BULLETIN DES REGIONALES A.P.M.E.P.
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

Vous propose :

* des informations sur l'enseignement des mathématiques sous forme de comptes rendus des rencontres organisées dans les régionales (conférences, journées d'études, expositions,...)

* un instrument de dialogue permettant la confrontation de pratiques enseignantes diverses et le partage des réflexions qu'elles suscitent.

* des renseignements sur les livres, les publications, et les actions intéressant l'enseignement des mathématiques dans les trois Académies.

Dépôt légal : *4è trimestre 1980 (Archives Départementales du Loiret)*
Directeur de publication : Pascal Monsellier
Équipe d'animation : Jacques Borowczyk, Daniel Fredon, Pascal Monsellier

plot

Sommaire du n° 13

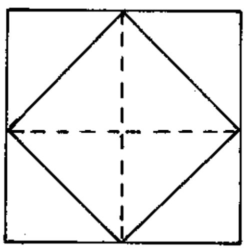
RÉELS ASSISTÉS PAR CALCULATRICES

Maurice CAUSSE
Lycée - Saintes

I INTRODUCTION

"Realis" ne se trouve pas dans les dictionnaires latins classiques. C'est un mot inventé pour les besoins de la Philosophie au XIIème siècle. La philosophie "réaliste", par opposition au "nominalisme ", affirme que nos raisonnements ne sont pas seulement jeux de l'esprit et règles opératoires appliquées. Ils portent sur les rapports existant entre vérités expérimentées dans la nature, et, pour certaines, désignées comme axiomes, irréductibles, accessibles directement à l'esprit humain sans intervention d'aucune autorité. On peut ici rappeler que le Réformateur tchèque, Jean Hus, fut brûlé en 1415, par décision du Concile de Constance, pour ses convictions réalistes.

Le problème d'une existence autonome des réels, irréductible à aucune autre, a retardé effectivement la prise de conscience des mathématiciens et philosophes à leur sujet, de Pythagore à Omar Khayyâm. Le point de départ est le fait que l'algorithme d'Euclide appliqué à $\sqrt{2}$ est infini. Comme on le sait, on trouve une démonstration du célèbre théorème du triangle rectangle isocèle dans le "Ménon"



de Platon. Dans un carré de côté 2, donc surface 4, il apparaît que le carré construit sur les diagonales, comme indiqué sur la figure, a pour surface 2, donc côté $\sqrt{2}$.

Reprenons alors l'algorithme d'Euclide : Soit à évaluer $\frac{a}{b}$

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ 0 \leq r_1 < b \end{cases} ; \quad \begin{matrix} b = r_1 q_2 + r_2 \\ 0 \leq r_2 < r_1 \end{matrix} \quad \ldots \quad r_p = r_{p+1} q_{p+2} + r_{p+2}$$

C'est la théorie classique du pgcd, de dire que la suite des restes s'arrête à zéro, le reste précédent étant le pgcd de a et b, ou plus grande partie aliquote commune. Le rapport (a:b) peut alors s'écrire :

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = q_1 \quad \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}} \qquad \text{etc.}$$

Or, pour $\sqrt{2}$, nous avons :

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$$

C'est le développement en fraction continue illimitée qui a historiquement, défini pour la première fois les réels, grâce au génie d'Omar Khayyâm (XIème siècle). Or il est clair que, pour en arriver à cette conception, Omar Khayyâm a dû :

a) franchir l'obstacle épistémologique, constitué par un monde intellectuel clos, et au surplus sanctionné par la volonté de Dieu.

b) donner un commencement de définition opératoire généralisant la pratique reçue.

Sur le point a), il s'agit bien de ce qui deviendra la controverse entre réalistes et nominalistes. Citons "les Mathématiques Arabes"de Youchkevitch p. 87 : "A l'instar des Anciens, Al-Ḫayyâm entend par nombre, au sens propre du terme, un ensemble d'unités indivisibles. Il soulève en même temps la question du lien existant entre les notions de rapport et de nombre. Ce problème est, selon les termes d'Al-Ḫayyâm, de nature philosophique, et de ce fait n'est pas étudié par les géomètres : "Un rapport de grandeurs peut-il être par essence un nombre ou est-il seulement accompagné d'un nombre, ou encore le rapport est-il lié à un nombre non par nature, mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport est-il lié par nature à un nombre et n'a-t-il besoin de ce fait de rien d'extérieur ?"
Tout en laissant de côté l'aspect "philosophique" de cette question,

Al-Ḫayyâm considère comme nécessaire d'introduire dans les mathématiques une unité indivisible et une nouvelle catégorie de nombres, qui correspondent à des rapports quelconques de grandeurs. En démontrant la première propriété des rapports composés, il choisit une certaine unité et suppose que son rapport avec une grandeur auxiliaire G est égal au rapport de A avec B . Cette grandeur G , dit-il, nous allons "la concevoir non comme une ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres, mais non aux nombres absolus et véritables, car le rapport de A et de B peut souvent ne pas être mesurable numériquement, c'est-à-dire qu'on peut ne pas trouver deux nombres dont le rapport soit égal à ce rapport." C'est ainsi, explique Al-Ḫayyâm que procèdent les calculateurs et les arpenteurs qui parlent de la moitié ou d'une autre partie d'une unité supposée indivisible ou d'une racine de cinq ou de dix, etc. L'unité choisie est en tout cas divisible, et "la grandeur G , qui est une grandeur arbitraire, est considérée comme un nombre au sens indiqué."

b) Considérons le développement d'un rapport a/b par l'algorithme d'Euclide. a'/b' lui sera supérieur si $q_1 < q'_1$ ou $q_2 > q'_2$, ou $q_{2n+1} < q'_{2n+1}$, ou $q_{2n} > q'_{2n}$; tous les quotients précédant les premiers inégaux étant les mêmes. Cette définition de l'inégalité s'étend aux fractions continues illimitées.

L'inconvénient de cette définition est de ne pas se prêter directement à une pratique du calcul. Elle est cependant la première dans l'histoire, à étendre consciemment le domaine d'existence d'une notion grâce à une règle de calcul se prêtant à une telle extension.

Nous utiliserons désormais les développements décimaux. On peut, par exemple, définir les réels à partir des développements décimaux non périodiques. En effet, la structure d'anneau des décimaux se prête aisément à cette méthode.

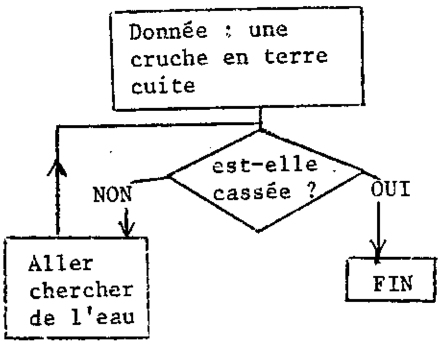
II POUR UNE AXIOMATIQUE ASSISTÉE DES RÉELS

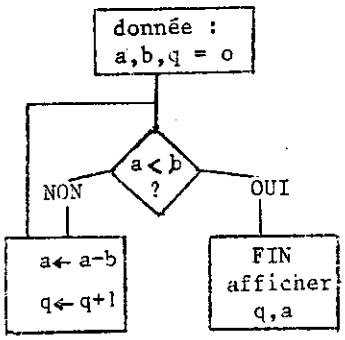
A - Les calculatrices, et particulièrement les miniordinateurs, rendent à la pédagogie en Analyse ce qu'apportaient autrefois à la géométrie les structures riches, difficilesà traduire de façon univoque en axiomes.

Il était difficile de fonder rigoureusement la distinction entre évidence graphique et évidence démontrée. Pourtant, grâce à une longue pratique, un accord s'établissait, et l'esprit de finesse accomplissait le reste.

De même l'évidence d'une suite apparemment convergente sur la calculatrice peut tromper. La critique nécessaire jouera ici un rôle analogue.

Tous les algorithmes utilisés sont semblables, et se ramènent à celui défini par le proverbe : "Tant va la cruche à l'eau, qu'à la fin elle se casse."





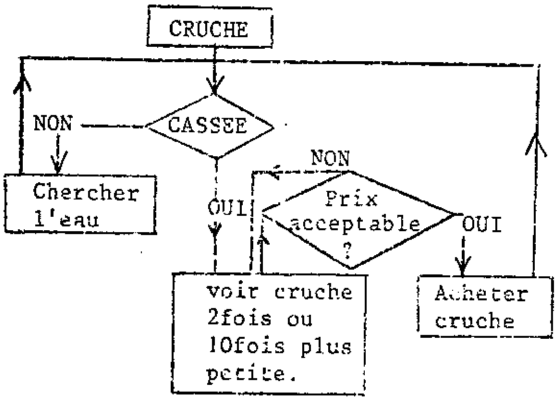
Programme sur HP 25 N° 1

0	RCL 1	Mise en route
STO 2	STO-0	frapper
RCL 1	1	dividende
RCL 0	STO+2	STO 0
Pause	RCL 2	frapper
Pause	Pause	diviseur
Pause	Pause	STO 1
x < y	Pause	R/S
GTO 00	GTO 03	

Nous donnons ici l'algorithme de la division sous sa forme la plus élémentaire. La distribution se poursuit tant que $a \geq b$.

Identique est l'algorithme de la recherche du pgcd, ou d'Euclide, la question de savoir si un nombre est premier ou non; le calcul de la valeur numérique d'un polynôme par l'algorithme de Hörner,le calcul d'une valeur moyenne (donc d'une intégrale par sommes de Riemann); le calcul de la somme d'une suite.

Dans la théorie des réels, on suppose les unités divisibles; en somme, on achète des cruches, éventuellement plus petites, ou moins chères. Ce mécanisme se transpose immédiatement pour la division. La réalisation proposée donne successivement les décimales du quotient.



Programme N° 2

0	f FIX 9	↓	$x < y$	Pause	GTO 20
STO 2	RCL 1	STO 1	GTO 33	Pause	
1	RCL 4	RCL 4	RCL 1	Pause	
0	x	STOx5	STO−0	GTO 20	
STO 4	RCL 0	GTO 09	RCL 5	RCP 4	
1	$x < y$	RCL 1	STO+2	STO ÷ 1	
STO 5	GTO 20	RCL 0	RCL 2	STO ÷ 5	

Mise en route
GTO 00
dividende
STO 0
diviseur
STO 1
R/S

On pourra prolonger l'intérêt de ce programme avec des divisions par 11 ou 37 suggérant les développements périodiques des fractions (honni soit qui a pensé à démonstration!).

Au même algorithme se rattache la recherche de la racine n^e d'un nombre.

Programme N° 3

					Mise en route
0	RCL 1	STO x 1	Pause	GTO 19	f FIX 9
STO 2	RCL 4	GTO 08	Pause	RCL 1	GTO 00
1	y^x	RCL 5	Pause	STO−2	Radicande
0	RCL 0	STO + 1	RCL 4	GTO 17	STO 0
STO 5	$x < y$	RCL 1	y^x		ordre de la
1	GTO 17	STO+2	RCL 0		racine STO 4
STO 1	RCL 5	RCL 2	$x \geq y$		

On suivra, dans les programmes 2 et 3, la marche des valeurs approchées par défaut et par excès.

