plot

Sommaire du n° 14

ÉTUDE SUR LES SUITES NON CONVERGENTES

Jean-Paul DELAHAYE

Lycée Rotrou - Dreux

Il est temps de s'intéresser à ces obscures, ces sans-grade, ces pauvres suites qui ont le défaut de ne pas être convergentes.
Car pour ne pas être convergentes, elles n'en ont pas moins de charme ...

Quand on présente la notion de suite, très rapidement on est amené à parler des suites convergentes. Cela tient au fait que la classe particulière des suites convergentes est intéressante :
- d'une part du point de vue pédagogique et théorique : approche de la notion de nombre réel (éventuellement à l'aide des suites de Cauchy rendues convergentes) ; introduction aux démonstrations "avec des ε", exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels non évidents,
- d'autre part du point de vue des applications car bien des objets mathématiques ne peuvent être appréhendés concrètement que grâce à la notion de limite : c'est le cas des irrationnels (Π, e etc...) et aussi des intégrales.

Cependant les suites non convergentes, elles aussi méritent quelques attentions. En effet :
- bien comprendre la convergence c'est comprendre aussi la non convergence !
- certaines classes de suites non convergentes (par exemple les suites périodiques) présentent un intérêt arithmétique et concret évident,
- il existe des algorithmes d'analyse numérique qui engendrent des suites non nécessairement convergentes et dont les valeurs d'adhérence sont solutions des problèmes posés (voir [3] [6]),
- les suites numériques rencontrées dans les sciences physiques ou biologiques ne convergent pas toujours (voir [1] [5]).

Le but de ce travail est de donner des éléments de réflexion sur le sujet des suites non convergentes et plus particulièrement sur la notion de valeur d'adhérence d'une suite (le lecteur intéressé trouvera une étude plus détaillé dans [3] ou [4]).

Après avoir rappelé quelques définitions de base (paragraphe I) nous donnons divers exemples de suites non convergentes pouvant servir, par exemple, dans un cours de terminale (paragraphe II). Ensuite nous présentons certaines des propriétés de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (paragraphe III) et une petite étude sur les suites périodiques(paragraphe IV) qui peuvent être l'objet d'exercices et de problèmes ou qui peuvent servir de thème de réflexion avec une classe.

Nous concluons en présentant la notion de force d'une valeur d'adhérence qui permet de mesurer l'importance relative des diverses valeurs d'adhérence d'une suite (paragraphe V).

Pour ne pas allonger trop le texte nous n'avons donné que quelques exemples de démonstration.

I Rappel de quelques définitions

Soit (x_n) une suite (1) de nombres réels ou complexes.

On dit que la suite (x_n) converge vers x et on note

$x = \lim_{n \to \infty} x_n$ si :

$$\forall \varepsilon \in R^{+*}, \exists n_o \in \mathbb{N}, \forall_n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_o \Longrightarrow |x_n - x| \leqslant \varepsilon$$

Quand elle existe la limite est unique.

On dit que la suite (x_n) admet x comme valeur d'adhérence si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n_o \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_o \text{ et } |x_n - x| \leqslant \varepsilon$$

On notera $\mathcal{A}(x_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n).

S'il existe une sous-suite (2) $(x_{\alpha(n)})_n$ convergente vers x alors $x \in \mathcal{A}(x_n)$. La réciproque est vraie pour les suites de nombres réels ou complexes.

A titre d'exemple démontrons que si x est une valeur d'adhérence de la suite de nombres réels ou complexes (x_n) alors il existe une sous-suite convergente vers x.

Posons $\alpha(0) = 0$ et définissons ensuite $\alpha(n)$ par récurrence comme étant le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha(n-1)$ vérifiant : $|x_{\alpha(n)} - x| \leqslant \frac{1}{n}$

La sous-suite $(x_{\alpha(n)})_n$ ainsi définie converge vers x ; en effet soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que : $1/n_o \leqslant \varepsilon$; pour tout n supérieur à n_o on a : $|x_{\alpha(n)} - x| \leqslant 1/n \leqslant 1/n_o \leqslant \varepsilon$.

II Exemples

1) $x_n = n + (-1)^n n$

---

(1) Quand une ambiguité est possible à cause de multiples indices nous utiliserons la notation $(x_n)_n$.

(2) Par définition d'une sous-suite, α est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Cette suite admet 0 comme seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$; pourtant elle ne converge pas.

<u>REMARQUE.</u> Cette suite permet de montrer, qu'en général, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est distinct de l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'ensemble $\{x_n \mid n \in N\}$ (qui est ici l'ensemble des entiers pairs), et distinct de l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble $\{x_n \mid n \in N\}$ (qui est ici l'ensemble vide) (3).

2) Notons p_m le n-ième nombre premier ($p_o = 2$, $p_1 = 3, \ldots$)

Soit $n + 1 = 2^{\alpha_n^o} 3^{\alpha_n^1} \ldots p_m^{\alpha_n^m}$ la décomposition de $n + 1$ en facteurs premiers.

On a par exemple :

$\alpha_0^o = 0$; $\alpha_1^o = 1$; $\alpha_2^o = 0$; $\alpha_3^o = 2$; $\alpha_4^o = 0$; $\alpha_5^o = 1$; $\alpha_6^o = 0$; ...

ce que nous noterons aussi :

$(\alpha_n^o) = (0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,\ldots)$

On vérifie facilement que :

$\mathcal{A}(\alpha_n^o) = \mathbb{N}$.

De même pour tout $i \in \mathbb{N}$: $\mathcal{A}(\alpha_n^i) = \mathbb{N}$

3) En utilisant les mêmes notations qu'à l'exemple 2 posons :

$$y_n = (-1)^{\alpha_n^o} \frac{\alpha_n^1}{\alpha_n^2 + 1}$$

montrons que : $\mathcal{A}(y_n) = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n_o \in \mathbb{N}$. Il existe un nombre rationnel $\frac{(-1)^\varepsilon \beta}{\gamma+1} = r$ avec $\varepsilon \in \{0,1\}$, $\beta \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{N}$ tel que : $|r - x| \leqslant \eta$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $2^\varepsilon\, 3^\beta\, 5^\gamma\, 7^\kappa \geqslant n_o + 1$ alors pour l'entier $n = 2^\varepsilon\, 3^\beta\, 5^\gamma\, 7^\kappa - 1$ on a $y_n = \frac{(-1)^\varepsilon \beta}{\gamma + 1} = r$, et donc $|x_n - x| \leqslant \eta$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons établi que $x \in \mathcal{A}(y_n)$.

En suivant un principe analogue, on montre que pour la suite de nombres complexes définie par :

$$z_n = (-1)^{\alpha_n^o} \frac{\alpha_n^1}{\alpha_n^2 + 1} + i(-1)^{\alpha_n^3} \frac{\alpha_n^4}{\alpha_n^5 + 1}$$

on a : $(z_n) = \mathbb{C}$.

---

(3) Toutes ces notions sont définies et étudiées dans [7].

4) En utilisant une notation semblable à celle utilisée pour $(\alpha_n^o)_n$ dans l'exemple 2 posons :

$(t_n) = (0, 1/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8, 3/4, 7/8, 1, 15/16, 7/8, 13/16, \dots)$

On montre que $\mathcal{A}(t_n) = [0, 1]$

III Quelques propriétés de l'ensemble des valeurs d'adhérence

Soit (x_n) une suite de nombres réels ou complexes.

1) si $\mathcal{A}(x_n)$ ne contient qu'un élément alors :

$[(x_n)$ est bornée$] \Longleftrightarrow [(x_n)$ converge$]$.

2) si (x_n) est bornée et si $\mathcal{A}(x_n)$ contient exactement p éléments $y_1, y_2, \dots, y_p$, alors il existe

$\alpha_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ..., $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha_1(\mathbb{N}), \alpha_2(\mathbb{N}), \dots, \alpha_p(\mathbb{N}) \text{ forment une partition de } \mathbb{N} \text{ et} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_1(n)} = y_1, \lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_2(n)} = y_2, \dots \lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_p(n)} = y_p \end{cases}$$

<u>REMARQUE</u> : Quand $\mathcal{A}(x_n)$ est infini dénombrable, une telle "partition" de la suite (x_n) en sous-suites convergentes existe encore (sans même faire l'hypothèse que (x_n) est bornée). Par contre quand $\mathcal{A}(x_n)$ est infini non dénombrable une telle "partition" n'existe jamais.

3) $\mathcal{A}(x_n)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

4) Pour toute partie fermée F de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe des suites (x_n) telles que $\mathcal{A}(x_n) = F$

5) Si (x_n) est une suite de nombres réels et si : $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$,

alors $\mathcal{A}(x_n)$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ (éventuellement non borné)

6) Si (x_n) est une suite de nombres complexes vérifiant :
$\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$

alors ou bien $\mathcal{A}(x_n)$ est connexe

ou bien $\mathcal{A}(x_n)$ est non borné et chacune de ses composantes connexes et non bornée.

<u>REMARQUE</u>

Cette dernière propriété reste vraie pour toute suite de $\mathbb{R}^m$ et pour toute suite de points d'un espace métrique à boules fermées compactes.

