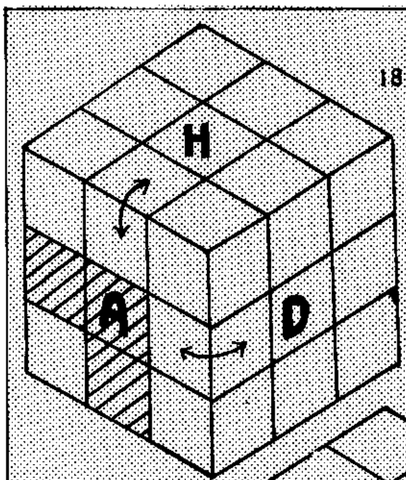
Derrière le verbe "optimiser" nous sous-entendons plusieurs démarches :

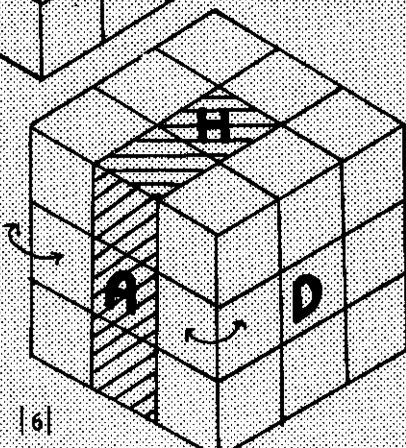
1) Il peut s'agir de rechercher la ou les solution(s) de longueur minimale à un problème. Nous appelons problème la donnée de deux états du Cube, l'un initial, l'autre final. Une solution est une manoeuvre permettant de passer du premier au second. La description rigoureuse des états (initial et final) peut s'avérer fastidieuse ; nous nous contenterons d'un dessin où :
   - Les cubes élémentaires "grisés" sont ceux qui doivent être invariants par la solution,
   - les flèches indiquent les changements recherchés,
   - les cubes non grisés, non reliés par des flèches (s'il en reste) peuvent varier librement.

   Exemples : les figures 1 à 17 sont des problèmes pour lesquels nous avons donné les solutions les plus courtes que nous connaissions. Naturellement, si vous trouvez mieux, IL FAUT NOUS ECRIRE !

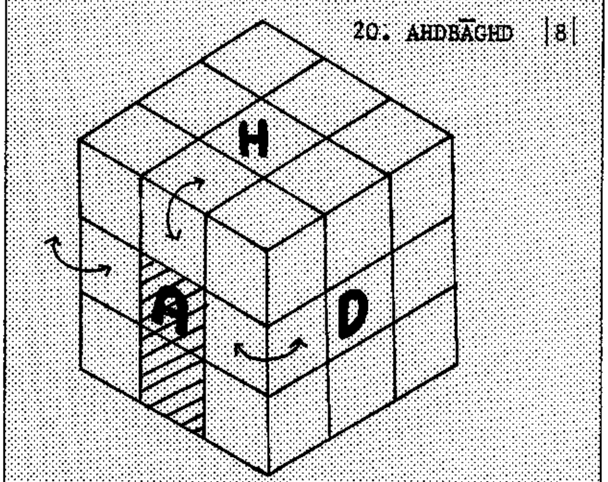
2) Dans le cadre d'une méthode donnée, il peut s'agir
   a-de rechercher des manoeuvres qui tout en réalisant une étape donnée permettent d'accélérer l'étape suivante
   b-de rechercher des manoeuvres plaçant plusieurs cubes simultanément et dont la longueur serait plus courte que la somme des longueurs des manoeuvres plaçant chacun d'eux.