B - Axiome d'existence des réels.
Tout bon ouvrage d'Analyse montre qu'on peut construire les réels à partir des suites de rationnels, et même des suites de décimaux.
Nous y renvoyons nos lecteurs.

III LOGARITHMES

A - Nous suivons la démarche de Briggs, 1624. Le calcul numérique est très simple. On calcule les logarithmes des nombres entre 1 et 10, par la règle : $\log 10 = 1$, $\log a + \log b = \log ab$. Donc : $\log 1 = 0$; $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$; $\log \sqrt{\sqrt{10}} = \frac{1}{4}$, etc .

Soit, par exemple, à calculer le logarithme de 7 .

$1 + x_o$	$= 10$	1
$1 + x_1$	$= 3,162277660$	0,5
$1 + x_2$	$= 1,778279410$	0,25
$1 + x_3$	$= 1,333521432$	0,125
$1 + x_4$	$= 1,154781985$	0,0625
$1 + x_5$	$= 1,074607828$	0,03125
$1 + x_6$	$= 1,036632928$	0,015625
$1 + x_7$	$= 1,018151722$	0,0078125
$1 + x_8$	$= 1,009035045$	0,00390625
$1 + x_9$	$= 1,004507364$	0,001953125
$1 + x_{10}$	$= 1,002251148$	0,000976563
$1 + x_{11}$	$= 1,001124941$	0,000488281
$1 + x_{12}$	$= 1,000562312$	0,000244141
$1 + x_{13}$	$= 1,000281116$	0,000122070

$$1 + x_1 < 7 < 1 + x_o$$

$$7 = (1 + x_3) \times \frac{7}{3,16...} = (1 + x_1) \times \underbrace{2,213594362}_{y_1}$$

$$(1 + x_2) < y_1 < 1 + x_1$$

$$y_1 = (1 + x_2) \times \frac{y_1}{1,77...} = (1 + x_2) \times \underbrace{1,244795587}_{y_2}$$

$$(1 + x_4) < y_2 < 1 + x_3$$

$$y_2 = (1 + x_4) \times \frac{y_2}{1,15...} = (1 + x_4) \times \underbrace{1,077948568}_{y_3}$$

$$y_3 = (1 + x_5) \times \frac{y_3}{1,074...} = (1 + x_5) \times \underbrace{1,003108799}_{y_4}$$

$$y_4 = (1 + x_{10}) \times \frac{y_4}{1,002...} = \underbrace{1,000855725}_{y_5}$$

$$y_5 = (1 + x_{12}) \times \frac{y_5}{1,0005...} = \underbrace{1,000293248}_{y_6}$$

De l'inégalité :

$$y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ (1 + x_{13}) < 7 < y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ (1 + x_{12})$$

on déduit, en prenant la somme des logarithmes extrêmes :

$$\boxed{0,845092 < \log 7 < 0,845214}$$

La calculatrice HP 25, pour log 7, donne la valeur 0,845098.

Briggs, dans l'enthousiasme de la découverte, poursuivait les calculs jusqu'à la 46ème décimale. On procèderait évidemment de même pour trouver réciproquement le nombre ayant pour logarithme 0,845092.

Programme n° 4. Recherche du logarithme décimal. Ce programme est construit sur le même algorithme que la division des entiers à 10^{-n} près par défaut. Pour la commodité spectaculaire, on a raisonné non pas sur les racines carrées, mais sur les racines dixièmes.

0	0	x < y	RCl 0	STO 5
STO 1	STO:6	GTO 22	RCl 5	RCl 6
1	STO 5	RCl 6	x < y	STO x 3
STO 2	RCL 2	STOx0	GTO 33	GTO 22
STO 3	RCL 6	RCl 3	RCl 5	RCl 5
STO 6	:	STO+1	RCl 6	STO : 0
1	RCl 0	GTO 11	y^x	RCl 3
Mise en route :	f FIX 9			STO + 1
	GTO 00			RCl 1
	Nombre			Pause
	STO 0 ; R/S			Pause
				Pause
				GTO 22

B - Problèmes d'Analyse.

Il est naturel de se poser ici un problème

a) de convergence

b) de légitimité.

a) La convergence résulte du fait que, de par sa définition, le logarithme est une fonction croissante. Entre 1 et 10, on peut exprimer le fait que $a' > a$ par la condition $a' = a \times k$ $(1 < k)$, donc : $\log a' = \log a + \log k$.

b) Le résultat obtenu fournit-il une solution effective au problème posé ? Cette question n'est ni plus, ni moins légitime que lors de la définition de $\sqrt{2}$ par les suites croissantes et décroissantes de valeurs approchées par défaut et excès.

Le problème est de savoir si, ayant défini par coupure une certaine valeur C de la fonction, il existe effectivement une valeur c de la variable telle que $f(c) = C$; dans les exemples cités, c étant égal à 2 pour $C = \sqrt{2}$, et 7 pour $C = \log 7$. C'est un théorème classique pour les fonctions continues, dont les exemples avancés introduisent à la démonstration générale.

1°) $\sqrt{2}$. $a_n^2 - 2 < 0$; $a_n'^2 - 2 > 0$. $a_n' - a_n < \varepsilon$.

$$(a_n'^2 - 2) - (a_n^2 - 2) = (a_n' - a_n)(a_n' + a_n) < (a_n' - a_n)(2+2) < 4\varepsilon$$

Les (a_n^2-2) et $(a_n'^2-2)$ forment donc une coupure dont la limite, unique, ne peut être que 0 .

2°) Logarithmes. Considérons la suite x_n définie, d'après le tableau de Briggs, par $1 + x_o = 10$, $1 + x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$

On a $(1 + x)^2 = 1 + 2x_n + x_n^2 = 1 + x_{n-1}$

D'où l'inégalité $x_n < \frac{x_{n-1}}{2}$, $< \frac{x_o}{2^n}$.

Dans le calcul de Briggs, à l'inégalité :

$$\frac{P(y_n)}{7} < 1 \quad , \quad \frac{P'(y_n)}{7} > 1 \text{ , correspond } \log P_n < \log 7 < \log P'_n$$

Avec $\log P'_n - \log P_n = \frac{1}{2^n} = \varepsilon$, $\log 7$ étant par définition la limite de la coupure entre les $\log P_n$ et les $\log P'_n$.

On a dans ces conditions, $P'_n - P_n = P_n(\frac{P'}{P} - 1) = P_n x_n < 7x_o . \varepsilon$

3°) Soit la fonction f définie et continue et croissante. On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$, et on a défini une coupure entre x_n croissants tels que $f(x_n) < 0$, et x'_n décroissants, tels que $f(x'_n) > 0$. Soit X la limite des x_n , x'_n -
$f(x_n) < f(X) < f(x'_n)$. D'après la continuité, sous la condition $|x - X| < \alpha$, $|f(x) - f(X)| < \varepsilon$.

Si $x'_n - X < \alpha$, $f(x'_n) - f(X) < \varepsilon$, donc $f(X) > -\varepsilon$
$|f(x_n) - f(X)| < \varepsilon$, donc $f(X) < \varepsilon$

Donc $f(X) = 0$.

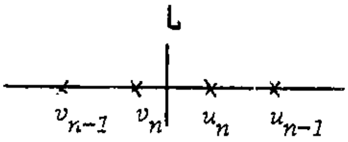
La démonstration s'étend aisément au cas où f n'est pas nécessairement croissante.

4°) Il résulte directement de 2°) que la fonction "antilogarithme" (ou 10^x) est continue et croissante, et de 3°) que la fonction inverse d'une fonction continue croissante est aussi continue croissante.

C - Propriétés analytique des logarithmes.

1°) Nous voyons sur le tableau de Briggs que $x_n \# \frac{x_{n-1}}{2}$. Considérons ainsi la suite $u_n = 2^n x_n$. Comme $x_n < \frac{x_{n-1}}{2}$, cette suite décroît.

Soit encore $v_n = \frac{2^n x_n}{1+x_n}$ $\quad v_{n-1} = \frac{2^{n-1} x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$



$$\frac{2x_n}{1+x_n} > \frac{(1+x_n)^2 - 1}{(1+x_n)^2} \qquad \text{On voit que } v_n > v_{n-1}$$

$$2x_n + 2x_n^2 > 2x_n + x_n^2 \qquad \text{Or } u_n > v_n$$

D'autre part $u_n - v_n = v_n x_n < u_o x_n$

Les u_n et v_n forme donc une coupure définissant une limite L .

Le tableau de Briggs nous donne ici :

$$\begin{vmatrix} v_{13} = 2{,}302260965 \\ u_{13} = 2{,}302908167 \end{vmatrix} \quad \text{La moyenne nous donne } L \# 2{,}30258456$$

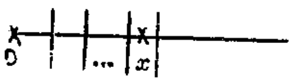
2°) Soit $y_n^p = 2^n[(1+x_n)^p - 1]$, $z_n^p = \frac{2^n[(1+x_n)^p - 1]}{(1+x_n)^p}$

On vérifie par récurrence sur p que

y_n^p tend vers p L en décroissant

z_n^p tend vers p L en croissant

3°) Soit alors une valeur x petite.



$$\frac{p}{2^n} \leq x < \frac{p+1}{2^n} \quad ; \quad \frac{2p}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2p+2}{2^{n+1}}$$

La limite inférieure à $\frac{1}{2^{n+1}}$ près sera $\frac{2p}{2^{n+1}}$ ou $\frac{2p-1}{2^{n+1}}$, et en tout cas double au minimum à chaque partage.

Un partage analogue peut être réalisé avec

$$\frac{y_n^p}{2^n} \leq x < \frac{y_n^{p-1}}{2^n} \quad \text{car} \quad \underline{(1+x_{n+1})^{2p} = (1+x_n)^p} \qquad (E)$$

On a dans ces conditions :

$$\frac{p}{(p+1)L(1+x_n)^{p+1}} < \frac{\log(1+\frac{y_n^p}{2^n})}{\frac{y_n^{p-1}}{2^n}} < \frac{\log(1+x)}{x} < \frac{\log\ 1+\frac{y_n^{p+1}}{2^n}}{\frac{y_n^p}{2^n}} < \frac{p+1}{pL}$$

pour la limite supérieure, ou soit que y_n^p tend vers sa limite en décroissant; et on utilise à gauche la propriété symétrique de z_n^p .

Il résulte de la relation (E) soulignée ci-dessus que p peut être pris arbitrairement grand, l'expression $(1 + x_n)^{p+1}$ restant fixe pour x donné. Donc :

$$\boxed{\frac{1}{L(1+x_n)^{p+1}} \leq \frac{\log(1+1)}{x} \leq \frac{1}{L}}$$

Comme x tend vers 0 avec x,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{L} \neq 0{,}4342945$$

D - Autres systèmes de logarithmes.