7) Si $\mathcal{A}(x_{2n}) = \mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}(x_{2n+1}) = \mathcal{A}_2$,

alors $\mathcal{A}(x_n) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$
(cette propriété peut se généraliser facilement).

8) Si $\mathcal{A}(x_n) = \mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}(y_n) = \mathcal{A}_2$,
alors $\mathcal{A}(x_n + y_n) \subset \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$
($\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ désigne l'ensemble $\{a_1 + a_2 \mid a_1 \in \mathcal{A}_1, a_2 \in \mathcal{A}_2\}$)

Il n'y a pas forcément égalité comme le montre le contre-exemple suivant :

$x_n = (-1)^n \quad y_n = (-1)^{n+1}$

$\mathcal{A}(x_n) = \mathcal{A}(y_n) = \{-1, +1\}$ $\mathcal{A}(x_n) + \mathcal{A}(y_n) = \{-2,0,+2\}$

$\mathcal{A}(x_n + y_n) = \{0\}$

IV Suites périodiques et pseudo-périodiques

Définition.

On dit que la suite (x_n) est périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$(*) \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+p} = x_n$

On dit que la suite (x_n) est pseudo-périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$(**)$ $\begin{cases} \text{les sous-suites } (x_{np})_n, (x_{np+1})_n, \dots, (x_{np+p-1})_n \\ \text{sont convergentes} \end{cases}$

Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifient (*) ou (**) est appelé période du (x_n) (parfois on l'appelle plus petite période).

Exemples

Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons $\overline{n}^q$ le reste de la division euclidienne de n par q (exemple $\overline{20} = 6$) et E(x) la partie entière du nombre réel x.

a) $x_n = \overline{n}^q$ définit une suite périodique de période q

b) $y_n = E(\overline{n}^q/(q-1))$ définit une suite périodique de période q.

On remarquera que (x_n) admet p valeurs d'adhérence alors que (y_n) n'en n'admet que 2.

c) Soit $r \in \mathbb{Q}$ notons z_n la n-ième décimale de r (z_n) est une suite périodique.

REMARQUE. Si (x_n) est périodique ou pseudo-périodique alors bien évidemment elle n'admet qu'un nombre fini (inférieur ou égal à sa période) de valeurs d'adhérence. La réciproque est inexacte car par exemple la suite (t_n) défini par :

$(t_n) = (0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1 \dots)$

admet 2 valeurs d'adhérence mais n'est pas périodique. (On peut aussi considérer la suite des décimales d'un irrationnel, par exemple $\sqrt{2}$)

Propriétés :

1) Si (x_n) est périodique de période p et si (y_n) est convergente, alors $(x_n + y_n)$ est pseudo-périodique de période p.
2) Si (x_n) est pseudo-périodique de période p, alors (x_n) peut s'écrire sous la forme $(y_n + t_n)$ où (y_n) est périodique de période p et (t_n) convergente vers 0.
3) Si (x_n) est pseudo-périodique de période p et si (y_n) est pseudo-périodique de période q, alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ ont chacune pour période un diviseur du p.p.c.m (p,q) (à propos de la période de $(x_n + y_n)$ voir [2]).
4) Si p et q sont des entiers premiers entre eux, si (x_n) est une suite pseudo-périodique de période p et ayant p valeurs d'adhérence, alors la sous-suite $(x_{nq})_n$ est pseudo-périodique de période p.
5) La suite des décimales d'un nombre réel est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce réel est un rationnel.
6) Soit f une fonction continue de [0,1] dans [0,1] soit $x_o \in [0,1]$ et (x_n) la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors si (x_n) n'admet qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence, elle est pseudo-périodique.

V Force d'une valeur d'adhérence

La notion de force d'une valeur d'adhérence est destinée à mesurer l'importance relative des diverses valeurs d'adhérence d'une suite. Par exemple, pour la suite périodique (0,1,1,0,1,1,0,1,1,...), 0 aura pour force 1/3 et 1 aura pour force 2/3.

Définition.

On appelle force du point x relativement à la suite de nombres complexes ou réels, le nombre réel noté $s(x,(x_n))$ défini par :

$$s(x,(x_n)) = \lim_{\varepsilon \to o} \lim_{m \to \infty} \inf \operatorname{card} \{i \in N \mid i < m \text{ et } d(x,x_i) \leq \varepsilon\}/m$$

Les propriétés suivantes établissent que la notion de force d'une valeur d'adhérence possède certaines similitudes avec la notion de possibilité

Propriétés.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq s(x,(x_n)) \leq 1$.
2) Si la suite (x_n) converge vers x alors $(s(x,(x_n)) = 1)$ et $(\forall y \in \mathbb{R} : y \neq x \Rightarrow s(y,(x_n)) = 0)$.
3) Si $s(x,(x_n)) > 0$ alors x est une valeur d'adhérence de (x_n) .
4) $0 \leq \sum_{x \in \mathcal{A}(x_n)} s(x,(x_n)) \leq 1$ (4) .

(4) Pour donner un sens à cette formule quand (x_n) est infini (dénombrable ou non), on consultera [7] (chapître XIV).

5) Si (x_n) est une suite pseudo-périodique de période p et ayant p valeurs d'adhérence $y_1, y_2, \ldots, y_p$, alors :

$$s(y_1, (x_n)) = s(y_2,(x_n)) = \ldots = s(y_p,(x_n)) = 1/p.$$

REMARQUES ET EXEMPLES.

1) Si on avait seulement "$\lim\limits_{m \to \infty}$" la définition n'aurait pas de sens pour certaines suites (x_n). Si on avait mis "$\limsup\limits_{m \to \infty}$" la propriété 4 ne serait plus vraie.

2) La suite (x_n) définie par :
$(x_n) = (0,1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1,\ldots)$
admet deux vlaeurs d'adhérence 0 et 1 et on a :
$s(0,(x_n)) = 0, \; s(1,(x_n)) = 1$
Ceci montre que la réciproque de 3° n'est pas exacte, en général, et que les valeurs d'adhérence de force 1 ne correspondent pas nécessairement à des suites convergentes.

3) Quand (x_n) est bornée, dans la plupart des cas :
on a : $\sum\limits_{x \in \mathcal{A}(x_n)} s(x,(x_n)) = 1$

Par exemple, par la suite (α_n°) définie au paragraphe
$(\alpha_n^\circ) = (0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4,0,1,\ldots)$

On a : $s(0,\alpha_n^\circ) = 1/2$
$s(1,\alpha_n^\circ) = 1/4$
$s(2,\alpha_n') = 1/8$

4) Cependant dans certains "cas pathologiques" (même si (x_n) est bornée), on peut avoir $\sum\limits_{x \in \mathcal{A}(x_n)} s(x_1(x_n)) < 1$

En voici un exemple :
$(y_n) = (0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,\ldots)$

(1 fois le 0,2 fois le 1,4 fois le 0,8 fois le 1,16 fois le 0 etc...)
On vérifie (à l'aide de calculs sur les séries) que :
$s(0,(y_n)) = s(1,(y_n)) = 1/3$.

Bibliographie

[1] M.Y. COSNARD. Etude du chaos dans l'itération d'une transformation ponctuelle du premier ordre. Application à des modèles de biologie. C.R. de l'Académie des Sciences Paris Z 86(1978) p 639-642

[2] M. BLANCHARD. Sommes de suites périodiques. PLOT Bulletin des Régionales APMEP de Poitiers, Limoges et Orléans-Tours 3ème trimestre 1980.

[3] J.P. DELAHAYE. Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites. Thèse de 3ème cycle. Lille 1979.

[4] J.P. DELAHAYE. Algorithmes pour suites non convergentes. Numerisch Mathematik 34 (1980) p 333-347.

[5] T.Y. L.I. ET J.A. YORKE. Period three implies chaos American Mathematical Monthly 82(1975) p 985-992.

[6] E. POLAK. Computational Methods in Optimization, Academic Press, New York. 1971.

[7] L. SCHWARTZ. Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris, 1970.

LA DIVISION EUCLIDIENNE A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jeanne ROUGIER
École Normale - Limoges

Pour améliorer la pratique de la division à l'Ecole Elémentaire, en en modifiant l'approche.

Généralités sur les opérations à l'École Élémentaire

Les maîtres de 6ème attendent très souvent de leurs élèves une connaissance parfaite des quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division ; en fait leur attente est plus celle d'une bonne pratique des techniques opératoires classiques que celle d'une maîtrise des propriétés de ces opérations. Depuis les nouveaux programmes de mathématiques à l'Ecole Elémentaire, en 1970, on essaie de faire utiliser les propriétés de ces opérations - sans aucune définition mathématique bien sûr - pour que les enfants construisent des techniques opératoires moins sophistiquées que celles que nous connaissons bien, mais plus performantes pour eux.

Pour comprendre ce que peut être un enfant de C M_2 en fin d'année scolaire, voyons comment se déroule son cursus dans le cycle élémentaire à propos d'opération.