18. $ADB\overline{A}HD$ |6|

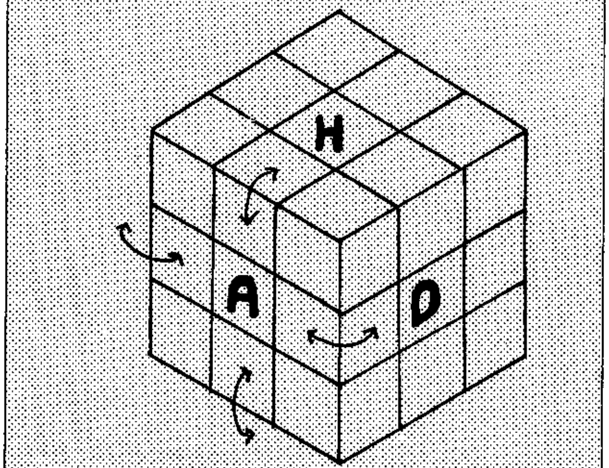




19. $ABH\overline{A}DG$ |6|

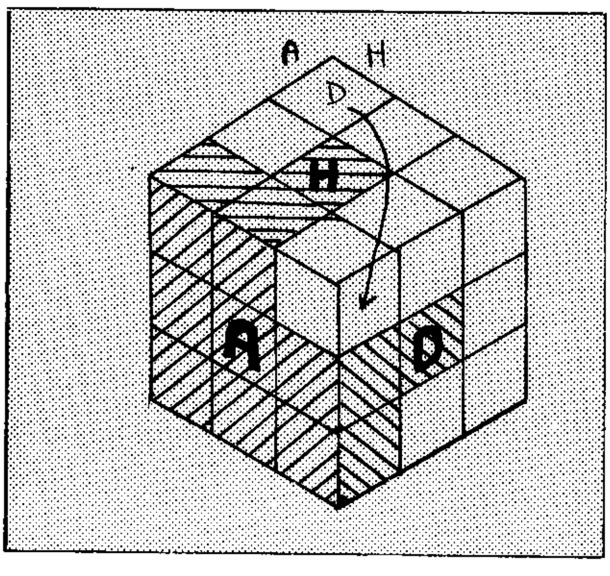


20. $AHDB\bar{A}GHD$ |8|



21. HDBGHDBA |8|

c-de noter que dans la pratique on peut bénéficier de positions plus favorables que celles envisagées théoriquement et éviter ainsi des coups inutiles.
Exemple : en appliquant aveuglément la méthode indiquée au 1, on utiliserait :
$\bar{P}\bar{H}\bar{P}H$
alors que $D\bar{P}\bar{D}$ suffit.



3) Enfin, il peut s'agir de minimiser la remontée complète du Cube. C'est à dire de trouver la méthode permettant de le remonter avec le minimum de coups quelque soit l'état initial (ou du moins pour un grand nombre d'états initiaux) ou bien, pour certains types d'états initiaux à définir, de déterminer les méthodes les plus efficaces. Nous n'envisagerons ce problème que lorsque nous aurons étudié toutes les méthodes publiées jusqu'ici.

UTILISONS DANS LA CLASSE

Exercice 1.
1- Dans un cube, combien y a-t-il de faces ? d'arêtes ? de sommets ?
2- Dans le Cube Hongrois, combien devrait-il y avoir de cubes élémentaires ?
3- Combien y en a-t-il qui présentent
 . aucune facette visible ?
 . deux facettes visibles ?
 . trois facettes visibles ?
 . quatre facettes visibles ?
4- Et alors ?

Exercice 2.
1- Construire (en bristol par ex.) 27 cubes de même taille.
2- Monter un gros cube avec ces 27 "petits" cubes ; en peindre les 6 faces avec 6 couleurs différentes.
3- Détruire alors le gros cube en lui fichant un grand coup de pied (ou un grand coup de main, de tête, de coude, de rein, d'oeil, de nez, d'épaule, de dent, ... au choix).
4- Demander aux élèves de reconstruire le gros cube avec ses faces unies.
5- S'ils réussissent, dire que c'est un coup de pot, refiler un grand coup de pied dans le gros cube et leur demander de recommencer.

Exercice 3.
La remontée d'une face n'est certes pas inutile puisqu'elle permet de se familiariser avec les manoeuvres, mais pourquoi n'est-elle pas utile dans l'optique d'une remontée globale du cube ?

Exercice 4.
Combien y a-t-il de manoeuvres de longueur 1,2,3, ... , n ?
Combien y a-t-il de manoeuvres différentes de longueur 1,2,3, ... n ?

Exercice 5.
1- Combien y a-t-il de façons différentes de tenir le cube en main, une face ou une arête verticalement devant soi ?
2- Avec 6 couleurs différentes données, combien y a-t-il de manières différentes de colorier les 6 faces du Cube Hongrois ?