Désignons par $10^\alpha = B$ le nombre dont le logarithme est α et par a^α celui dont le logarithme est $\alpha \log a$; et posons :

$1 + X_o = B$	1	α
$1 + X_1 = \sqrt{B}$	0,5	$\frac{\alpha}{2}$

$1 + X_n = \sqrt{1 + X_{n-1}}$		

Il est clair que la définition des logarithmes de base B se fera de la même façon que pour la base 10, et donnera des valeurs proportionnelles aux précédentes. Et nous aurons :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_B (1+x)}{x} = \frac{1}{L} \times \frac{1}{\alpha}$$

La base népérienne des logarithmes est celle pour laquelle $\alpha \neq L = 1$. On peut calculer cette base e d'après le tableau de Briggs

0,4342945	0,0280445	0,0007008
0,25	0,015625	0,0004883
0,1842945	0,0124195	0,0002125
0,125	0,0078125	
0,0592945	0,0046070	ce terme est compris
0,03125	0,0039062	entre les deux derniers
0,0280445	0,0007008	logarithmes de la liste

D'où valeur approchée par défaut : $(1+x_2)\dots(1+x_{11})(1+x_{13}) = 2{,}7177$

et valeur approchée par excès : 2,7184

E - Extension du domaine de définition.

1°) Tout nombre x supérieur à 10 peut s'écrire sous la forme $x' \times 10^n$, d'où le logarithme $n + \log x'$.

2°) A tout nombre $x \in]0, 1]$ on peut faire correspondre son inverse x' : $\log x + \log x' = \log xx' = \log 1 = 0$.

Le reste est affaire de pratique.

SIMPLIFICATIONS MIRACULEUSES EN ARITHMÉTIQUE

Marc BLANCHARD
Lycée - Rochefort sur Mer

Soit la fraction $\frac{266}{665}$, je " simplifie " par 6 : $\frac{26}{25}$, et à nouveau par 6 : $\frac{2}{5}$.

On a bien :

$$\frac{266}{665} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

Plus généralement :

$$\frac{2\,6\,\ldots\,6}{6\,\ldots\,6\,5} = \frac{2}{5}$$ (avec 6 ... 6, représentant n chiffres 6).

Encouragés par ces rapides simplifications, posons-nous le problème.

Pour quels nombres A, T, B dans le système à base x, est-il vrai que :

$$\frac{\overline{A\,T\,\ldots\,T}}{\overline{T\,\ldots\,T\,B}} = \frac{A}{B} \;?$$

$\overline{A\,T\,\ldots\,T}$ est le nombre obtenu en écrivant successivement les chiffres de A, puis n ($\in \mathbb{N}^*$ fixé) fois les chiffres de T (analogue pour $\overline{T\,\ldots\,T\,B}$)

Une fois pour toutes A, T, B sont supposés non-nuls. Vérifions tout d'abord le lemme :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\overline{A\,T\,\ldots\,T}}{\overline{T\,\ldots\,T\,B}} = \frac{A}{B} \text{ équivaut à } \frac{\overline{A\,T}}{\overline{T\,B}} = \frac{A}{B}}$$

Il suffit bien sûr de montrer l'implication :

Si $\frac{\overline{A\,T}}{\overline{T\,B}} = \frac{A}{B}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\overline{A\,T\,\ldots\,T}}{\overline{T\,\ldots\,T\,B}} = \frac{A}{B}$

Supposons que T possède τ $(\in \mathbb{N}^*)$ chiffres

et que B possède β $(\in \mathbb{N}^*)$ chiffres

Alors : $\dfrac{\overline{A\,T}}{\overline{T\,B}} = \dfrac{A}{B}$ équivaut à $\dfrac{A\,x^\tau + T}{T\,x^\beta + B} = \dfrac{A}{B}$, soit à :

$$A\,B(x^\tau - 1) + B\,T - A\,T\,x^\beta = 0 \qquad (1)$$

En outre :

$$\frac{\overline{A\,T \ldots T}}{\overline{T \ldots T\,B}} = \frac{A}{B} \quad \text{équivaut à} \quad \frac{A\,x^{n\tau} + T(1 + x^\tau + \ldots + x^{(n-1)\tau})}{T\,x^\beta(1 + x^\tau + \ldots + x^{(n-1)\tau}) + B} = \frac{A}{B}$$

soit à : $$(x^{n\tau} - 1)\,[A\,B(x^\tau - 1) + B\,T - A\,T\,x^\beta] = 0 \qquad (2).$$

Il est immédiat que l'égalité (1) entraîne l'égalité (2). On en déduit donc leur équivalence.

Pour résoudre ce problème, il suffit de chercher A, T, B naturels non nuls tels que :

$$\frac{\overline{A\,T}}{\overline{T\,B}} = \frac{A}{B}$$

Etudions le problème lorsque $\beta = \tau$. B et T ont alors le même nombre de chiffres et (1) devient :

$$A\,B(x^\tau - 1) = T\,(A\,x^\tau - B).$$

Supposons que $x^\tau - 1$ divise $A\,x^\tau - B$. Comme $A\,x^\tau - B = A\,(x^\tau - 1) + A - B$, cela équivaut à $x^\tau - 1$ divise $A - B$. Seule possibilité : $A = B$. Alors, d'après (1), nécessairement $A = B = T$, solution banale.

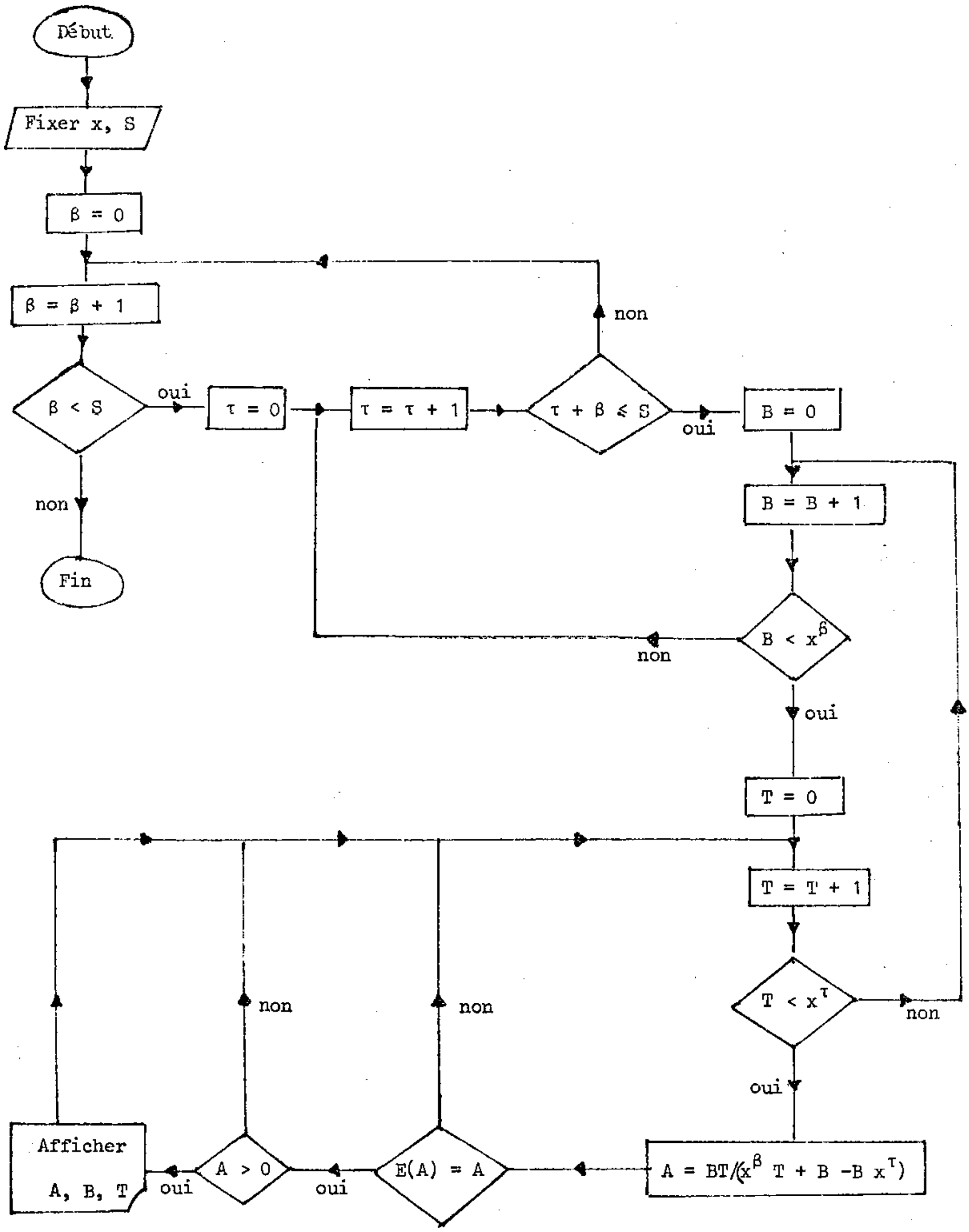
Cette remarque est intéressante dans le cas particulier $\beta = \tau = 1$ et $x = 10$. $(x^\tau - 1 = 9 = 3^2)$.

Pour avoir des solutions non banales, 9 divise $T\,(10\,A - B)$ sans diviser $10\,A - B$. Donc 3 divise T.

On envisage successivement les cas :

- $T = 3$: qui ne donne aucune solution non banale ;
- $T = 6$, on obtient : $\dfrac{26}{65} = \dfrac{2}{5}$ ou $\dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$;
- $T = 9$, on obtient : $\dfrac{19}{95} = \dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{49}{98} = \dfrac{4}{8}$ $(= \dfrac{1}{2})$.

Plus généralement, confions la résolution pratique de ce problème à une calculatrice programmable qui travaillera suivant l'organigramme :



Les résultats suivants ont été obtenus (avec $x = 10$, base décimale).

A	1	2 ... 9	1	2	1	4	10	20 ... 90	7	17	6
B	1	2 ... 9	4	5	5	8	1	2 ... 9	4	5	5
T	1	2 ... 9	6	6	9	9	10	20 ... 90	42	51	54

ensuite :

A	4	36	14	100	200 ...	900	4	67	30	22	167	56
B	7	8	8	1	2 ...	9	3	4	4	4	5	5
T	84	81	84	100	200 ...	900	324	402	405	407	501	504

A	19	14	8	182	133	34	356	134	60	44	23	12
B	5	5	6	7	7	7	8	8	8	8	8	9
T	513	518	648	702	703	714	801	804	810	814	828	972

A	1	2 ...	9	1	8	1	2	1	2	21	3	4	24	49	
B	10	20 ...	90	25	32	40	50	50	56	75	75	80	96	98	etc ...
T	1	2 ...	9	3	3	6	6	9	7	7	9	9	9	9	

On y apprend donc, entre autres, que : $\frac{356\ 801}{8\ 018} = \frac{356}{8}$

Pour être honnête, il faut signaler que dans un premier temps, l'organigramme a été construit sans le test : (A > 0 ?).

Les résultats, outre les précédents, ont été :

A	−2	−1	−4	−14	
B	4	5	5	7	etc ...
T	3	3	4	6	

Ce qu'il faut interpréter ainsi :

$\frac{-2 \times 10 + 3}{3 \times 10 + 4} = \frac{-2}{4}$;

$\frac{-1 \times 10 + 3}{3 \times 10 + 5} = \frac{-1}{5}$ etc ...

ÉTUDIER ET REPRÉSENTER GRAPHIQUEMENT LA FONCTION ... !

Michel DARCHE — École Normale - Blois
Marie-Laure GIORGI - DARCHE — Lycée Pothier - Orléans

Question classique, réponse classique, problème sans surprise, élève sans curiosité... qui mettent en marche la machine bien huilée : ensemble d'études, variations, étude aux bornes, tableau et courbe.