Jusqu'à la fin du C E_2 les seuls nombres connus des enfants sont les entiers naturels. Les nombres décimaux ne sont présents qu'au C M, aussi pour bon nombre d'enfants, ils ne sont pas parfaitement maitrisés en quittant le C M_2 même (et surtout) si les décimaux ont été présentés très

Note :	*C P*	*: Cours préparatoire, enfants agés en moyenne de*		*6 ans*	*- 7 ans*	
	C E_1	*: Cours élémentaire,*	*1ère année*	*"*	*7 "*	*8 "*
	C E_2	*: " "*	*2ème année*	*"*	*8 "*	*9 "*
	C M_1	*: Cours moyen*	*1ère année*	*"*	*9 "*	*10 "*
	C M_2	*: " "*	*2ème année*	*"*	*10 "*	*11 "*

tôt au C M_1, ceci au détriment d'une bonne assise de la connaissance de $\mathbb{N}$.

L'addition est présentée au C P, le champ des nombres sur lesquels on opère n'excédant pas, en général, la première centaine. Puis elle est reprise au C E_1 , au C E_2 , au C M_1 et enfin au C M_2 : à chaque fois le champ des nombres s'étend, pour au C M comprendre aussi les décimaux.

Les premières approches de la multiplication se font au C E_1 ; il semble qu'elles offrent moins de difficultés pour un enfant de 7 ans que celles de la soustraction. L'étude de la multiplication sera reprise et approfondie au C E_2 , au C M_1 : chaque année, comme pour l'addition, on a une extension du domaine numérique sur lequel opère l'enfant. Au C M_2 la multiplication dans $\mathbb{N}$ devrait être parfaitement maitrisée et celle de $\mathbb{D}$ bien assurée.

La soustraction présentée elle-aussi au C E_1 , est une opération plus difficile à faire comprendre. Comme pour la multiplication, son étude est reprise au C E_2 , puis au C M_1 et au C M_2 , sur les mêmes nombres.

En principe les enfants quittent l'école élémentaire, avec, pour la plupart d'entre eux, une bonne maîtrise des techniques opératoires de ces trois opérations sinon une bonne connaissance de leurs propriétés.

Pour la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ ou la division des nombres décimaux c'est autre chose. La division des entiers naturels est présentée au C E_2 et dans les programmes du 7-7-78 il est demandé de laisser découvrir aux enfants des techniques dites artisanales, c'est-à-dire de ne leur imposer prématurément aucune règle. Comme pour les autres techniques opératoires on souhaiterait qu'ils construisent eux-mêmes leur technique pour diviser.

Pourquoi le travail n'est-il pas terminé en fin de C M_2 pour bien des enfants ? Parce que la détermination d'un quotient et d'un reste est une activité très complexe faisant intervenir simultanément des connaissances qu'il faut avoir bien maitrisées sur la multiplication, la soustraction et les encadrements.

Les difficultés de la technique traditionnelle

RAPPEL - a est un entier naturel, b est un entier naturel non nul, diviser a par b c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que :

$$\left.\begin{array}{r} a = b\,q + r \\ r < b \end{array}\right\} \Longleftrightarrow b\,q \leq a < b\,(q+1)$$

Exemple : $a = 12\,475$

$$\left.\begin{array}{r} 12\,475 = 47 \times \boxed{265} + 20 \\ 20 < 47 \end{array}\right\} \text{ ou } 47 \times 265 < 12\,475 < 47 \times 266$$

Pour déterminer le quotient et le reste, voici ce que j'avais appris vers l'an 1940, qui devait s'apprendre bien avant, mais aussi bien après (la disposition pratique du calcul joue un rôle fondamental).

$$\begin{array}{r|l} 12\,475 & 47 \\ \hline \cancel{3} & \cancel{3}\;2\;\cancel{7}\;6\;\cancel{0}\;5 \\ 3\,07 & \\ \cancel{8} & \\ 255 & \\ \cancel{3} & \\ 20 & \end{array}$$

" J'ai deux chiffres au diviseur, j'en prends deux au dividende et je dis " en 12 combien de fois 47 " ? " il n'y va pas, donc " en 124 combien de fois 47 ou en 12 combien de fois 4 " ? " 3 fois ". J'écris 3 sous 47 et " 3 fois 7, 21 ; 21 ôté de 24 [pourquoi 24 ?] 3 et je retiens 2, 3 fois 4 12 ; 12 et 2, 14 ; 14 ôté de 12 ça ne se peut pas ". Je barre 3 et j'essaie 2 avec la même ritournelle. Voir ci-contre ce que cela peut donner pour un débutant obligé d'écrire au maximum lorsque ses compétences en calcul mental sont encore faibles ; il y a beaucoup de ratures !

De plus, il intervient des retenues qui ne sont celles ni d'une multiplication ni d'une soustraction. Par exemple, à partir de 307 divisé par 47 on a déterminé le chiffre du quotient, soit 6. En fait on doit retrancher à 307 le produit 47×6 :

$$47 \times 6 = 42 + 240 = 282 \quad \text{puis} \quad 307 - 282 = 25$$

Or que fait-on avec la technique précédente ?

$7 \times 6 = 42$, on retranche 42 à 47, ce qui suppose implicitement que l'on a transformé 307 en $307 + 40 = 300 + 47$.

Puis $4 \times 6 = 24$ et $24 + 4 = 28$, 28 que l'on retranche à 30, c'est-à-dire que l'on applique implicitement le théorème des différences égales :

$$307 - 282 = (307 + \underline{40}) - (282 + \underline{40})$$

$$(307 + \underline{40}) - (42 + 240 + \underline{40}) = (307 + 47) - (42 + 280)$$

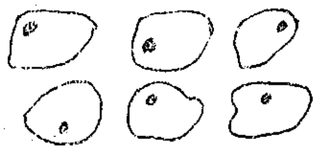
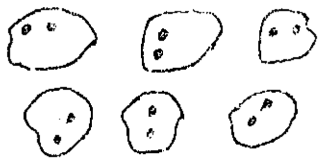
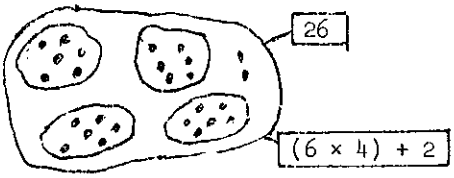
$$= (47 - 42) + (300 - 280)$$

C'est une méthode très économique pour un bon calculateur, mais pour un débutant, elle n'est pas fiable.

Une approche possible de la division des entiers naturels

1- _Manipulations_ -

Elles sont basées sur les traditionnelles distinctions : nombre de parts, valeur de la part. (A propos de parts, de partage il serait souhaitable de se référer à l'article " Partages " de Mots II (publication de l'A.P.M.E.P.))

	NOMBRE de PARTS	*VALEUR de la PART*
Situation de départ	26 bonbons 6 bonbons par enfant	26 bonbons 6 enfants
1ère manipulation	Formation d'un tas de 6 bonbons pour l'un des enfants :  26 -6 = 20 Il reste alors 20 bonbons 20 > 6 Il est possible de recommencer l'opération	Distribution d'un bonbon à chacun des enfants :  26 -6 = 20 Il reste 20 bonbons 20 > 6 La distribution peut recommencer.
2ème manipulation	Formation d'un autre tas de 6 bonbons  20 -6 = 14 14 > 6 L'opération peut être poursuivie	Nouvelle distribution  20 -6 = 14 14 > 6 Il est possible de faire une autre distribution
	Après la 3ème manipulation il reste 8 bonbons	
4ème manipulation	 8 -6 = 2 2 < 6 Il n'est donc plus possible de former un tas de 6 bonbons	 8 -6 = 2 2 < 6 Il n'est plus possible de faire une nouvelle distribution
Conclusion	Quelle que soit la colonne envisagée les écritures numériques sont les mêmes bien que les schémas terminaux soient différents :  	

Pour l'un et l'autre cas on a la représentation numérique suivante :

$$\begin{tikzcd}
26 \arrow[d, "r\ 6"'] \arrow[rrdd, dashed, "r(6 \times 4)"] & & \\
20 \arrow[d, "r\ 6"'] & & \\
14 \arrow[r, "r\ 6"'] & 8 \arrow[r, "r\ 6"'] & 2
\end{tikzcd}$$

(r : retrancher)

$$\boxed{26 = (6 \times 4) + 2 \quad \text{et} \quad 2 < 6}$$

Dans les deux cas on a eu à résoudre une même équation :

$$6 \times \square + \bigcirc = 26 \quad \text{et} \quad \bigcirc < 6$$

2 - Avec des nombres plus grands, sans matériel -

La grandeur des nombres exclue l'utilisation de matériel ; mais les écritures utilisées vont reproduire les manipulations précédentes.