Situations - Problèmes au Cycle Moyen

IREM de Poitiers

La situation rapportée ci-après est extraite de "situation-problèmes au cycle moyen", document édité en février 1981 par l'IREM de POITIERS, qui rend compte des travaux de deux groupes de maîtres de l'école élémentaire au cours de l'année 1979/1980.

Ces deux groupes ont travaillé sur la pédagogie du problème à partir des instructions officielles du cycle moyen de 1980. L'un d'eux a choisi de rechercher plutôt des situations-problèmes dites complexes (cf. Instructions pédagogiques) ; l'autre a recherché des situations plus classiques en se penchant particulièrement sur les objectifs :

Dans des situations, vécues ou décrites, savoir :
- associer une question qu'on se pose, ou qui est posée, et l'information pertinente qui lui correspond ;
- organiser et exploiter cette information ;
- communiquer les résultats obtenus et la démarche suivie, et en établir la validité.

La situation "Commande de jouets" : Les enfants disposent d'une grande quantité d'informations parmi lesquelles ils doivent trier, puis ils organisent, exploitent ces informations avant de présenter leur commande.

La situation "Diagonale d'un rectangle" : Ici, les enfants n'ont pas a priori d'informations. Ils doivent découvrir une loi et pour cela, ils vont émettre des hypothèses, mettre en place des expériences -construction de nouveaux rectangles- et tirer de ces expériences les informations qui vont confirmer ou infirmer leurs hypothèses.

COMMANDE DE JOUETS PAR CATALOGUE

1. Situation proposée dans une classe de CM_2

Ce texte est écrit au tableau :

Madame DUBOIS a 3 enfants

- une fillette de 10 ans
- un garçon de 6 ans
- un bébé de 15 mois.

Elle achète des jouets pour NOEL. Elle ne veut pas dépenser plus de 300 F.

Etablis 3 listes possibles d'achats.

Les enfants ont à leur disposition les catalogues (ou prospectus) de jouets de plusieurs magasins.

2. Conduite du travail : *(individuel ou par groupes de 2).*

1er temps :

Les enfants observent les catalogues:
- on regarde les jouets
- on lit les renseignements donnés.

2è temps :

Les enfants choisissent les jouets à commander suivant divers critères :
- en fonction de l'âge, renseignements donnés par le catalogue,
- appel à l'expression, au vécu : *"mon frère a eu ce jouet à cet âge là" ;*

"j'ai joué avec ce jeu chez un copain" ;

- ses propres désirs :
  "je voulais ce jouet l'an dernier"
- intérêt possible du jeu :
  "c'est joli, c'est amusant !"
  "on peut faire beaucoup de choses avec !" .
  "Il pourra jouer longtemps avec ce jouet"
  "Elle pourra jouer à la maman"
  "C'est un jouet solide !"
- en fonction du prix.

Ils s'y prennent aussi différemment :

- un groupe recense tous les jouets pour 15 mois, 6 ans, 10 ans et choisit ensuite,
- d'autres choisissent 3 jouets pour que le prix total se rapproche de 300 F,
- d'autres choisissent 3 jouets sans tenir compte du prix, puis ensuite commandent 2 jouets par enfant, ou un autre jouet pouvant servir aux 3 enfants,
- d'autres font leur commande et ne se préoccupent pas de dépenser le plus possible,
- certains ne comprennent pas : "tu peux faire 2 possibilités de commande".

3. Travaux d'enfants :

Philippe (avec Etienne)
Nom du magasin : Printemps

pour 10 ans : Europa : machine à écrire, véritable machine destinée aux enfants ; prix choc 102 F

pour 6 ans : Transport Service : circuit d'engins et travaux publics : Charge, déverse, transporte. prix 99 F

pour 15 mois : NONOSSE. aboie et remue la queue sur un simple coup de sifflet de son maître : prix choc : 99 F

(99 x 2) + 102 = 300

La maman reste dans ses prix car elle ne dépense pas plus 300 F.

On voit ici que les enfants ont cherché à approcher le plus près et toucher même les 300 F : C'est une compréhension large de : "elle ne veut pas dépenser plus de 300 F".

La 2è commande est faite pour compléter la première afin d'approcher les 300 F. Certains enfants ont même recommencé leur commande.
Il n'y a pas eu, semble-t-il, d'essai de vue d'ensemble de l'achat, d'approximation de son coût, de prévisions.