Et pourtant des difficultés, il devrait y en avoir : la courbe ne correspond pas toujours à "l'étude", on la construit point par point après en avoir fait l'étude, il y a des contradictions entre limites et variations,...

Un apprentissage bien huilé de techniques bien précises pour chacun des points de l'étude enlève à l'élève tout esprit critique. Pourquoi réfléchir quand il faut mettre en oeuvre une série de savoir-faire bien au point ? Qui pourrait mettre en cause l'intérêt de ces recettes ayant fait leurs preuves depuis des lustres ?

Devant ce schéma classique et le manque d'intérêt des élèves vis à vis des "études" proposées nous avons essayé d'élargir les types d'activités en classe en recherchant des situations plus variées qui permettent :

. aux élèves, seuls, en groupe ou collectivement, de faire un choix entre différentes procédures et de valider ce choix,
. à l'enseignant de repérer et traiter ces procédures avec les élèves,
. à chacun de mieux cerner le champ des connaissances sur cette notion, son évolution en fonction des problèmes.

Quels sont les objectifs visés ?

Nous conservons, bien sûr, l'objectif terminal lié à l'approche techniciste :

Etre capable d'étudier des fonctions suivant le plan ad-hoc en vue d'en donner une représentation,

et qui débouche sur une série de micro-objectifs associés chacun à une technique (ensemble de définitions, parité, variations, limites...).

Cet objectif savoir-faire sera évalué en fin de séquence mais l'apprentissage n'est pas focalisé sur ce problème.

Nous essayons surtout de permettre à chaque élève de faire des choix et de formuler des procédures de résolution du problème proposé à partir des connaissances acquises précédemment, et

. de vérifier leur validité lors de la résolution du problème,

. d'écarter les procédures fausses et de comparer les procédures correctes.

Ces activités sont proposées individuellement, en petit groupe ou collectivement suivant la possibilité de validation par l'élève, par le groupe ou par la classe et l'enseignant.

L'atteinte de ces objectifs (production, formulation, validation) est à observer (plutôt qu'à avaluer), à organiser en cours d'activité et leur degré d'atteinte remet en cause directement les situations proposées et non les connaissances de l'élève. Il faut permettre à l'élève de structurer ses connaissances et d'en élaborer de nouvelles et non, d'abord, de les mesurer.

Sur la notion précise de "fonction et représentation graphique" il s'agit d'utiliser un des aspects :

. formulation en langage courant,
. expression algébrique ou algorithmique de la fonction
. graphe et relations numériques,
. représentation graphique d'une fonction,
. modèles standards de fonctions et de représentation graphique pour étudier, déterminer ou utiliser le cinquième,
. choisir enfin le modèle fonctionnel et un ou plusieurs des aspects ci-dessus pour étudier un problème plus complexe.

En résumé - objectif pour l'élève :

Développer et organiser ses connaissances sur la notion de fonction.

En résumé - objectif pour l'enseignant :

Organiser les situations d'apprentissage en choisissant
. des situations ouvertes qui permettent à l'élève de faire des choix,
. des situations orientées qui visent l'apprentissage de notions précises,
. des situations révélatrices des acquis, des manques, des besoins de l'élève vis à vis de ces notions,
en choisissant aussi le mode de travail le plus approprié.

Comment s'orienter dans les activités proposées ?

Ces situations expérimentées en classe de Troisième, de Seconde C et T et de Première A et G mais aussi C et D peuvent être reprises de la Troisième à la Terminale. Celles qui sont proposées ici le sont dans l'optique du futur programme de Seconde sous forme d'activités.

Les fonctions, les courbes ont été choisies pour faire apparaître une ou plusieurs difficultés. En dehors de ce souci, leur choix et l'ordre de présentation sont arbitraires. Ce sont ceux que nous avons faits et utilisés dans nos classes.

Pour mieux se repérer dans le choix des situations proposées ou que vous pourriez choisir par ailleurs(*), nous vous proposons une idée de grille qui fait apparaître les points privilégiés ou délaissés à l'issue d'une série de leçons ou même sur une année.

ACTIVITES	Formules	Graphiques	Tableau des nombres	Langage courant	Modèles standards	OBJECTIFS VISES 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Qui valide ?
1. Repos, boulot...		←		X				T,U							Prof et Groupe-Classe
2 Quand la mer monte ?		X		→	X		U			U		T			Elèves
3. Le circuit de vitesse		X		→				T	U			U			Le Groupe-Classe
4. L'auto-journal	X	X	X			T		U	T	U					Groupe-Classe + prof
5. Calculettes	←		X		X	T	T	T			U	U			Le Groupe, Le prof.
6. Pentes et droites	←	X			X		U					T,U			

- [illegible]
- point par point
- vitesse de variations
- SNCF : [illegible] ?
- Droites et Paraboles
- Problème de robinets
- Courbes symétriques

pour le prochain PLOT.

OBJECTIFS SAVOIR-FAIRE — T rouver ou U tiliser

1. Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2.3. Une représentation graphique :
   - d'une fonction standard,
   - d'une autre fonction.
4. La composée de deux applications.
5. La réciproque d'une application.
6. Les propriétés d'une fonction (D_f, parité, périodicité,...).
7. Les variations d'une fonction.
8. Le comportement aux bornes.

D'où viennent ces situations ?

Nous n'avons pas la prétention de faire oeuvre originale, par contre nous souhaiterions qu'un travail exhaustif et collectif puisse se faire sur ce thème (comme sur d'autres) et pour cela que l'on puisse rassembler(*) et communiquer les situations exploitées dans nos classes et les observations faites.

Les situations proposées ci-après proviennent d'un certain nombre de travaux et publications français et étrangers :

FRANCE :
- Travail du Greppo depuis 77 - IREM d'Orléans.
- Publication n°2 du Greppo (1976).
- Travail du groupe de recherche sur la notion de fonction ATP-CNRS - IREM d'Orléans.
- Groupe Inter-IREM d'analyse.
- CUEPP de l'Université de Lille.
- Compte rendu des rencontres GEDEOP de Bourg en Bresse et Vannes et Vannes (1980)

(*) Afin de mettre en place ce travail plus collectif, vous pouvez envoyer vos idées à "GIEA - IREM d'Orléans". Par avance merci.
GIEA = groupe d'intérêt sur l'enseignement de l'analyse.

ANGLETERRE : - The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Claude Janvier, Schell Center, Nottingham.

QUEBEC : - Math-écrit. Ateliers 103. Collège de Breboeuf. Montréal.
- Calcul différentiel et intégral. PERMAMA, cours X.
- Fonctions numériques à l'aide de calculatrice. PERMAMA 3032.

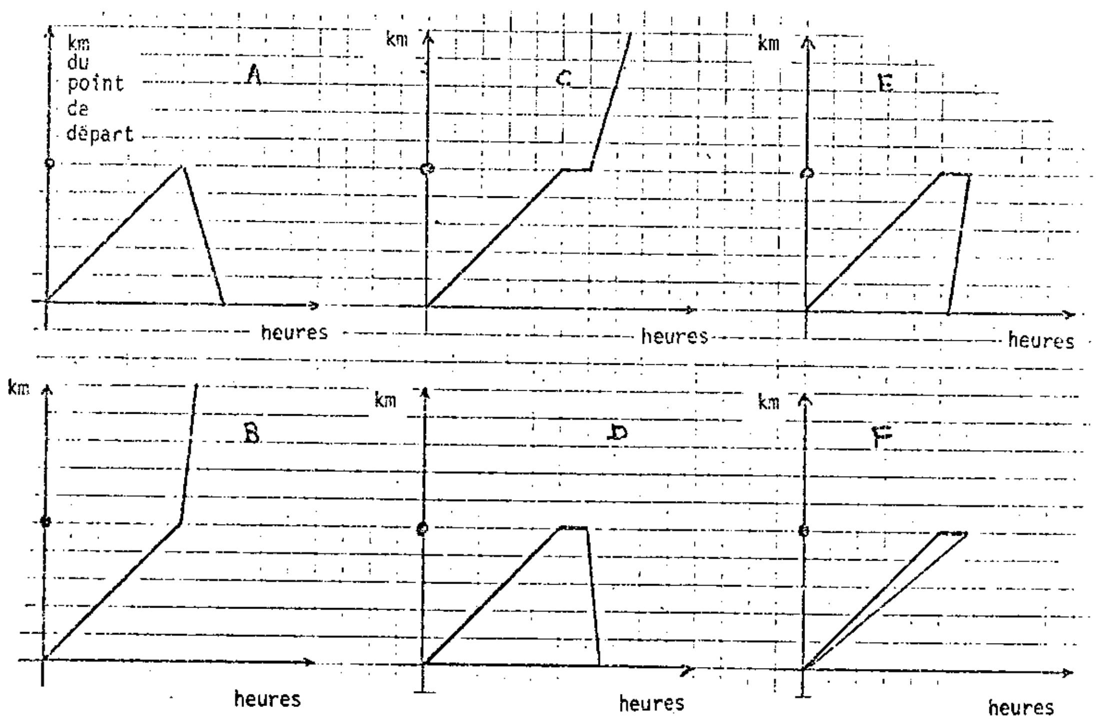
ESPAGNE : - Group zéro : Derivades - Foncions - Exponencial : logaritmica-progressions. (Barcelona).

3ème/2nde **REPOS - BOULOT . . .**

1. LE REPOS

Un promeneur marche pendant cinq heures d'un pas régulier (à la même vitesse). Il s'arrête une heure pour déjeûner puis retourne à son point de départ par la même route en autobus.

Lequel des graphiques "distance du point de départ" en fonction du temps peut représenter sa promenade ?

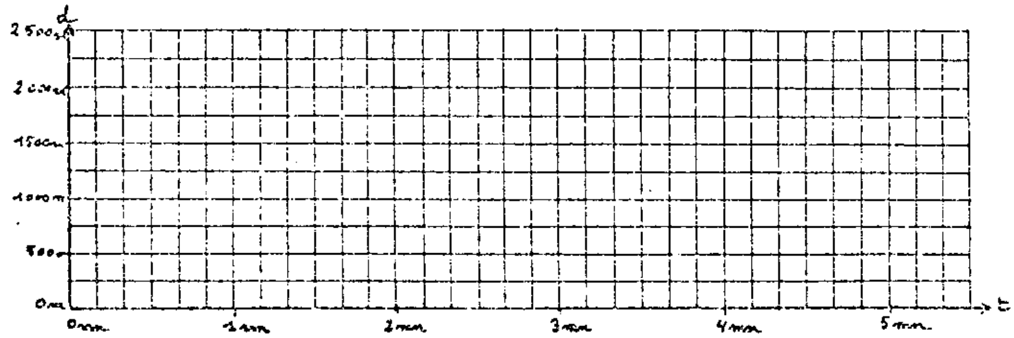


2. LE BOULOT

Pour aller au travail, j'emprunte une route de campagne pendant 1 km, puis après un stop, la rue principale où se trouvent à 500 m et à 1 000 m du stop, deux feux. Le parking de mon entreprise est à 500 m du dernier feu.