1er Exemple -

$a = 1947 \qquad b = 428$

$1947 = (428 \times \ldots) + \ldots \quad \text{et} \quad \ldots < 428$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1947} \arrow[d, "r\ 428"] \arrow[rrdd, Rightarrow, "r(428 \times 4)"] & & \\
\boxed{1519} \arrow[d, "r\ 428"] & & \\
\boxed{1091} \arrow[r, "r\ 428"'] & \boxed{663} \arrow[r, "r\ 428"'] & \boxed{235}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{1947 = (428 \times 4) + 235 \quad \text{et} \quad 235 < 428}$$

2ème Exemple -

$a = 8085 \qquad b = 237$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{8085} \arrow[rr, "r\ 2370"] \arrow[d, "r(237 \times 30)"] & & \boxed{5715} \arrow[d, "r\ 2370"] \\
\boxed{975} \arrow[d, "r\ 237"] \arrow[rrdd, Rightarrow, "r(237 \times 4)"] & & \boxed{3345} \arrow[ll, "r\ 2370"'] \\
\boxed{738} \arrow[d, "r\ 237"] & & \\
\boxed{501} \arrow[r, "r\ 237"'] & \boxed{264} \arrow[r, "r\ 237"'] & \boxed{27}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{8085 = (237 \times 34) + 27 \quad \text{et} \quad 27 < 237}$$

3 - Liste des multiples -

$a = 12\,475 \qquad b = 47$

•) *Liste de multiples utiles*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	47	94	141	188	235	282	329	376	423
	470	940	1410	1880	2350	2820	3290	3760	4230
	4700	9400	14100						

•) *Recherche du quotient et du reste*

12 475		
− 9 400	200	
3 075		3075 > 47
− 2 820	60	
255		255 > 47
− 235	5	
20		20 < 47

r = 20 q = 265

(Avec de l'expérience on peut se contenter d'écrire la première ligne de multiples).

Pour de plus amples détails sur cette méthode en particulier et sur la division en général se reporter à : Elem math III, la division (publication de l'A.P.M.E.P.).

4 – Technique plus proche de notre technique habituelle, mais demandant moins de mémorisation de résultats partiels.

a = 19 456 b = 23

Disposition pratique des calculs :

19 456	23	23 × 9 = 207
− 18 400	800	23 × 8 = 184
1 056		23 × 5 = 115
− 920	40	23 × 4 = 92
136		23 × 6 = 138
− 115	5	
21		

19 456 = (23 × 845) + 21 et 21 < 23

Conclusion

L'approche précédente peut paraître bien longue à certains. Cependant l'expérience montre que des enfants qui ont construit eux-mêmes leur technique, ont beaucoup plus de chance de la maîtriser que ceux qui ont appris à appliquer une règle sans en comprendre le pourquoi.

Cette approche peut commencer dès la fin du C E_1 par la phase manipulatoire accompagnée d'écritures numériques ; au C E_2 l'enfant se construit des techniques artisanales. Ensuite au C M_1 , en tenant compte de l'acquis du C E, on atteindra des techniques plus performantes qui seront consolidées au C M_2 .

Par la suite, il y aura une autre difficulté, c'est l'apprentissage de la division des nombres décimaux ; mais ceci est plus spécifiquement du domaine de la classe de $6^{ème}$ puisque dans les instructions qui accompagnent le nouveau programme de mathématiques pour le cycle moyen de l'école élémentaire (arrêté du 18-7-80 ; B.O. n° 31 du 11-9-1980) il est précisé : " *La division de deux nombres décimaux ne fera pas l'objet d'un travail systématique au cycle moyen* ". Cependant dans des situations où elle est rendue nécessaire, il sera demandé aux élèves de tenter de construire et de justifier des procédures conduisant à l'obtention d'un résultat. "

<u>*Remarque*</u> -

Dans les objectifs mathématiques deux N.B. sont particulièrement importants :

1) N.B.- L'étude des nombres décimaux et de leur structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité au collège.

2) N.B.- Les techniques de calcul des quotients de nombres décimaux ne constituent pas un objectif du cycle moyen.

DESSINS ARABES, PAPIER CALQUE ET APPLICATIONS AFFINES

Michel BRIDENNE — Lycée Gustave Eiffel - Dijon

Pascal MONSELLIER — Lycée Benjamin Franklin - Orléans

Un article de deux grands reporters, au retour d'un voyage au pays de l'Islam et de la Géométrie

Une des activités de la classe de Seconde consiste à réviser (quelquefois à apprendre !) les transformations affines classiques : symétries orthogonales par rapport à une droite, translations, homothéties, symétries centrales (qui apparaissent difficilement pour les élèves commes des homothéties ou des rotations !)... Or les élèves issus du premier cycle arrivent en Seconde avec un bagage non négligeable à ce propos. Ils expriment souvent cette connaissance d'une façon que nous jugeons nous, professeurs de math, comme abominable, mais la manière dont ils résolvent certains problèmes faisant appel à ces données montre que la majorité d'entre eux ont intégré ces concepts à des degrés divers.

Il s'agissait pour nous de trouver une situation où les élèves, rendus actifs par la résolution d'un problème que nous leur posions, pourraient investir leurs connaissances antérieures. Cette activité, outre son rôle d'apprentissage, devait présenter (pour nous) une fonction évaluatrice dans la mesure où elle ferait apparaître le niveau des acquis conceptuels des élèves et la maîtrise qu'ils avaient du langage se rapportant à ces notions.

C'est Michel BRIDENNE qui, traînant un jour à l'IREM d'Orléans, a découvert un livre (n°1 de la bibliographie) qui nous a fourni la situation cherchée.

Classes concernées

: Une Seconde C,
Une Seconde T1

Objectifs pour les élèves

- réaliser une activité sur les transformations du plan affine,
- réviser les connaissances du 1er cycle sur ce sujet,
- maîtriser un langage acceptable sur ce sujet,
- étudier la composition des transformations.