Isabelle (avec Véronique)

1ère commande

	jouets commandés (Nom du jouet)	Caractéristiques	Prix
pour 10 ans	métier à tisser la licorne	cadre bois	53,00 F
pour 6 ans	playmobil system	boîte orchestre 5 klicky	33,00 F
pour 15 mois	maya, l'abeille	l'amie des petits, petit modèle	56,50 F

2ème commande

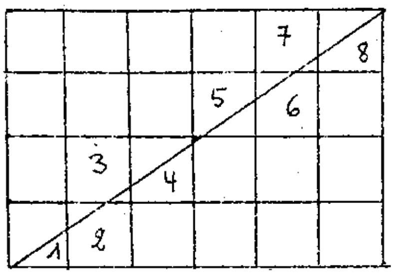
	jouet commandés (Nom du jouet)	Caractéristiques	Prix
pour 10 ans	valise coiffure	avec peigne soufflant à pile PM	55,00 F
pour 6 ans	tambour		37,50 F
pour 15 mois	Ourson hochet	17cm, souple, lavable boîte avec fenêtre	46,00 F
			291,00 F

DIAGONALE D'UN RECTANGLE

(référence : "Points de départ". CS Bauwell. Kd Sanders. D. Tahta. CEDIC. Pages 20 et suivantes).

Détermination du nombre de cases carrées traversées par la diagonale d'un rectangle quadrillé.

Exemple :



Compte rendu des activités dans une classe de CM_2 :

1ère séquence :

1. Au tableau est affiché un rectangle quadrillé 5x3

La maîtresse demande aux enfants s'ils sont capables de dire combien de cases seraient traversées par une diagonale (sans la tracer !). Les enfants proposent soit 5, soit 6. On trace une diagonale et on compte 7 cases traversées.

Le même pari est demandé pour un second rectangle affiché (7x11). Les enfants proposent : 11 ou 12 ; 16 ; 17
On trace une diagonale et on compte 17 cases traversées.

2. Les enfants constatent la difficulté à compter les cases qui seraient traversées.
Il doit y avoir un truc, une loi !
Vous allez essayer de trouver cette loi.
5 groupes sont alors constitués et reçoivent des feuilles quadrillées (10x10) de dessin et des feuilles blanches pour écrire leurs remarques.

Les groupes choisissent eux-mêmes leurs rectangles, les dessinent, tracent une diagonale, numérotent les cases traversées et écrivent leurs résultats et remarques.

3. Synthèse : Chaque groupe expose un travail.

Groupe 1 : On a pris 10x30, on a trouvé 10 noeuds (le mot noeud a été choisi après discussion pendant la recherche des groupes pour désigner les points de rencontre des lignes "horizontale" et "verticale" et de la diagonale) de 3 en 3 et 30 carreaux traversés.

Puis 15x19 ---> 33 (nous reprenons ici la notation des enfants)

Groupe 2 :

15 x 20 ---> 30 On avait remarqué que :

3 + 5 = 8   8 - 1 = 7
11 + 7 = 18   18 - 1 = 17

(référence aux 2 premiers rect. étudiés). Puis

11 x 10 ---> 20

Pour

15 x 20, il y a 4 noeuds :

15 + 20 = 35   35 - 1 = 34

30 carreaux
4 noeuds.

Groupe 3 :

7 x 12 ---> { 17, 1 noeud } (on remarque ici une erreur due à un tracé imprécis).

5 x 7 ---> 11
3 x 10 ---> 12
8 x 7 ---> 15

"ces résultats répondent à la remarque du groupe précédent !"

Groupe 4 :

10 x 10 ---> 10

6 x 3 ---> { 6 carreaux, 2 noeuds } (6 est multiplié de 3)

2 x 1 ---> 2 (2 est multiplié de 1)

10 x 1 ---> 10   16 x 7 ---> 22
23 x 9 ---> 31   13 x 4 ---> 18
(à noter ici une erreur)
20 x 1 ---> 20   5 x 6 ---> 10

Groupe 5 :

33 x 3 ---> 33 ; 2 noeuds tous les 11

23 x 5 ---> 27   7 x 4 ---> 10

15 x 8 ---> 22   34 x 5 ---> 38

11 x 7 ---> 17   15 x 5 ---> 18
(à noter ici une erreur).
1 noeud.