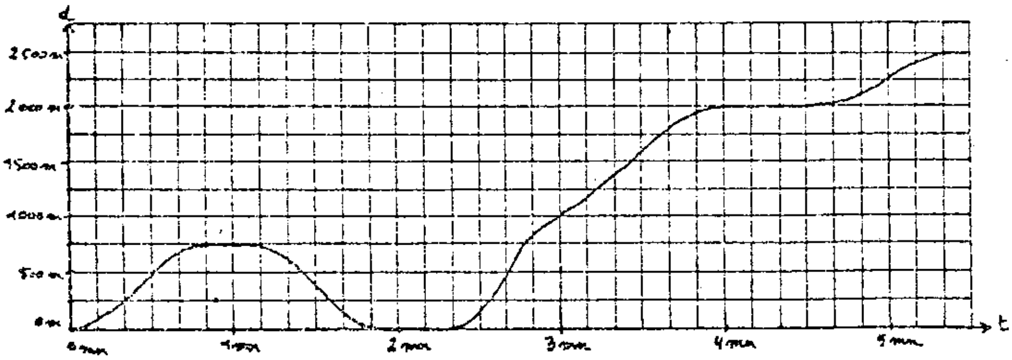
Trajet d'hier : La circulation était fluide, j'ai respecté les limites de vitesse et marqué le stop. Le premier feu est passé au rouge, quand j'arrivais dessus, le deuxième feu était au rouge mais il est passé au vert, avant que je m'arrête. J'ai mis 4 mn 30 s pour faire le trajet.

Tracer la courbe donnant la distance de mon domicile en fonction du temps.



Trajet d'aujourd'hui : La courbe distance est celle tracée ci-dessous.

Inventer l'histoire.



3. COMMENTAIRES

Ces situations sont tirées d'un document américain "Femmes et Maths" pour la Première et du CUEEP de Lille pour la Seconde. Elles peuvent être utilisées en 3è ou 2de individuellement ou collectivement.

Elles permettent d'associer langage courant et langage graphique et de revoir la définition. La recherche de la solution de fonction se fait en utilisant la relation "distance à parcourir en fonction du temps". Le rejet des solutions fausses est intéressant à faire collectivement.

Pour la 1ère situation, on peut ajouter deux informations au texte : vitesse moyenne de 3 km/heure à l'aller, 30 km/heure au retour. Les réponses D (!) et E sont le plus souvent choisies. De plus elles font apparaître une différence entre les filles et les garçons. Matériellement ces graphiques peuvent être polycopiés et distribués (couteux en temps), rétroprojetés ou affichés au tableau.

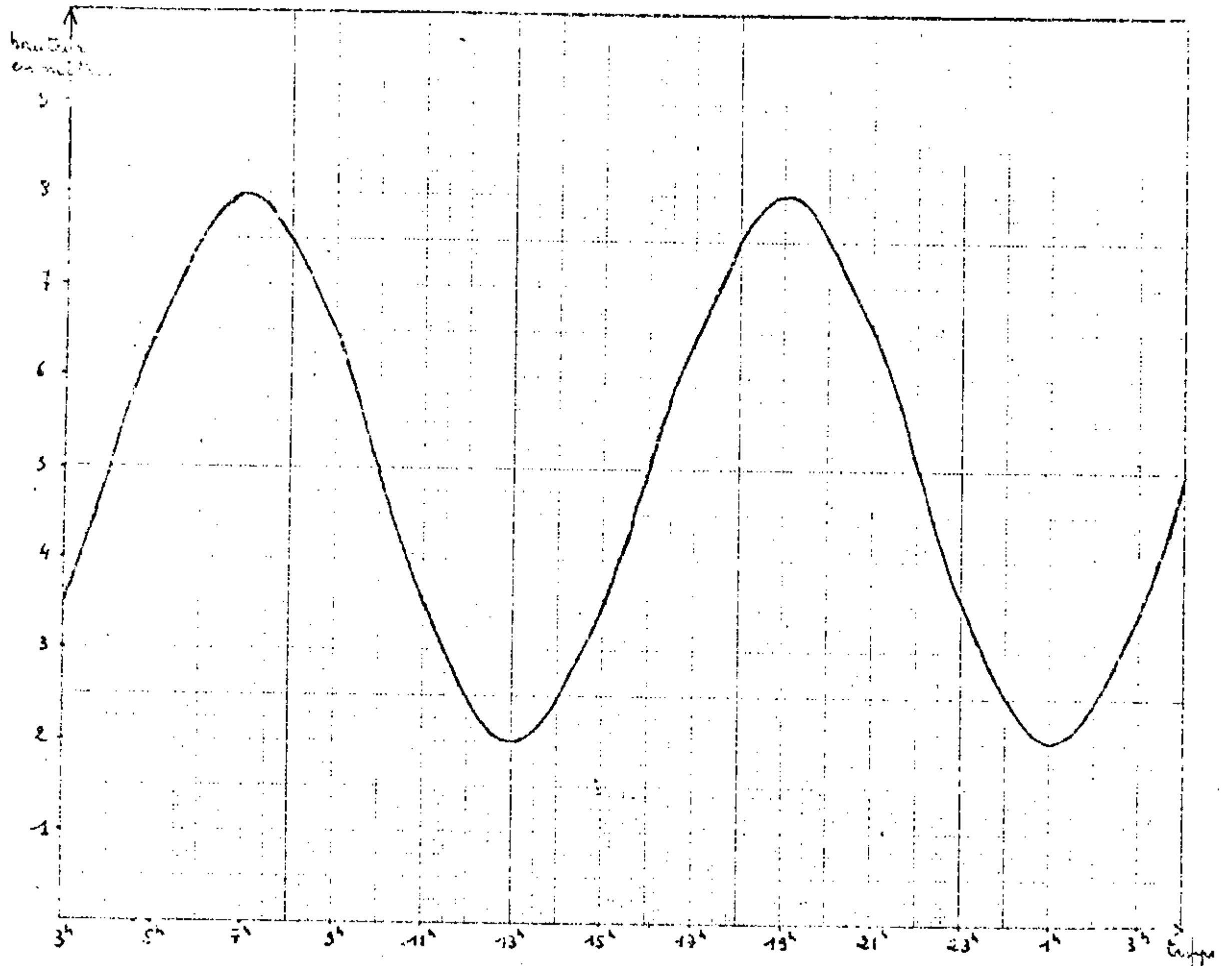
La 2ème situation est plus ouverte et peut se faire individuellement ou en groupe. Elle peut être prolongée en petits groupes ou collectivement par un exercice de communication : un élève racontant aux autres une promenade et la faisant représenter graphiquement.

2nde/1ère **QUAND LA MER MONTE**

Le graphique ci-dessous indique la hauteur d'eau prévue dans un port de Bretagne pour une journée.

. *Quelles informations peut-on recueillir ?*

. *Un bateau ayant un tirant d'eau de 5 mètres se présente au large du port à 8h du matin pour livrer sa cargaison.*
Que peut-on lui proposer ?



COMMENTAIRES

Cette situation s'inspire du travail réalisé par le groupe GEDEOP du Morbihan "La pêche ; La mer" in Bulletin APMEP n° 319 p.411.

Elle vise la lecture de courbe, le repérage des extrêma et la périodicité. La résolution graphique d'équations du type $f(x) = 5$ et d'inéquations du type $f(x) \geqslant 5$, c'est-à-dire surtout un travail sur la relation réciproque f^{-1}.

Le questionnement se veut ici ouvert mais il peut être plus précis :
- *quelles sont les heures de pleine mer, de basse mer ?*
- *quelle est la différence des niveaux de l'eau entre 10h et 12h ?*
- *entre quelles heures la différence de niveaux est-elle maximum ?*

- à quelles heures la marée est-elle montante ? descendante ?

Pour le bateau :

- à quelle(s) heure(s) peut-il entrer dans le port ?

- à quelle(s) heure(s) doit-il en sortir ?

Matériellement vous pouvez, là encore, opérer comme pour la situation précédente.

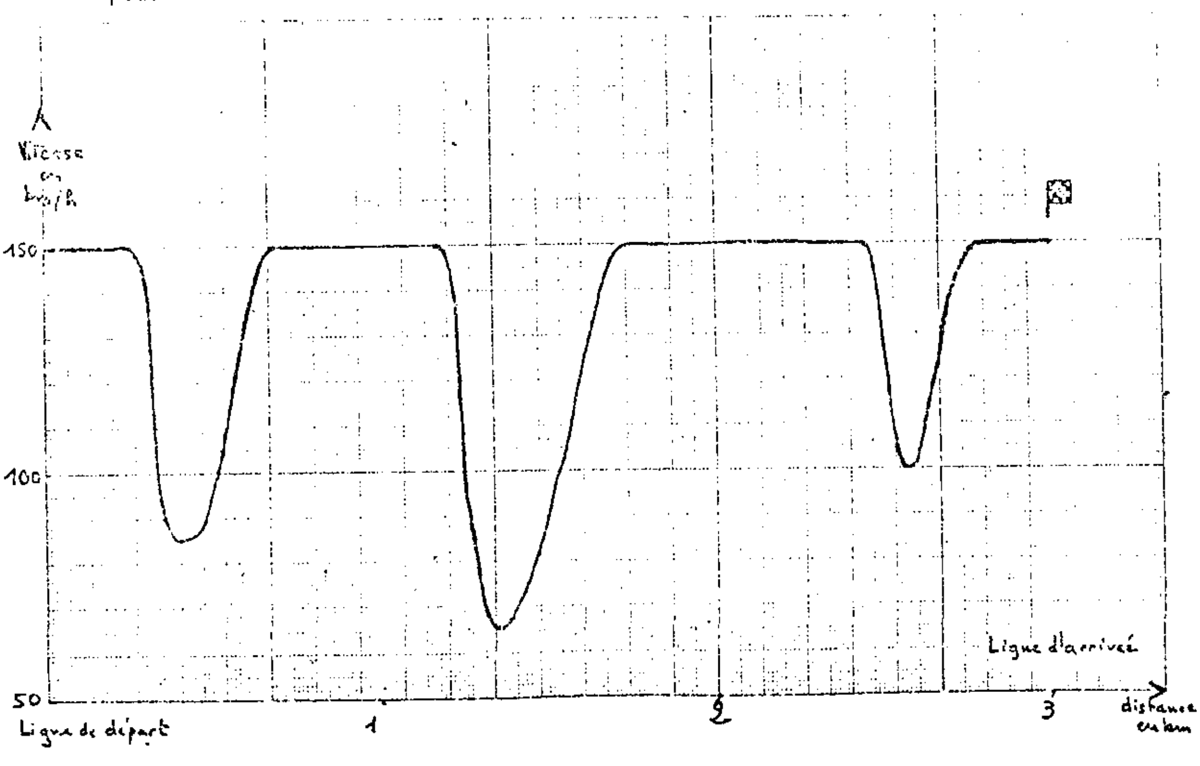
La validation des réponses est faite collectivement par d'autres élèves ou par l'enseignant à l'aide du graphique.

Cette situation utilisée en 3ème et en 2nde peut être prolongée (ou uniquement utilisée) en 2nde et 1ère par un travail sur les variations et la vitesse de variation. Pour cela nous vous renvoyons à la "règle des douzièmes" citée par le groupe GEDEOP du Morbihan. Il suffit de demander aux élèves de mesurer et comparer les variations d'hauteur d'eau d'heure en heure (on obtient une suite proportionnelle à la suite 1,2,3,3,2,1).