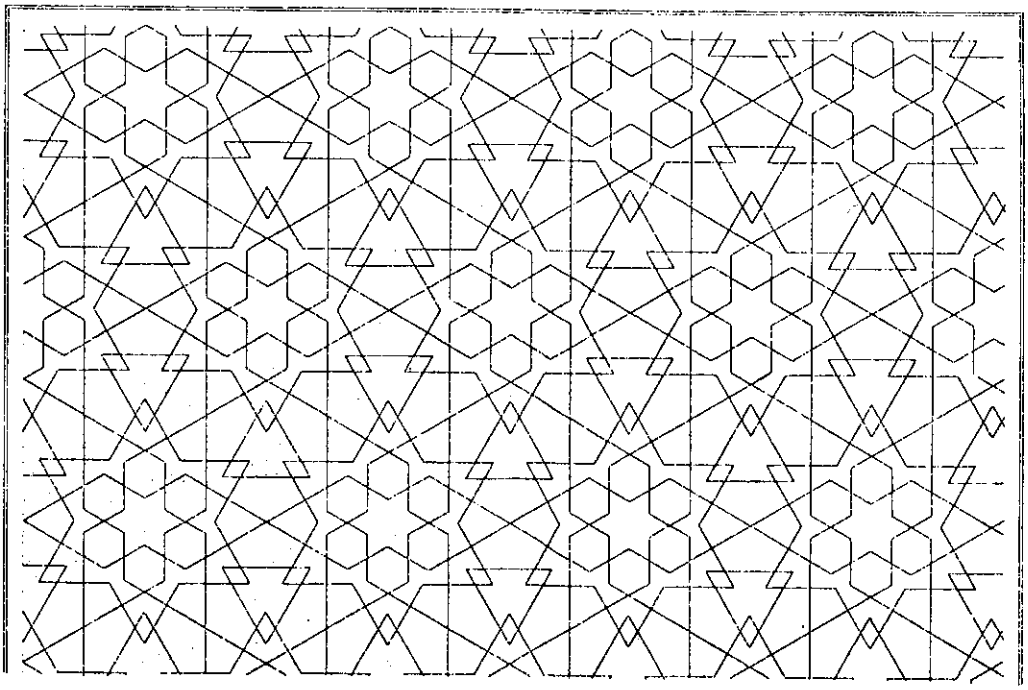
Intentions pour les professeurs

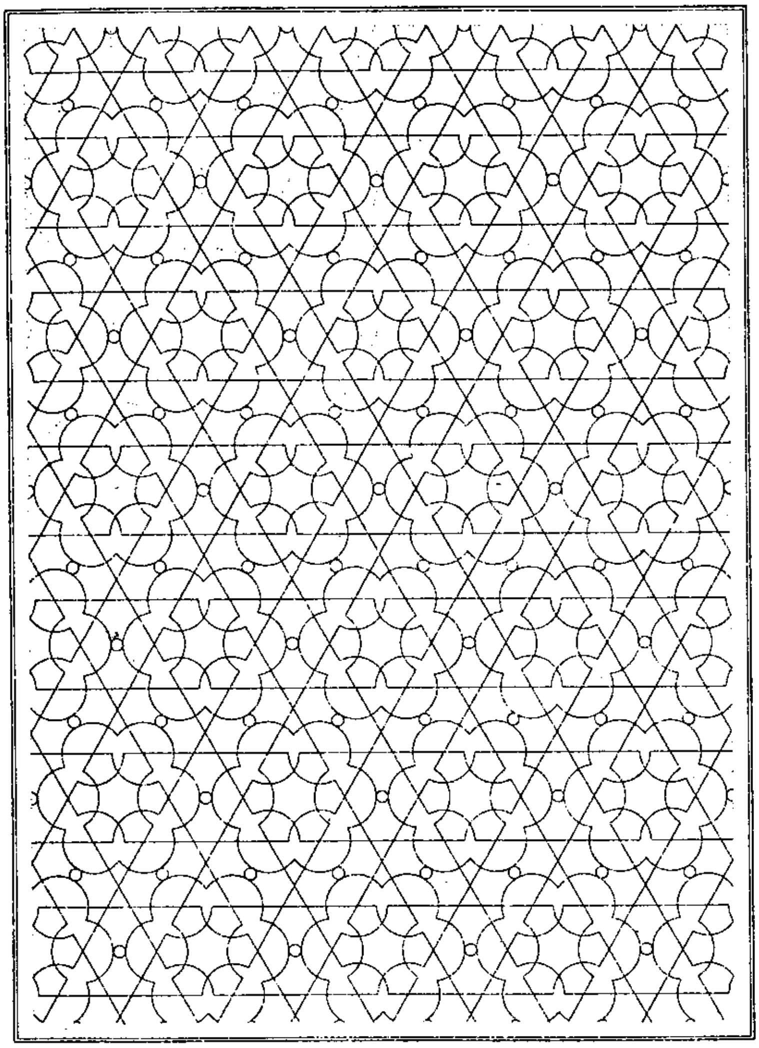
- prendre en compte des connaissances acquises antérieurement par les élèves ,
- éviter un "cours" fastidieux sur un sujet supposé connu,
- lier l'affine et le métrique,
- rendre active l'utilisation d'une transformation {plier, faire glisser, retourner, faire tourner, pivoter... (expressions d'élèves)},
- limiter l'intervention du prof. à :
  . la donnée de contre-exemples,
  . un questionnement sur certaines affirmations faites par les élèves,
- inciter les élèves à justifier leurs résultats,
- mettre en évidence l'utilisation faite de la composition des applications.

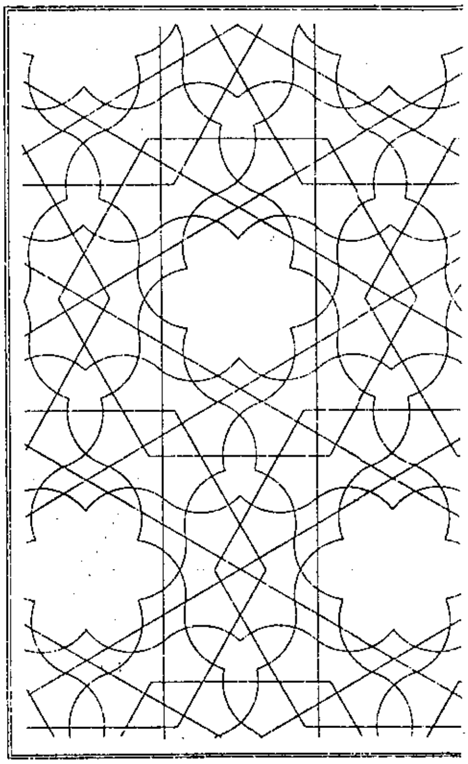
Situation proposée aux élèves

Chaque groupe d'élèves (4 maximum) choisit un dessin parmi ceux qu'on lui propose (voir pages suivantes quelques exemples, mais nous en avions bien d'autres). On demande à chaque groupe :

1) de trouver un "motif minimal" du dessin,
2) de décrire comment, à partir de ce "motif minimal", on reconstruit le dessin,
3) de fournir un agrandissement du "motif minimal". Chaque groupe devra remettre deux dessins sur papier calque (le "motif minimal" grandeur réelle, et le même motif agrandi) et un texte expliquant son "programme de construction".







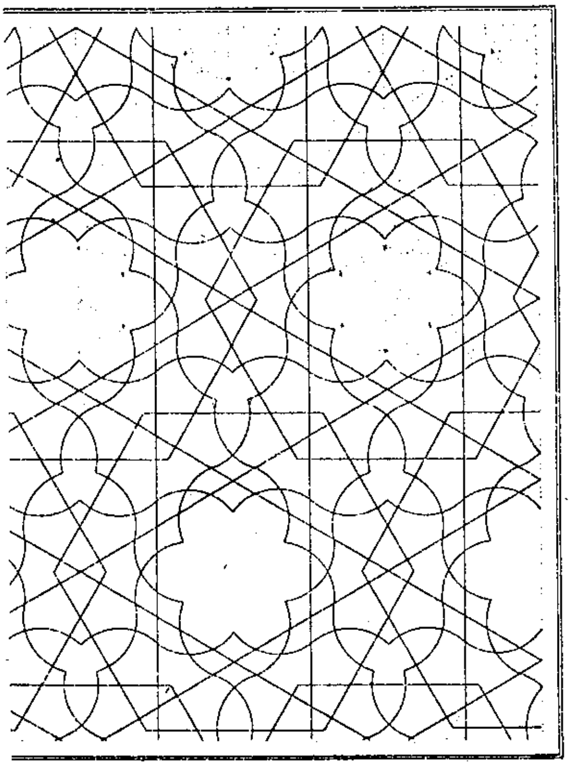
Commentaires

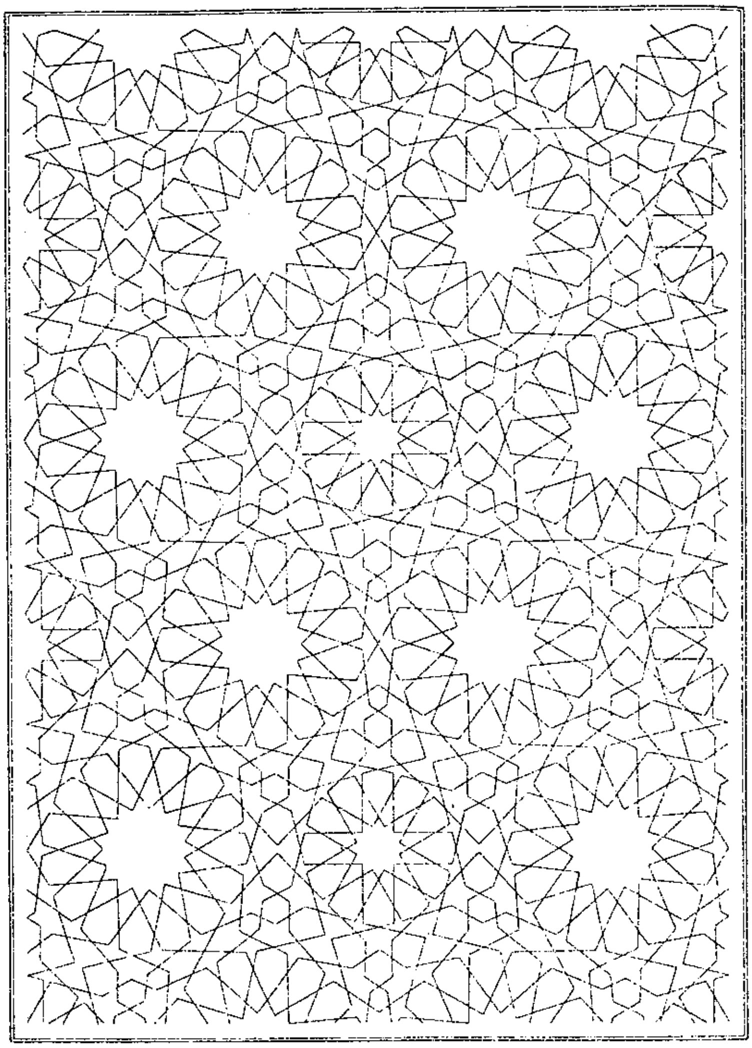
Il est difficile d'observer seul tout ce qui se passe dans les groupes, même avec une demi-classe en Travaux Dirigés. Décrivons simplement les faits marquants.

1) Le concept de "motif minimal" a été longuement discuté, surtout en Seconde T1. Une fois l'idée comprise et le travail achevé, aucun élève ne met en doute que le motif qu'il propose est bien "minimal" (car cela "se voit") mais certains essaient, sans succès, d'étudier si un même dessin n'aurait pas plusieurs "motifs minimaux".

2. Aucun élève n'a introduit de repère pour résoudre numériquement le problème (cette activité ne s'y prête sans doute pas).

3) La translation est décrite comme un "glissement" suivant une direction donnée, dans un sens donné, et d'un nombre d'unités données (souvent des centimètres). Le mot "vecteur" apparaît rarement sans sollicitation.





Les seules translations qui apparaissent sont celles dont le vecteur est dans la direction d'un axe de symétrie de la figure.

4) L'angle d'une <u>rotation</u> (pardon ! Une degré-mesure de ...) apparaît plus rapidement et plus facilement que le centre, qui ne semble pas jouer un rôle significatif. La notion de "rotation" chez les élèves semble recouvrir l'idée (juste !) de composée d'une rotation dont le centre est un point intéressant de la figure et d'une translation.