Pour terminer, la maîtresse essaie de faire énoncer les remarques qui sont souvent revenues au cours des exposés :

"on fait un côté plus l'autre moins 1" (a + b - 1)

"s'il y a des multiples, il y a des noeuds"

(nous réécrivons ici les expressions des enfants ; on peut noter aussi que la première règle énoncée ci-dessus est venue trop tôt pour les enfants les plus lents).

4. En début d'après-midi, collectivement on convient de consigner tous ces résultats en 2 tableaux présentés ainsi

Des multiples :

Rectangle	Carreaux	Noeuds
(15;20)	30	4
(10;12)	20	1
(10;10)	10	
(6; 3)	6	2
(15; 5)		4
(8; 4)		
(33; 3)	33	2
(10;30)	30	9

Les trous sont laissés à cause des erreurs constatées.

Nombres : rien entre eux

Dimension rectangle	Nombres de carreaux
(9 ; 4)	12
(11 ;10)	20
(2 ; 3)	4

puis (20;1)

(23;9) .....

Une quinzaine d'exemples complètent ce tableau.

2ème séquence :

1. Collectivement, observation des 2 tableaux affichés ; on rappelle les "découvertes" de la veille.

   On attire l'attention des enfants sur le seul tableau "Des multiples".

   Ils constatent la présence de deux cas :
   - une dimension est multiple de l'autre
   - les 2 dimensions sont multiples d'un même nombre.

   (On notera que les deux cas ont été séparés dans le tableau ce qui est le fruit du hasard : les résultats ont été relevés dans cet ordre tout simplement).

   1er cas :
   6 est multiple de 3
   15 est multiple de 5
   33 est multiple de 3
   8 est multiple de 4
   30 est multiple de 10

   2è cas :
   12 et 9 sont dans la table de 3
   10 et 12 sont dans la table de 2
   15 et 20 sont dans la table de 5

   (on notera l'absence de 10 x 10).

2. On s'intéresse maintenant plus particulièrement à l'un des cas (le premier). Un groupe reprend le rectangle (15;5) ; un autre le rectangle (8;4). Les autres choisissent des rectangles de cette première catégorie.

   Les consignes pour chaque groupe sont de rechercher les nombres :
   - de cases traversées
   - de noeuds
   - de "morceaux" de diagonale (il faut comprendre ici intervalle entre 2 noeuds).

3. Relevé des recherches

   (15;) les noeuds sont de 3 en 3
   Il y a 4 noeuds et 5 morceaux
   (16,8) 2 x 8 = 16 --- donc les noeuds sont de 2 en 2
   il y a 8 parties
   et alors 7 noeuds
   16 carreaux traversés
   (24;3) ....

3ème séquence :

1. Phase collective.
   Les 2 tableaux sont affichés et on observe le tableau "Des multiples". On rappelle les 2 cas présents dans ce tableau.
   En reprenant les recherches de la séquence précédente, on bouche les trous laissés dans le tableau :

   (15;5) 15 4
   (8;4) 8 3

   "Que remarquez-vous pour les rectangles de la 1ère catégorie ?"

   (6;3) 6 2 Le nombre de carreaux traversés est le même que la plus grande dimension

   (15;5) 15 4 Le nombre de noeuds est la petite dimension moins un.

   La maîtresse écrit les remarques sur une grande feuille au tableau :

D'UN LECTEUR D'INDRE ET LOIRE

D'une toute autre nature est la lettre assez longue qu'un lecteur de Tours nous a fait parvenir. Nous la reproduisons ci-dessous.

A propos des nouveaux programmes de Seconde

Il y a des collègues qui semblent ne pas bien comprendre ce programme nouveau : Achetez donc le n° 323 de l'APM; tout est clair, tous est lumineux : exemple, le comportement global d'une fonction c'est sur un intervalle donné, tandis que le comportement local, c'est sur un intervalle convenablement choisi; ceci permettra avec un intervalle donné et convenablement choisi d'étudier un comportement globalement local (ou localement global) en faisant bien sentir aux élèves la nuance entre ces deux concepts; Faire sentir, observer, investir sont les trois mamelles. Définir, raisonner, déduire ne sont pas vraiment interdits semble-t-il, mais définir au moins paraît indésirable. "Certains concepts n'auront pas de statut théorique".