2nde/1ère LE CIRCUIT DE VITESSE

Le graphique donne la vitesse d'une voiture de course sur un circuit sans côte de 3km. Les vitesses sont mesurées entre la fin du 2ème tour et la fin du 3ème tour.

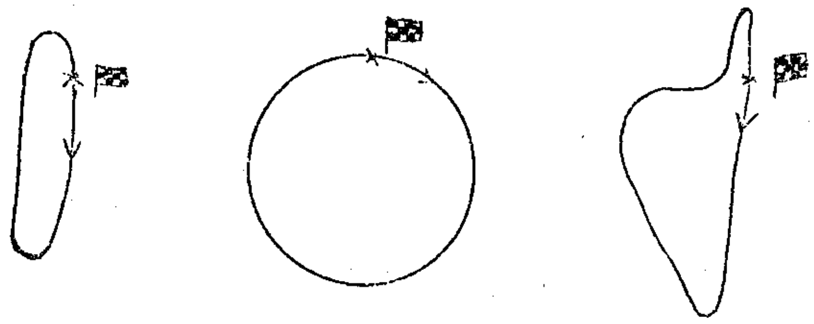
- quelles informations peut-on tirer de ce graphique ?
- pouvez-vous dessiner le circuit ?



PROLONGEMENT

Voici trois circuits de 5 km.

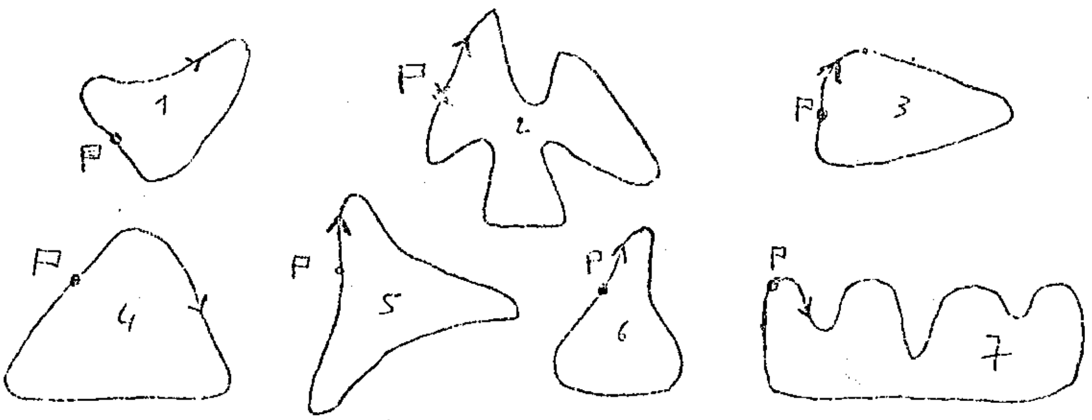
Pouvez-vous dessiner pour chacun d'eux le graphique de vitesse d'une voiture de course plafonnant à 200 km/h en ligne droite.



COMMENTAIRES

Cette situation est tirée de la thèse de Claude JANVIER Schell Center. Elle a été utilisée en 2nde et 1ère et donne des réponses étonnantes et intéressantes quant à l'exploitation.

*Ici encore une différence entre les réponses des filles et des garçons est observée. Les réponses des garçons se rapprochent plus souvent du bon circuit (3,4,5 et 6) que les filles qui .... dérapent dans les virages (2 et 7)**



Les informations sont fournies sur le nombre de virages, les vitesses maximum et minimum, la vitesse à tel ou tel kilomètre, le temps de ralentissement, d'accélération, de plein régime...)

Des précisions sur la ligne de départ et le sens de parcours peuvent être apportées. Tous ces éléments permettent de rejeter les réponses fausses.

Matériellement on procède comme pour les exemples précédents. Les élèves travaillant individuellement, le prof recueille et redessine les réponses au tableau et les fait analyser par les élèves. On peut aussi fermer l'exercice en fournissant les 7 circuits et en demandant aux élèves de trouver le bon et d'indiquer pourquoi ils rejettent les autres.

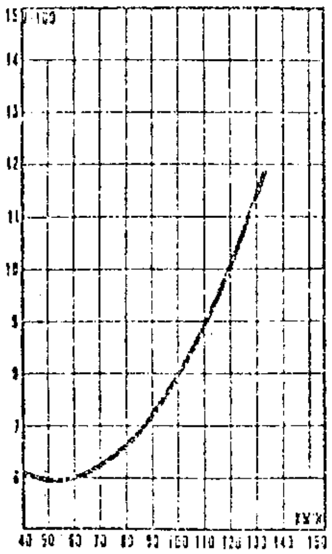
Avis de recherche : Recherchons situations graphiques qui permettent aux filles de réussir aussi bien ou mieux. MLD.

2nde/1ère/Tle AUTO - JOURNAL

Pour tester l'accélérateur d'une voiture départ arrêté, l'Auto Journal enregistre, simultanément la vitesse en fonction du temps et de la distance (espace). Elle fournit de plus la consommation de la voiture à vitesse constante.

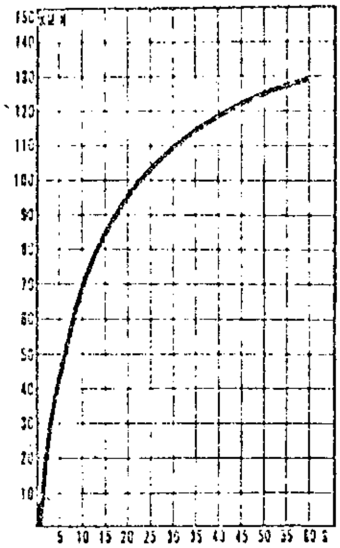
Ces informations sont données sous forme de courbes et de tableaux de nombres

CONSOMMATION



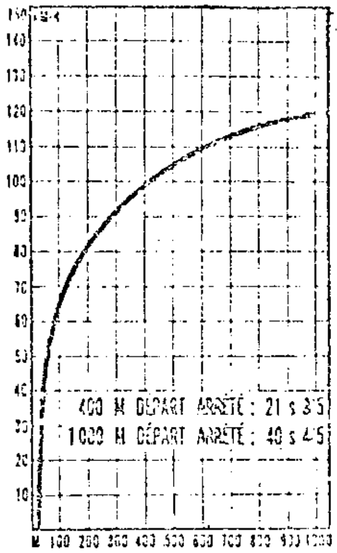
Roulant à vitesse constante, à un régime moteur stabilisé avec le Variomatic sur la plus grande démultiplication, nous avons relevé une consommation aux 100 km de 6 l à 40 km/h, 5,95 l à 50 km/h, 5,95 l à 60 km/h, 6,15 l à 70 km/h, 6,55 l à 80 km/h, 7,1 l à 90 km/h, 7,9 l à 100 km/h, 8,8 l à 110 km/h, 9,9 l à 120 km/h, 11,2 l à 130 km/h, 11,8 l à 134,5 km/h.

ACCELERAT. VIT./TEMPS



Avec deux personnes à bord, accélérateur au plancher, nous avons atteint 40 km/h en 4 s 5/10, 50 km/h en 6 s, 60 km/h en 7 s 8/10, 70 km/h en 10 s, 80 km/h en 13 s, 90 km/h en 17 s, 100 km/h en 22 s, 110 km/h en 30 s, 120 km/h en 42 s.

ACCELERAT. VIT./ESPACE



Nous avons obtenu 66 km/h aux 100 m, 82 km/h aux 200 m, 92 km/h aux 300 m, 99,5 km/h aux 400 m, 105,5 km/h aux 500 m, 110 km/h aux 600 m, 113 km/h aux 700 m, 116 km/h aux 800 m, 118 km/h aux 900 m, 119,5 km/h aux 1 000 m.

1. Pouvez-vous trouver la relation distance/temps

   a) à partir du tableau de nombres ?

   b) à partir des courbes ?

2. En général ces relations ne correspondent pas à des formules mathématiques. Cependant, en première approximation, pendant les 60 premières secondes et les 1000 premiers mètres une voiture "CXY" satisfait à la formule $d = 4\,t^{15}$ où d est la distance en mètres et t le temps en secondes.

   Pouvez-vous tracer les courbes vit/temps et vit/espace de cette voiture ?

COMMENTAIRES

Cette situation est tirée des travaux du CUEEP de Lille et du GREPPC d'Orléans.

<u>La 1ère activité</u> vise à faire composer des applications à partir de 2 courbes en montrant que les tableaux de nombres ne sont pas toujours suffisants et ne donnent qu'un encadrement.

Le cheminement pourrait être :

- *faire construire les tableaux de nombres vit/temps, vit/espace,*
- *à partir des tableaux de nombres faire apparaître l'imprécision de la composée,*
- *à partir des courbes données même problème,*
- *reconstruire les deux courbes sur papier millimétré,*
- *faire un calcul et une construction plus précis.*

On peut prolonger cette activité et reposer le même problème pour une autre voiture en ne fournissant que les données numériques.

CONSOMMATION

■ Roulant à vitesse constante, en quatrième, avec l'accélérateur calé, nous avons relevé une consommation aux 100 km de 5,05 l à 40 km/h ; 5,25 l à 50 km/h ; 5,55 l à 60 km/h ; 5,9 l à 70 km/h ; 6,3 l à 80 km/h ; 6,9 l à 90 km/h ; 7,65 l à 100 km/h ; 8,6 l à 110 km/h ; 9,95 l à 120 km/h ; 11,6 l à 130 km/h.

ACCELERAT. VIT./TEMPS

■ Avec deux personnes à bord, en utilisant à fond les intermédiaires, nous avons atteint : 40 km/h en 4 s 3/10 ; 50 km/h en 5 s 6/10 ; 60 km/h en 7 s 5/10 ; 70 km/h en 9 s 5/10 ; 80 km/h en 12 s 3/10 ; 90 km/h en 15 s 6/10 ; 100 km/h en 19 s 8/10 ; 110 km/h en 25 s 5/10 ; 120 km/h en 33 s ; 130 km/h en 45 s.

ACCELERAT. VIT./ESPACE

■ Nous avons obtenu : 66,5 km/h aux 100 m ; 84 km/h aux 200 m ; 95 km/h aux 300 m ; 104 km/h aux 400 m ; 110 km/h aux 500 m ; 114,5 km/h aux 600 m ; 118,5 km/h aux 700 m ; 121,5 km/h aux 800 m ; 124,5 km/h aux 900 m ; 127 km/h aux 1 000 m.

<u>L'activité 2</u> correspond au programme de 1ère ou Tle. Là encore, après dérivation, il s'agit de retrouver la composée. On peut modifier le point de départ en donnant la relation vit/temps (par ex : $v = 10\sqrt[3]{t}$) ou vit/distance (par ex : $v = 6\,d^{0,25}$).

On peut aussi démarrer en demandant aux élèves de trouver une formule correspondant approximativement aux données courbes et tableaux de l'une des relations.