5) Les symétries orthogonales par rapport à des droites subissent bien des avatars :

   . d'une part, leur légitimité est mise en question ("M'sieur, est-ce qu'on a droit de retourner le motif ?"), ou même pas envisagée pour ceux qui, au lieu de travailler sur papier calque, s'obstinent à découper leur "motif minimal" hypothétique dans du papier quadrillé ordinaire et à le promener sur le dessin.

. d'autre part, conséquence d'une activité réelle, les symétries orthogonales sont décrites systématiquement comme des "retournements", "pivotements"... etc, c'est-à-dire comme des rotations spatiales autour d'un axe. Quand, après une maïeutique serrée, le mot symétrie apparaît enfin (sans adjectif), c'est presque à regret que des élèves constatent la concordance entre ce qu'ils décrivent et des connaissances vaguement apprises au collège.

6) Les "symétries ponctuelles" sont des applications à part, totalement indépendantes des rotations d'angle plat (et bien sûr, des homothéties de rapport -1 !).

7) L'"agrandissement" du motif minimal avait pour but de faire apparaître des homothéties (homothéties vectorielles, en fait, car le centre n'avait pas de sens dans cette activité précise). Les homothéties ne sont jamais apparues (ce qui prouve peut être que l'activité n'est absolument pas porteuse de ce concept !), mais ce travail a donné lieu à des comportements différents :

. déroute en Seconde C, où les élèves ne voyaient pas ce qu'il fallait faire. Il a fallu empêcher un élève de réaliser un agrandissement photographique !

. aucun problème en Seconde T1 où tous les groupes ont réalisé un agrandissement à l'"Echelle 2". C'était les connaissances en dessin industriel qui étaient investies ici...

8) De manière implicite, beaucoup d'élèves considèrent la composition des applications comme commutative.

9) Beaucoup d'élèves n'éprouvent pas le besoin de justifier le résultat "évident" concernant l'image d'une figure (droite, segment de droite, cercle, polygone, conservation du parallélisme...) puisque cela se "voit"

Conclusion

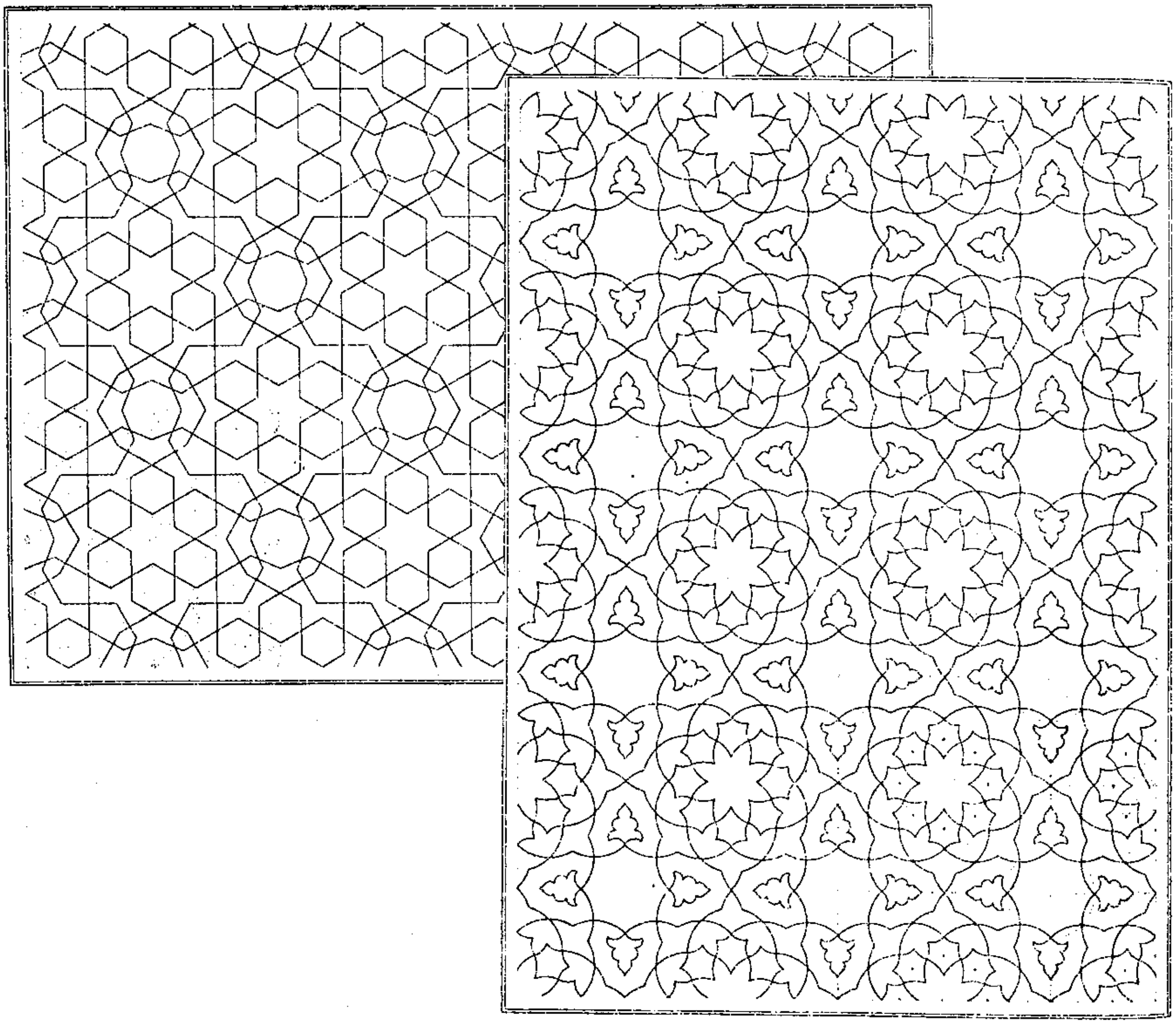
Tous les objectifs prévus pour cette activité n'ont pas été atteints. En particulier, les élèves ne manipulent que des isométries, (sauf dans l'"agrandissement", mais celui-ci semble détaché du reste), ce qui est une façon bien particulière d'étudier les applications affines !

A ce propos, il faudrait faire manipuler par des élèves des applications non isométriques, et non affines, par exemple, dans l'activité suivante que nous prévoyons de rajouter :

Construire et utiliser des instruments réalisant des restrictions à une partie du plan d'applications affines ou non, isométriques ou non (ex : parallélogramme articulé, inverseur, pantographe...etc). Des instruments de ce type ont été vus lors de l'exposition APM-IREM qui a parcouru l'Académie d'Orléans en 1979/80.

Ce genre d'activité permettrait d'éviter l'écueil des programmes du Second Cycle en géométrie : les élèves des sections C et E n'étudient de la Seconde à la Terminale que des applications affines. De là à penser que toute application du plan est affine...On ne vas pas tarder à retrouver des vertus à l'inversion !

Pour finir, signalons que cette activité, ou des activités voisines, pourrait être mise en oeuvre à d'autres niveaux qu'en Seconde. En en changeant les objectifs et éventuellement quelques modalités, elle pourrait servir aussi bien au Premier Cycle qu'en Terminale C ou E.



Bibliographie et sources

1. ARABIC GEOMETRICAL PATTERN AND DESIGN, par J.BOURGOIN (Dover Publications Inc. New-York 1973).

   Il s'agit de la reédition, faite aux Etats Unis, du livre "Les éléments de l'Art Arabe : le trait des entrelacs", (Firmin Didot et Cie. Paris 1879). 190 pages des motifs que les dessinateurs architectes et décorateurs ont utilisé à l'apogée de l'art arabe.

2. ROSACES, FRISES ET PAVAGES, par Yvon BOSSARD (Cedic, volume I 1977, volume II 1979).

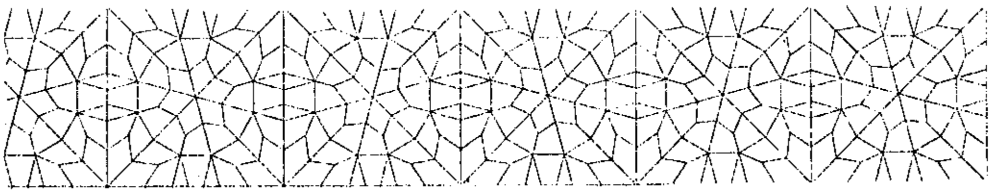
3. DIVERSES BROCHURES ET ARTICLES APM, en particulier : géométrie au Premier Cycle, tomes I et II).

4. TRAVAUX, parus sous des formes diverses, de la Commission Second Cycle sur les nouveaux programmes.

5. IDEES DU GROUPE GEDEOP, (plus particulièrement les "transformateurs" de Janine CARTRON).

6. PAS MAL DE DOCUMENTS, feuilles de papier volantes,...de différents IREM (Caen, Orléans-Tours, Lyon...),

7. La participation passive et involontaire, mais totalement désintéressée de Michel DARCHE, de l'IREM d'Orléans, qui ne tenait pas tellement à prêter le livre n° (1), mais qui s'est laissé faire.



CALCUL DE π AVEC UNE PETITE CALCULATRICE PROGRAMMABLE

Bernard DUVEAU

Lycée - Saint-Yrieix

Où l'on verra que l'on peut être aussi bon calculateur qu'Euler... avec une machine !