Les anciens programmes s'époumonnaient à mathématiser le réel, il semble que le concept en vogue est de déthéoriser les mathématiques ce qui permettra aux élèves n'ayant pas beaucoup d'intelligence théorique mais énormément de sens pratique de s'y retrouver. Du reste nos anciens raillaient déjà ces gens qui faisaient passer des quantités de droites par un point alors "qu'il n'y pourrait passer en réalité un fétu".

Voilà de l'observation solide à réinvestir. D'aucun se plaignent de devoir travailler avec des suites convergentes vers pi sans définir ce qu'est une suite et encore moins ce que signifie convergence; je pense qu'ils n'ont pas compris la déthéorisation des concepts : pi fait office de carotte là-dedans, il va motiver l'enfant et les parents de l'enfant, car tout le monde connaît pi ; pour le grand public c'est le nombre le plus important, celui dont on parlait juste avant le certificat d'étude; il figure dans le Larousse illustré; bref il est Motivant. Pour la convergence, il suffit de faire sentir ... Il faut mettre en branle le système mentalo-olfactif : le gamin émerveillé après avoir tapoté sa calculette va voir apparaître 3,14..... après avoir calculé le n-ième terme d'une des suites simplettes qui convergent vers pi. Tel le prestidigitateur sortant un lapin de son chapeau il va, au centre du cercle de famille communiant avec la calculette extirper pi d'une machine clignotant plus que tableau de bord de la voiture de Papa.

Le vague mathématique va devenir bientôt un compliment comme le vague artistique. Il faut investir dans le vague : cela est bien expliqué dans l'APM. L'activité mathématique en 2° "doit se construire à partir des acquis et des non-acquis du 1er cycle". Construire sur un non-acquis résume bien la situation et nous retrouvons la démarche de l'arithmétique construisant tout à partir de l'ensemble vide.

Monsieur Choquet je crois, disait qu'un nombre privé des relations qui le relient aux autres nombres, perdait en somme sa qualité de nombre.

Faire ainsi des activités numériques sur des suites sans définir ce qu'est une suite et montrer des suites convergentes sans parler de convergence apparaît comme un énorme gag qu'Ubu n'eut pas renié ou alors comme une hypocrisie de taille : un peu comme si, pour faire construire un fauteuil à un menuisier, on s'interdisait de parler de fauteuil. On parlerait des commodités de la conversation, d'une structure siégeable, mais surtout pas de fauteuil. Je suppose qu'à l'énoncé d'activités numériques le papa de 1940 et a fortiori le pépé de 1914 tressaillent d'aise : enfin on va faire compter ces chers petits : une addition voilà du concret, avec la retenue que l'on met dans sa poche, les tranches de deux chiffres à partir de la droite, la racine carrée.... Vous dites ? On ne fait plus la racine carrée ? On compte avec des calculettes ?

Oui, cher parent d'élève, les activités numériques se font essentiellement avec les calculettes. Le digital ainsi le dispute au numérique. Le cosinus de votre jeunesse qui se définissait uniquement à la ficelle est maintenant déterminé électriquement. Le cosinus de 3000 s'obtient en appuyant sur cos puis ensuite sur 3000 ou l'inverse suivant la calculette (1). A propos, ce mot de calculette ne fait pas très sérieux; il n'y avait pas de mot en ette comme sinette et cosinette dans leurs mathématiques modernes: je trouve que cette sonorité jeunette qui évoque soeurette, fleurette ...etc, indique bien la marque de l'esprit nouveau des programmes si minutieusement mis au point.

Fort heureusement, cher parent d'élève, le $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$ est enfin remis à l'honneur car comme le faisait remarquer Monsieur Dieudonné ces formules sont extrêmement importantes pour les astronomes, les arpenteurs et les auteurs de manuels de trigonométrie, ce qui dans un pays en proie au chômage permet de maintenir la possibilité de trois débouchés importants.