3ème à Tle CALCULETTES

Dans cette calculatrice sont programmées des fonctions. Essayez de décrire ces fonctions en demandant le moins d'informations possible à la machine. Pour obtenir l'image d'un nombre par la fonction recherchée, tapez votre nombre puis R/S. Si le nombre n'a pas d'image la machine affiche ERREUR.

COMMENTAIRES

Cette situation peut être utilisée de la 3ème à la Terminale suivant les fonctions étudiées. Elle se fait en petits groupes avec synthèse collective.

On peut prendre des fonctions pré-programmées ou des fonctions programmées comme celles qui sont indiquées ci-après.

Une même fonction pourra être recherchée à différents niveaux avec différentes approches suivant la connaissance qu'ont les élèves des fonctions et en particulier des fonctions standards.

Quelque soit le niveau il peut être intéressant de faire chercher des fonctions non-standards ou qui ne se définissent pas par une ou plusieurs formules.

L'objectif est ici de faire utiliser les modèles standards pour certaines fonctions et de faire trouver des descriptions inhabituelles pour d'autres, par exemple formule récurrente, représentation graphique (peu utilisée par les élèves pour cet exercice).

Un autre objectif est la validation : 2 étapes.

1) *Lorsque le groupe pense avoir trouvé mais que la réponse est fausse ou incomplète le prof peut lui demander de vérifier en recherchant l'image de tel ou tel nombre.*
2) *Lorsque le groupe a trouvé et qu'il pense avoir trouvé, après une dernière vérification, lui faire dire que l'algorithme de calcul trouvé est correct sur l'ensemble des nombres essayés mais peut être pas sur d'autres.*

VARIANTE

Si l'on ne dispose pas de calculatrices programmables et programmées, on peut malgré tout utiliser cette situation mais de façon différente.

Chaque groupe, à son tour, demande au prof. l'image d'un nombre. Celui-ci inscrit le couple au tableau et enregistre les hypothèses sur la nature de la fonction.

Cette utilisation de la situation permet un travail plus intéressant, car plus collectif, sur la validation des hypothèses formulées et sur les procédures utilisées.

EXEMPLES DE PROGRAMMES DE FONCTIONS POUR HP.
[illegible]
(Pour obtenir une image tapez votre nombre puis R/S) pour étudier la $n^{\text{ième}}$ fonction: Avec la HP 29 C tapez GTO n — Avec la HP 25

HP 29 C

1	g LBL 1	18	↑	35	2	52	STO 1	69	↑	86	1
2	R/S	19	f INT	36	x	53	R↓	70	3	87	GTO 4
3	3	20	-	37	3	54	2	71	↑		
4	x	21	g x ≠ 0	38	-	55	f y^x	72	2		
5	2	22	GTO 3	39	g $\frac{1}{x}$	56	RCL 1	73	÷		
6	-	23	R↓	40	7	57	-	74	x ≶ y		
7	GTO 1	24	2	41	x	58	GTO 5	75	f y^x		
8	g LBL 2	25	x	42	3	59	g LBL 6	76			
9	R/S	26	3	43	+	60	R/S	77	GTO 7		
10	↑	27	+	44	2	61	f COS	78	g LBL 8		
11	x	28	GTO 3	45	÷	62	2	79	3		
12	4	29	g LBL 4	46	GTO 4	63	g 10^x	80	x		
13	+	30	R/S	47	g LBL 5	64	x	81	2		
14	GTO 2	31	g x > 0	48	R/S	65	f INT	82	-		
15	g LBL 3	32	GTO 8	49	↑	66	GTO 6	83	g ABS		
16	R/S	33	g x = 0	50	↑	67	g LBL 7	84	GTO 4		
17	↑	34	GTO 9	51	g ABS	68	R/S	85	g LBL 9		

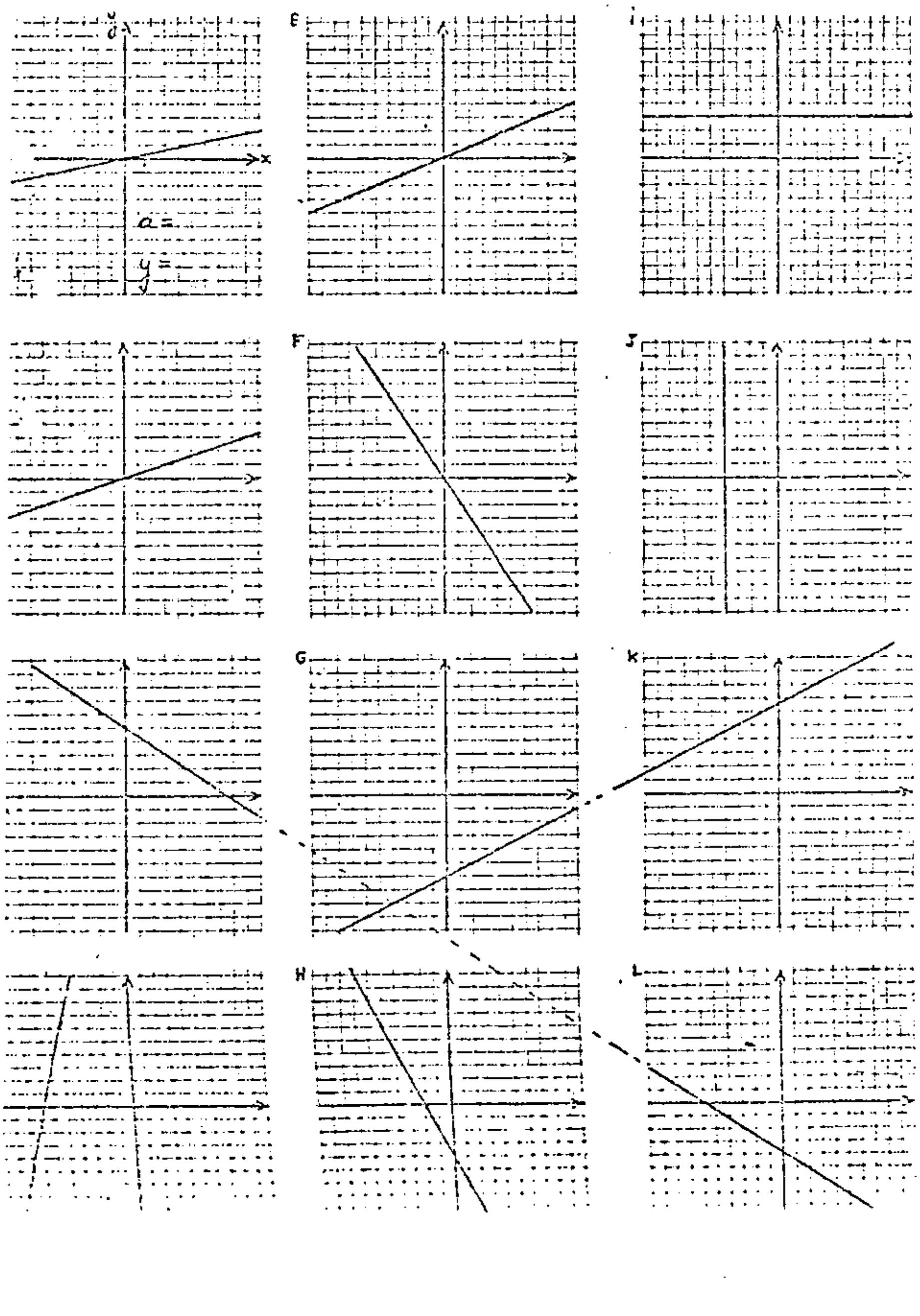
HP 25

1	GTO 06	18	GTO 12
2	GTO 12	19	R↓
3	GTO 25	20	2
4	GTO 35	21	x
5	GTO 42	22	3
6	R/S	23	+
7	↑	24	GTO 12
8	x	25	R/S
9	4	26	↑
10	+	27	↑
11	GTO 06	28	g ABS
12	R/S	29	STO 1
13	↑	30	R↓
14	↑	31	g x^2
15	f INT	32	RCL 1
16	-	33	-
17	g x ≠ 0	34	GTO 25

3ème/2nde PENTES ET DROITES

1. Lorsque c'est possible

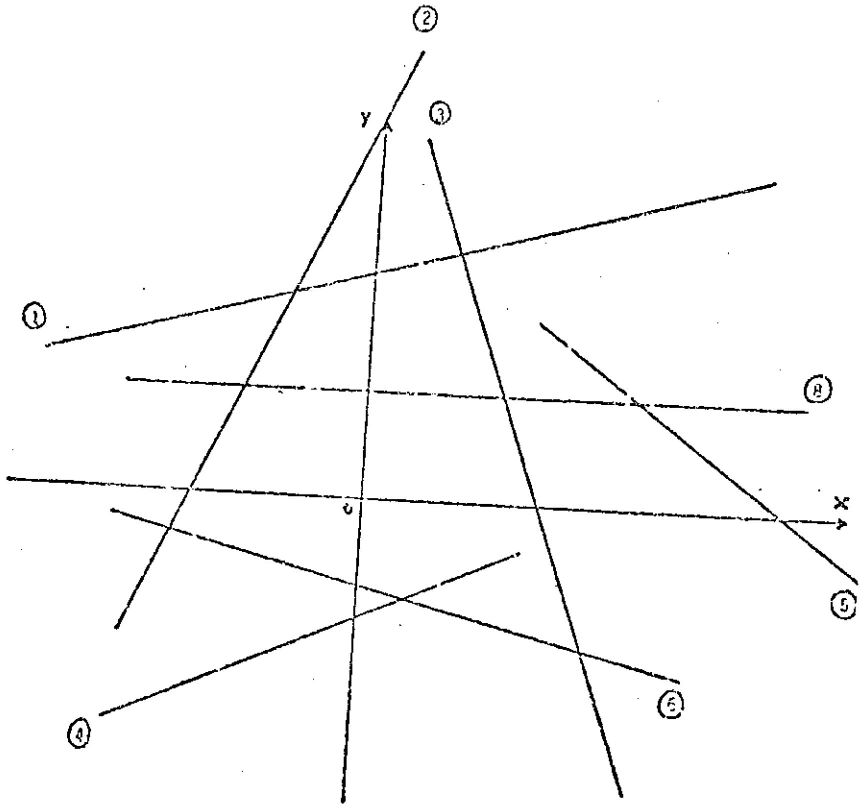
- indiquez le sens de variation des fonctions représentées,
- ordonnez ces droites suivant l'ordre de leurs coefficients directeurs,
- trouvez une équation cartésienne de ces droites.



? 25 tapez GTO ∅ n

5 R/S
6 f COS
7 2
8 g 10^x
9 x
0 f INT
1 GTO 35
2 R/S
3 ↑
14 RCL 5
15 x ≷ y
46 f y^x
47 GTO 42

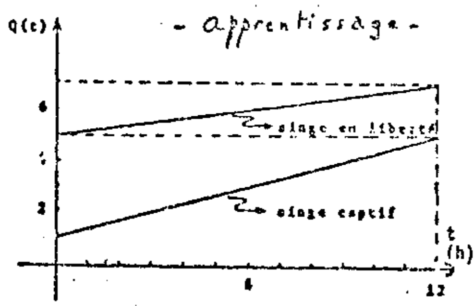
2. - Pouvez-vous indiquer les droites qui ont un coefficient directeur positif ?
   - Pouvez-vous ordonner les coefficients directeurs de ces droites ?