Extrait du programme de Seconde

" On donnera une place majeure au calcul sous tous ses aspects ; exemples d'approximation d'un nombre réel au moyen de suites ; thème indicatif : exemples de suites convergeant vers π "

Nous n'examinerons que quelques méthodes classiques puisque les formules performantes convenant aux ordinateurs :
MACHIN (10^4 décimales sur IBM 704 en 100 mn en 1958)
SHANKS et WRENCH (10^5 décimales sur IBM 7090 en 8 h. en 1961)
SALAMIN (10^7 décimales) [voir Utilisation des Ordinateurs en Théorie des Nombres par J.L. NICOLAS] sont hors de notre portée, nos modestes HP 25 ou HP 33 nous fourniront 9 décimales seulement.

Méthode de Wallis

$$\boxed{\lim \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \ldots 2p}{3 \times 5 \times 7 \ldots (2p+1)} \right)^2 \times \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}}$$

(intégrale trigonométrique et intégration par parties)

Programmer : $\quad u_{k+1} = u_k \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \quad$ où $\quad R_0 = 1, 3, 5, 7, \ldots$

$R_1 = 2, 4, 6, 8, \ldots$

pour économiser le nombre de pas.

Méthode longue, il faut plusieurs heures pour arriver à $\pi/2 = 1,5707$

ε	N = nombre de calculs	Valeur calculée
10^{-1}	4	1,4
10^{-2}	39	1,56
10^{-3}	393	1,569
10^{-4}	3926	1,57070

Formule de Leibniz

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots}$$ (développement de Arc tg x)

ε	N	Valeur Calculée
10^{-1}	3	0,8
10^{-2}	25	0,79
10^{-3}	250	0,784
10^{-4}	2500	0,7852
10^{-5}	24992	0,78539
10^{-6}	240924	0,785397

Si $\varepsilon = 10^{-n}$, il faut environ $\frac{10^n}{4}$ calculs

$\varepsilon = 10^{-6}$ exige plus de trois jours pour seulement 4 décimales exactes !

Archimède

$$\boxed{\pi = \lim 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\ldots \sqrt{2}}}}}$$

(étude des polygônes réguliers à 2^n côtés)

La programmation est rapide (14 pas) on obtient au bout de 8 calculs : 3,141569 puis des valeurs qui s'écartent de π puis des zéros.

On multiplie en effet un nombre très grand 2^n par un nombre très petit $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$ car $\lim \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}} = 2$ (le démontrer ou le " vérifier " à l'aide d'une machine).

Méthode Sart

Amélioration notable de la précédente due à un Inspecteur Général belge (voir : Math et Pédagogie, Juin 1977)

Si l'on pose $w_n = \sqrt{2 + \sqrt{\ldots \sqrt{2}}}$ et $\ell_{n+1} = 2^{n+1} \sqrt{2 - w_n}$ on obtient

$\ell_{n+1} = 2\ \ell_n\ /\ w_{n+1}$ d'où 13 pas de programme et une grande rapidité de convergence.

Essayer avec HP 25 :

Rcl1 2 × Rcl0 ÷ Sto 1 RS Rcl0 2 + $\sqrt{\ }$ Sto0 Gto 01

avec $\begin{cases} 2 \text{ Sto } 1 \\ \sqrt{2} \text{ Sto } 0 \end{cases}$ si $\varepsilon = 10^{-3}$ N = 6 et 3,141

$\varepsilon = 10^{-9}$ N = 16 3,141592654 !

C'est semble-t-il la méthode la plus rapide et la mieux accessible à une classe de seconde (possibilité d'une " démonstration " de la formule d'Archimède).

Fonction zeta de Weierstrass

$Z(n) = \sum \frac{1}{x_i^n}$ on démontre que

$$\frac{1}{Z(n)} = (1 - \frac{1}{2^n})\ (1 - \frac{1}{3^n})\ (1 - \frac{1}{5^n})\ \ldots$$

(nombres premiers)

par ailleurs on sait que :

$Z(2) = \pi^2/6$ $Z(4) = \pi^4/90$ $Z(6) = \pi^6/945$ $Z(8) = \pi^8/9450$

$Z(10) = \pi^{10}/93555$ .... $Z(2k) = \frac{a^k}{b^k}\ \pi^{2k}$ (Euler)

Essayer avec HP 25 (ou 33)

1/x Rcl 0 y/x 1 -CHS Sto × 1 Rcl 1 1/x Rcl 7 × Rcl 0

1/x y^x RS (15 pas)

Calculs avec Z(6) :

6 Sto 0 1 Sto 1 2 fpgRM / RS 3 RS ...

2 3,1408

3 3,14155

. . . . donc 9 décimales en 10 calculs.

29 3,141592654

avec Z(8) : 5 calculs, avec Z(10) : 3 calculs !

Cette méthode présente l'avantage d'être très RAPIDE et utilisable avec une machine non programmable, elle peut par ailleurs fournir des exemples de suite à " convergence rapide ".

Question au lecteur : Comment avec HP 25 (ou 33) obtenir plus de 9 décimales de π ? J'offre une règle à calcul à la meilleure réponse.

PRENEZ GARDE A VOUS . . . A VOTRE SANTÉ

Marc BLANCHARD
Lycée - Rochefort sur Mer

Quand de futurs médecins militaires font des mathématiques, ce n'est pas triste !

Il est toujours facile de se gausser de la rédaction d'épreuves de concours ou d'examens. Nous sommes nombreux à savoir que finalement ce n'est pas si facile que cela.

Néanmoins, il semble que parfois certaines bornes soient allègrement franchies. Prenons pour exemple le texte de l'épreuve de mathématiques au concours d'admission aux écoles du service de santé des armées en 1980. Le voici :

SUJET DE MATHEMATIQUES.

1) *Exprimer dans* $\mathbb{C}$: $\sqrt[3]{1}$
   Donner une interprétation géométrique.
2) *Une variable aléatoire X prend des valeurs entières 1,...n avec la probabilité :* $P(X=n) = a.b^n$
   Que peut-on en déduire sur a et b ?
   Calculer l'expérance mathématique de X.

Un bon exercice consiste à dresser une liste commentée, aussi exhaustive que possible, des bourdes de l'énoncé. Elle est, à coup sûr, beaucoup plus longue que le texte lui-même.

Il est sans doute difficile de faire pire et aussi court. C'est suffisant pour choquer des élèves exigeant une certaine rigueur formelle, cela existe toujours, et tentés par l'ironie cinglante ou la révolte véhémente.

Faut-il les blâmer de n'avoir pas osé ?
La santé des troupes en pâtîra-t-elle ?

QUAND «LE MONDE» LIT LE «PLOT» . . .

Une preuve de plus de l'écrasante supériorité du "PLOT" dans le domaine des périodiques...

En toute logique

Faut-il courir sous la pluie pour être moins mouillé ? Est-ce que le déplacement provoque au contraire la rencontre d'un plus grand nombre de gouttes ? Ou bien est-ce différent ?

Je me pose cette question pratique à chaque averse, sans jamais passer au calcul : la situation s'y prête mal et le premier rayon de soleil me fait oublier le problème. Un lecteur s'y est pourtant attaqué : Marc Blanchard nous envoie son raisonnement, où, dans une approximation acceptable, il représente un homme par un parallélépipède.

Quel est le résultat ?

(Solution dans le prochain numéro du *Monde des sciences et des techniques*.)

Pour dénombrer les nombres de six chiffres contenant le nombre 12, distinguons cinq ensembles de nombres selon leurs formes :

A : 12....
B : .12...
C : ..12..
D : ...12.
E : 12

Chacun contient 10^4 nombres. Il n'y a aucun nombre commun à AB BC CD DE. Par contre chaque couple AC AD AE BD BE CE a 10^2 nombres communs. En outre, il y a un nombre commun à AEC : 121212.

La quantité de nombres à exclure est donc

$5.10^4 + 1 - 6.10^2 = 49\,401$.

PIERRE BERLOQUIN.

"Le Monde" du 9 Juillet 1980

En toute logique

Les cubes du calendrier

BLEME N° 176
re depuis quelque nouvelle sorte de qui pose, par sa même, un problème on mathématique. Il ïnq cubes dont les :s portent des let- deux suivants des our écrire le mois en la date. Comment artir les lettres de l'alphabet, à raison d'une par face, pour pouvoir, à l'aide de trois cubes seulement, écrire ainsi les douze mois :

JAN FEV MAR AVR MAI JUN
JUL AUT SEP OCT NOV DEC ?

(août écrit AOU donnerait une impossibilité).

(Solution dans le prochain « Monde des sciences et des techniques ».)