Les choses maintenant vont se faire à demi-mot. Surtout pas d'axiome. Un postulat peut-être ? (Le parent d'élève aimait bien son postulat d'Euclide). Non, non, cher parent, pas de postulat non plus, ni axiome ni postulat, pas de définitions, pas de mots surtout pas de mots : de l'activité que diable, encore et toujours plus d'activité : de l'activité numérique, de l'activité géométrique, de l'activité mathématique : voi-

(1) A ceci près que certaines calculettes refusent de calculer les fonctions trigonométriques d'un nombre supérieur à 8π; exemple : CASIO fx 80 (N.D.L.R.)

là de la pédagogie active préparant justement à la vie active. Les enfants sont gargarisés de mots, ils sont bourrés de structures (composé prestigieux du mot Truc) il faut être actif et voilà tout. La Structure du programme nouveau c'est l'Activité, il vous suffira d'employer des structures actives. Vous me suivez bien ? Non ?

Vous aller montrer aux élèves des suites adjacentes sans parler de suite et encore moins d'adjacence (le parent d'élève qui a en tête les angles adjacents du 2è cas d'égalité des triangles ne voyait pas de malice dans ce mot concret puisque connu de lui). Ah, j'y suis, dit le parent, vous aller parler d'ensemble de nombres ? Malheureux, pas d'ensemble : les ensembles de points sont redevenus "les lieux" (j'ajoute géométriques sinon on pourrait confondre avec d'autres endroits encore plus concrets).

Vous ne savez pas ce qu'est un thème ? Un thème d'activité numérique, c'est cela qui va être développé ; les élèves auront aussi des activités angulaires, des activités rotationnelles, des activités trigonométriques.

Le parent d'élève à part : Quel dommage que je n'aie pas pu étudier ces programmes calculettatoires au lieu de perdre mon temps avec leurs maths modernes; j'aurais été d'activités en activités de plein pied dans la vie active ...

GRUAU

Pour répondre à cette lettre, je me bornerai à cinq remarques :

1. Les citations extraites du Bulletin 323 de l'APM (Avril 1980) sont issues non pas d'un texte officiel, mais d'un document de travail de notre Association. Il est exact cependant qu'elles témoignent de "l'état d'esprit" qu'ont défendu l'APM et les IREM lors de la discussion des nouveaux programmes, même si cet "état d'esprit" est loin d'avoir été retenu par les rédacteurs de ces programmes.

2. Notre collègue, sous une forme volontairement satirique, aborde de nombreux problèmes. Visiblement, il n'est pas convaincu de la pertinence des nouveaux programmes. C'est son droit, mais il me semble qu'il met en avant une dualité "mathématiques modernes rigoureuses" versus "mathématiques anciennes approximatives" (dualité accentuée par les très nombreuses références à un parent d'élève omniprésent) qui n'est pas réellement l'objet de l'enjeu.

Pourquoi la rigueur ne passerait-elle qu'à travers, et dans l'ordre, définitions, axiomes et théorèmes ? Sait-on ce qu'est une chose quand on en a écrit sa définition au tableau ? Le discours (du maître en général!) est-il un garant de la clarté de la pensée (de l'élève !) ?

3. Cette lettre me paraît significative d'un symptôme qui ne cesse d'inquiéter. Si de nombreux enseignants prennent ces nouveaux programmes comme un abandon de la rigueur prétendûment présente dans les maths actuelles, pour se livrer à des "activités" approximatives, je crains que les années qui viennent ne soient très douloureuses pour les élèves. On craint le pire quand on entend de nombreux IPR parler de "bricolage" à propos de ces nouveaux programmes de Seconde.

4. Imposer un nouveau programme sans vérifier que les enseignants y adhèrent, y sont formés, en ont compris l'enjeu et sont prêts à engager leur expérience et leur bonne volonté, est une profonde erreur. C'est le problème de la formation continue des enseignants et du rôle de ceux-ci vis-à-vis des choix éducatifs qui est posé. Espérons que le Ministère actuel abordera ces difficultés avec moins de mépris et de légèreté que le précédent.

5. Aborder le fond du débat est impossible dans ce cadre étroit. Je ne peux que renvoyer les lecteurs aux bons ouvrages, comme : Bulletin inter-IREM n° 20, "Enseignement de l'Analyse" (Septembre 1981), qui montre comment "l'activité" et le "bricolage" interviennent dans l'apprentissage des concepts.

Pascal Monsellier

D'UN LECTEUR DE LA CREUSE

Cher "Plot"

Désirant te recevoir chez moi chaque trimestre, Je t'envoie le montant de l'abonnement nécessaire pour cela (("pas cher pour la qualité nettement supérieure de son contenu") publicité pour ceux qui ne te lisent pas, malheureusement pour eux)
En guettant chaque jour la boite aux lettres dans laquelle tu ne rentres pas, amitiés, AC

Il est donc prouvé que :

"Il existe (au moins) un lecteur du PLOT qui est satisfait".