3. <u>Le Q.I. d'un singe !</u>

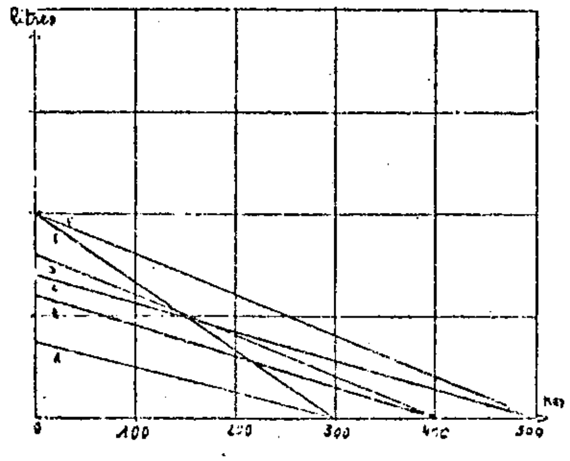
   Un psychologue étudie les capacités d'apprentissage de deux singes : L'un captif (C), l'autre en liberté (L). Pour cela, il mesure le nombre Q(t) d'habiletés acquises par chaque singe au cours d'une même période d'apprentissage.

   On obtient les résultats suivants.
   Que peut-on en dire ? (qui a le plus d'habileté à la fin ; qui a appris le plus ? Peut-on définir la notion de "capacité d'apprentissage...")

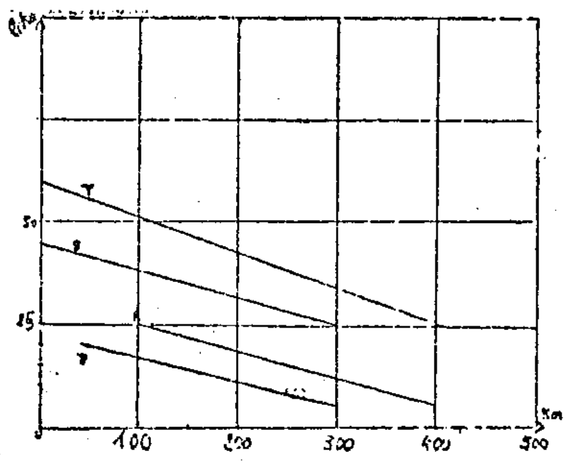


4. <u>Economies d'essence</u>
   Voici un graphique ant la quantité d'essence qui se trouve dans le réservoir de · oit en fonction de la distance parcourue sur route.

   Pouvez-vous ord nner les vo tures en fonction de leur consommation d'essence ?
   1ère étape : estimation en o ervant de loin les segments.
   2ème étape : vérification par .. calcul.



1er CAS.



2ème CAS.

COMMENTAIRES

1ère activité. Cette situation est tirée des travaux du CUFPP de Lille. Elle peut être proposée individuellement ou en binôme. Les graphiques peuvent être polycopiés et distribués aux élèves. Les élèves utilisent la forme ax + b de la fonction affine et sa dérivée.

Le but est de lier variations et signe de la dérivée à partir de la lecture du graphique, de comparer les variations plus ou moins rapides.

La seconde étape est de vérifier ces résultats en calculant le plus précisément possible a et b (quand ils existent). On vise ici à la fois l'acquisition d'une méthode de calcul de l'équation de droite (plus tard de tangente) à partir du coefficient directeur (nombre dérivé) mais aussi un moyen de contrôle des affirmations faites au 1°.

2ème activité. Cette situation est tirée de Math-Ecrit : Collège de Breboeuf Montréal. Elle prolonge la première et se fait individuellement puis collectivement. Le dessin peut être refait au tableau ou rétroprojeté.

On demande aux élèves de répondre individuellement puis collectivement, on recueille les réponses.

On fait éliminer les réponses fausses avec justification.

On fait justifier la(ou les) réponse correcte en se donnant un repère ou en comparant les Δy pour un même Δx ou...

On peut conclure en demandant à un élève de tracer une nouvelle droite en intercallant d'abord son coefficient entre ceux des droites déjà tracées.

ABONNEMENT

L'abonnement au PLOT est valable pour l'année civile.

Prix : membres de l'APMEP : .... 15 F

Personnes non membres de l'APMEP, établissements scolaires, bibliothèques..... 30 F

Règlement : par virement postal de préférence, à adresser :

- pour les membres de l'APM d'une des trois Régionales, à la Régionale dont ils dépendent (voir adresse et CCP ci-contre).
- pour les autres, à :
  Daniel FREDON 40, rue Regnard - 87100 LIMOGES
  le chèque étant libellé à l'ordre de
  Régionale APMEP de Limoges. CCP Limoges 117 66 R

ORLEANS-TOURS

CCP : Régionale APMEP d'Orléans-Tours. La Source 1440 09 X

Siège Social : CRDP 55, rue N.D. de Recouvrance - 45000 ORLEANS

Adresser toute correspondance à :

André Rouchier. Irem. Université - 45045 ORLEANS Cedex

Président : Pierre CHRISTOFLEAU (54).77.52.06
Résidence St Exupéry 10, rue Jean Duverger
41100 VENDOME

Trésorier : Jean-Louis SON (54).46.34.03.
Les Milleries. Mont près Chambord - 41250 BRACIEUX

Secrétaires :

André DUTHILLEUL
13, rue du Domaine - 37300 JOUE LES TOURS

Marie-Laure GIORGI-DARCHE (38).62.22.85
1, rue Albert Laville - 45000 ORLEANS

Pascal MONSELLIER (38).65.11.77
Les Tourelles. Marcilly-en-Villette
45240 LA FERTE SAINT AUBIN

Guy PELLE (38).91.14.98
170, rue de la Verdelle. "Les Breteaux". Mardié
45430 CHECY

Jacques PINAUD (37).46.74.55
Le Coq Fleuri. Fermaincourt - 28500 VERNOUILLET

André ROUCHIER (38).63.22.16 poste 624
Irem. Université - 45045 ORLEANS Cedex

Délégués locaux :

18 - BOURGES : J.P. HEMMER 7, rue Lamartine - 18000 BOURGES
VIERZON : A. PALAT 6, rue du Crot à Foulon - 18100 VIERZON
St AMAND : G. RAY 34, rue des Buissonnets - 18200 St AMAND

28 - CHARTRES / CHATEAUDUN : A. GOUGEON 36, rue des Bas Menus 28000 CHARTRES
DREUX : J. PINAUD Le Coq Fleuri. Fermaincourt
28500 VERNOUILLET
NOGENT le ROTROU : J.C. MILCENT 11, rue Paul Deschanel
28400 NOGENT le ROTROU

36 - ARGENTON : A. LOUIS Paumulé le Pêchereau - 36200 ARGENTON
CHATEAUROUX : M. PERRIN 9/110 Avenue de Paris
36000 CHATEAUROUX

37 - INDRE et LOIRE : V. BOUTEILLER 150, rue Chantepie
37300 JOUE LES TOURS

41 - BLOIS : V. OLIVIER 3, rue Latham - 41000 BLOIS
ROMORANTIN : P. LEGAI 307, rue René Crozet
41200 ROMORANTIN
VENDOME : D. BECANE 72 ter rue du Cdt Verrier
41100 VENDOME

45 - MONTARGIS : R. HEMERY 6, rue des Ormeaux - 45200 MONTARGIS
ORLEANS & GIEN : A. ROUCHIER Irem, Université -
45045 ORLEANS Cedex
PITHIVIERS : D. NAUDET Dimancheville - 45390 PUISEAUX

LIMOGES

CCP : Régionale APMEP de Limoges. Limoges 117 66 R

Secrétariat : IREM 123, rue A. Thomas
87000 LIMOGES (55).79.24.12

Président d'honneur : Mr ROGERIE doyen actif de l'APMEP (95 ans)
22, rue L. Codet 87200 St JUNIEN (55).02.15 69

Président : Mr LABROUSSE 10, rue Rhin et Danube 87100 LIMOGES
(55).37.17.02

Vice-Présidents :

Hte Vienne : Mr FREDON 40, rue Regnard 87100 LIMOGES
(55).79.34.02

Corrèze : Mr BOUTEILLER 7bis, avenue du Président Roosevelt
19100 BRIVE (55).74.20.1[illegible]

Creuse : Mme MEIGNAL 41, rue A. Grand 23000 GUERET
Mr BOURCY Ecole 23 CHENERAILLES

Secrétaire : Mlle CEAUX 2, rue A. de Vigny 87100 LIMOGES
(55).37.45.74

Trésorier : Mr DUVEAU Rue de l'Alouette 87500 St YRIEIX
LA PERCHE (55).75.07.32

Brochures : Mme ROUGIER 35, avenue de la Vienne 87170 ISLE
(55).32.54.23

Enseignement Elémentaire : Mlle PAILLER 18, rue Puy Las Rodas
87100 LIMOGES

Premier Cycle : Mr CREPIN 94, avenue de Locarno 87000 LIMOGES
(55).33.46.68

Technique : Mme COURTEIX 18, rue Max Dormoy 87000 LIMOGES
(55).01.47.55

Post Baccalauréat : Mr SOUMD 58, rue Meissonier 87000 LIMOGES
Mr NICOLAS 29, rue A. Tixier 87100 LIMOGES

Liaisons interdisciplinaires : Mr ROUGIER 35, avenue de la Vienne 87170 ISLE (55).32.54.23

POITIERS

CCP : Régionale APMEP de Poitiers. Bordeaux 3852 59

Siège Social : CRDP 6, rue Sainte Catherine - 86034 POITIERS

Adresser toute correspondance à D. PORTE (Secrétaire de la Régionale).

Secrétaires des Départementales :

(16) G. MARRON Collège Grande Garenne - 16000 ANGOULEME
(17) M. BLANCHARD Lycée - 17309 ROCHEFORT
G. VARENNE 1, avenue du Cdr Lisack - 17690 ANGOULINS/MER
(79) J. FROMENTIN Collège François Rabelais - 79000 NIORT
(86) M. PUYGRENIER La Folie - 86500 MONTMORILLON

Présidente : C. BLOCH (49).41.40.74. 155, rue de la Mérigotte
86000 POITIERS

Secrétaire : M. PUYGRENIER La Folie - 86500 MONTMORILLON

Trésorier : S. PARPAY (49).24.31.70 2, rue Rougier 79000 NIORT

Elémentaire : BELLICOT

Premier Cycle : J. CARTRON Collège Jean Zay - 79000 NIORT
M. PUYGRENIER Collège - 86500 MONTMORILLON

Second Cycle : D. PORTE

Agricole : Mme ELIARD Lycée Agricole de l'Oisellerie
16400 LA COURONNE

Technique : M. FOURNIER 5, rue de la Résidence - 17100 SAINTES

Informatique : G. DESENFANT IUT - 86022 POITIERS
G. BERION Collège de Beaulieu - 86000 POITIERS

Jeux : J. FROMENTIN 17, rue de la Rousille - 79000 NIORT

Formation des maîtres : S. PARPAY - C. BLOCH

Sujets d'examen : D. MARRANT Lycée C. Guérin - 86000 POITIERS

Conseil d'administration de l'Irem : M. PUYGRENIER