SOLUTION DU PROBLEME N° 175

L'homme ABCD, de hauteur h, de largeur r et d'épaisseur e, parcourt dans un temps T une distance L. Il est dans un milieu humide, contenant une proportion P d'eau par mètre cube, et se déplaçant vers le sol (verticalement, par un vent négligeable) à la vitesse v. Pendant le temps T, l'homme reçoit l'eau contenue au départ dans deux parallélépipèdes :

— pour la face verticale : ABCDA'B'C'D'

— pour la face horizontale supérieure : CDEFC'D'E'F'

Le premier a un volume V1 = Lrh. Le volume du second est V2 = Lrz et la similitude des triangles donne $\frac{z}{vT} = \frac{e}{L}$

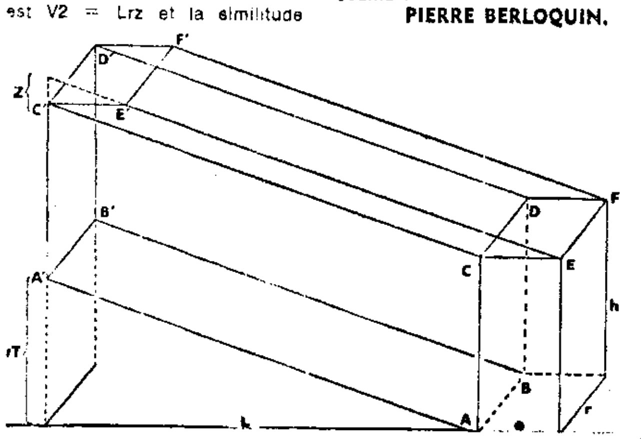
La quantité totale d'eau est donc Q = p(V1 + V2) = pr(Lh + evT)

On remarque que la face avant reçoit la même quantité d'eau quelle que soit la vitesse. En revanche, en courant vite, on minimise l'eau reçue par la face supérieure (le dessus de la tête et des épaules en pratique)

Comme Marc Blanchard, qui proposait ce problème, les amateurs iront plus loin : faut-il courber l'échine, et jusqu'où ?

Qu'advient-il lorsque le vent souffle ?

PIERRE BERLOQUIN.



"Le Monde" du 16 Juillet 1980

Les lecteurs du "Monde des Sciences et des techniques" se demandent parfois où Pierre Berloquin va chercher toutes les idées qu'il soumet à ses lecteurs dans sa rubrique "En toute logique".

Les fac-similés ci-contre apportent un élément de réponse : Pierre Berloquin, à défaut d'être abonné au "PLOT", en a au moins lu le numéro 11 (Avril 80)

Avouons qu'il a de bonnes lectures !

Le 25 octobre 1980, l'Assemblée Générale de laRégionale APMEP d'Orléans-Tours s'est tenue au lycée Benjamin Franklin d'Orléans.

I. RAPPORT D'ACTIVITE 79/80. Présenté par Pierre Christofleau.

Exposition APM-IREM : elle a demandé des efforts considérables mais a connu un grand succès. Sa réalisation en"dur" par la Maison de la Culture de Bourges est en cours. La Régionale APM est partie prenante, au même titre que l'IREM et que la M.C.B., dans ce travail. Sa présentation est prévue en Mai 1981.

Les Journées Régionales APM-IREM se sont tenues en juin 1980 à Chateauroux. Le souhait unanime est qu'elles se poursuivent.

Les problèmes de l'APMEP au niveau national: le bureau de la Régionale a mandaté ses représentants au Comité National pour que le vôte sur la modification des statuts aille dans le sens suivant :

1) dans l'article 5, suppression de la phrase "Il (le bureau) peut, pour faire face aux différentes tâches, s'adjoindre d'autres membres de l'Association" (cf. Bulletin National n° 325, page 753).
2) maintien du sigle "APMEP" pour rappeler l'attachement des adhérents à leur appartenance à l'enseignement public.

Ces deux propositions ont été adoptées lors de la modification des statuts.

II. RAPPORT FINANCIER 79/80. Présenté par Jean-Louis Bon.

Le budget de la Régionale est en équilibre. On peut signaler :

- que le PLOT a désormais une comptabilité séparée. Le journal est financièrement en équilibre.
- que la vente de brochures, ressource financière des Régionales, n'est pas ce qu'elle devrait être.

Le rapport moral et le rapport financier sont adoptés à l'unanimité.

III. PARMI LES QUESTIONS DIVERSES, il est question :

- de l'expérimentation des nouveaux programmes de seconde proposée par l'A.P.M. et reprise par l'Inspection Générale.
- des futurs programmes de Première et de Terminale, non publiés à l'époque de cette réunion,
- de la nécessité pour tout adhérent de faire abonner son entourage au PLOT ; L'équilibre financier du journal est impératif pour qu'il conserve son autonomie.

IV. ELECTIONS.

1) Le nouveau bureau de l'Association, élu à l'unanimité, est composé de :

Président	: Jacques Pinaud	: chargé du 2ème cycle
Trésorier	: André Duthilleul	: chargé du 1er cycle
Secrétaires	: Rémy Charpentier	: de l'Enseignement Supérieur
	Michel Darche	: de l'Elémentaire et du Matériel Pédagogique
	Patrick Marthe	: l'informatique
	Pascal Monsellier	: des publications.

2) L'Assemblée Générale mandate Pascal Monsellier comme candidat au Comité National sur la base d'une plate-forme présentée par le bureau de la Régionale. Le bureau élu s'engage à élaborer cette plate-forme avant le 31 décembre, délai de rigueur.

RÉGIONALE DE POITIERS — Assemblée Générale du 22 Octobre 1980

L'Assemblée générale s'est tenue le 22 octobre 1980 au CDDP d'Angoulême. Une trentaine de participants dont un petit nombre de la Charente. Un invité de marque : Jean SAUVY (ARP : Activités et Recherches Pédagogiques) était venu de Paris et a présenté une passionnante exposition, "Peintres et Géomètres de la Renaissance à nos jours". Les 150 panneaux restent exposés au CDDP d'Angoulême (que nous remercions de son concours) jusqu'au 11 novembre : ils partiront ensuite pour Niort. M. SAUVY les laisse à la disposition de notre Régionale jusqu'au 1er janvier (ils iront ensuite à Angers).

La réunion s'était ouverte par un bref exposé de S. PARPAY : Première impression sur la "mise à l'essai" des nouveaux programmes de seconde. Puis présentation, visite et explication des panneaux exposés.

L'Assemblée générale proprement dite, après 17, a été forcément assez brève, avec une assistance réduite. Les points suivants ont été abordés :

1) Compte rendu financier (S.PARPAY)

La situation est satisfaisante mais il faut mettre à jour la tenue des brochures. Michel PUYGRENIER (absent et excusé) accepte d'entreposer et de gérer le stock et d'assurer la diffusion, avec le concours d'un responsable par département. Nous avons encore un avoir, en brochures à commander, de 3 800 F (ristourne en nature de l'Association nationale).

2) PLOT

J. BOROWXZYK expose les projets de routage au tarif "périodiques". La question est toujours à l'étude, et peut-être en voie de règlement.

3) Assemblées départementales 1980

La date du 26 novembre est proposée (Deux-Sèvres, Ch. Maritime)

4) Assemblée Régionale 1981

Elle aura lieu à Poitiers (rotations). Il est demandé aux prochaines assemblées départementales de se prononcer sur sa date : juin ou octobre. Juin (début - à cause des examens) présente des avantages : la nouvelle équipe sera en place dès la rentrée - les nouveaux statuts régionaux pourront être étudiés à temps (en liaison avec les nouveaux statuts nationaux).

On rappelle qu'il est possible de faire une réunion d'une journée avec autorisation d'absence rectorale

5) Comité National (élection de 1981)

Candidature de Jean Fromentin, soutenue par la Régionale.

6) Journées nationales 1981

Auront lieu à Amiens les 24 - 25 - 26 septembre. Responsable : ROUSSEL.

7) Informations diverses.

Dominique PORTE, sur le remplacement des épreuves du BEPC par un contrôle continu ... et uniformisé (par établissement, ville et peut-être académie ?) Cf. B.O. n° 33.

Marcel FOURNIER, sur les sujets de baccalauréat. Cf. Motion ci-jointe.

Michel PEYGRENIER signale qu'il a la possibilité de faire taper et tirer tous textes qu'on lui enverra manuscrits.

Jacques BOROWCZYK présente une motion (ci-jointe) concernant les possibilités de communication et d'échanges entre adhérents de l'APM à tous les niveaux (départemental, régional, national).

Les deux motions sont adoptés ; on souhaite leur publication dans le Bulletin national.

DEUX MOTIONS VOTEES PAR L'ASSEMBLEE

Première motion :

Les membres de l'APMEP réunis en Assemblée générale au CDDP d'Angoulême le 22 ocotbre 1980,

demandent aux membres des commissions de choix de sujets de mathématiques des différents baccalauréats de veiller à respecter l'esprit et la lettre des programmes spécifiques à chaque série, afin d'éviter des abus, comme ce fut le cas pour la série E 1980 du groupement Limoges-Poitiers-Bordeaux : prolongement par continuité à gauche et à droite à plusieurs reprises, direction asymptotique mais sans asymptote, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log x}{x-1}$ supposée connue, exercice dans C faisant appel à des astuces de calcul,... sans compter de nombreuses difficultés de calcul indiciaire en fin de problème et un caractère trop théorique, contraire à la distinction entre les épreuves de C et de