SOLUTION DES MOTS CROISES

Horizontalement

I. Projection II. Varie - Ro III. Thalès - SDM IV. Halo - esirB V. Aveu - Mer VI. Ge - sdeiP VII. Eau - Glu VIII. Rationnels IX. Eues - Peser.

Verticalement

1. Pythagore 2. Have - Au 3. Ovale - Eté 4. Jalousais 5. Ere - Duo 6. Ciselé - NP 7. Té - IGNE 8. Simples 9. Ordre - ulE 10. Nombre - SR.

REGIONALE DE LIMOGES

CCP : LIMOGES 117 66 R

Secrétariat : IREM. 123, rue Albert Thomas 87060 LIMOGES Cedex (55).79.24.12
Président d'honneur : Mr ROGERIE 22, rue L. Codet 87200 St JUNIEN (55).02.15.69
Président : Mr NICOLAS 29, rue A. Texier 87000 LIMOGES (55).77.07.76
Vice-présidents :
-Corrèze : Mr BOUTEILLER 7 bis av. du Pdt Roosevelt 19100 BRIVE (55).74.20.11
-Creuse : Mr BOURCY Ecole Primaire 23130 CHENERAILLES
-Hte Vienne : Mr LABROUSSE 9, rue du Petit Tour 87000 LIMOGES (55).33.49.70
Secrétaires : Mme BALARD 12, rue des Myosotis 87260 PIERRE BUFFIERE (55).00.68.56
Mr LABROUSSE
Trésorier : Mr DUVEAU 4, rue Eugène Leroy 87500 St YRIEX (55).75.07.32
Brochures : Mme ROUGIER 35, avenue de la Vienne 87170 ISLE (55).32.54.23
Mr CATHALIFAUD 20, allée de Villagory 87000 LIMOGES (55).30.58.56
Enseignement Primaire et maternel : Mme ROUGIER, Mme CATHALIFAUD
Premier Cycle : Mr BATIER 12, rue Charles Péguy 87700 AIXE sur VIENNE (55).70.16.68
Liaison CM2-6è : Mr CREPIN 94, av. de Locarno 87000 LIMOGES (55).33.46.68
Second Cycle : Mr FELDMAN 16, impasse Jean Roux 87000 LIMOGES (55).37.47.09
Mme PESTEL Collège Guy de Maupassant 87000 LIMOGES
Enseignement post-bac : Mr SOURD 58, rue Meissonier 87000 LIMOGES (55).77.05.57
Formation des maîtres : Mr FREDON 40, rue Regnard 87100 LIMOGES (55).79.34.02
Liaisons interdisciplinaires : Mr ROUGIER
Jeux : Mr CATHALIFAUD
Informatique : Mr DUVEAU
Conseil d'Administration de l'Irem : Mr ROUGIER
Plot : Mr FREDON

REGIONALE D'ORLEANS - TOURS

CCP : LA SOURCE 1440 09 X

Siège Social : IREM. Université 45046 ORLEANS Cedex
Président : Jacques PINAUD 4, rue de la Tuilerie. Chambléan-Garnay 28500 VERNOUILLET
Trésorier : André DUTHILLEUL 13, rue du Domaine 37300 JOUE LES TOURS (47).27.75.74
Secrétaires : Rémy CHARPENTIER 1, av. Voltaire 45100 ORLEANS (38).63.23.86
Michel DARCHE 1, rue Albert Laville 45000 ORLEANS (38).62.22.85
Patrick MARTHE 15, rue Berthollet 45100 ORLEANS (38).63.12.83
Pascal MONSELLIER Les Tourelles. Marcilly-en-Villette
45240 LA FERTE SAINT AUBIN (38).65.11.77

Tâches du bureau : Enseignement Elémentaire - Matériel Pédagogique : Michel Darche
Enseignement du Premier Cycle : André Duthilleul
Enseignement du Second Cycle : Jacques Pinaud
Enseignement Supérieur : Rémy Charpentier
Informatique : Patrick Marthe
Publications : Pascal Monsellier