plot

BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

Sommaire du n° 12

UTILISATION DES ORDINATEURS EN THÉORIE DES NOMBRES

Jean-Louis NICOLAS

Université - Limoges

Les ordinateurs peuvent-ils être un outil de démonstration ?
Voici un élément de réponse, exposé à la Régionale APM de Limoges en 1978, puis au Séminaire "Philosophie et Mathématiques" de l'Ecole Normale Supérieure.
Ce texte a déjà été publié par l'Irem de Paris-Nord et par la Gazette de la Société Mathématique de France.

De tout temps les arithméticiens ont calculé des familles de nombres et ont construit des tables numériques. A partir de ces calculs, ils établissaient des conjectures qu'ils démontraient ou qu'ils transmettaient à leurs descendants. Depuis quelques années, la puissance des ordinateurs a permis d'augmenter considérablement ces calculs qui sont souvent l'objet de publications. Le journal "Mathematics of computation" s'est spécialisé dans ce type d'article. On lira avec beaucoup d'intérêt le numéro 29 de Janvier 1975 qui recouvre une bonne part de cet exposé. Ce numéro est dédié à D. H. LEHMER qui fut un des pionniers et qui est un des maîtres de cette partie des mathématiques.

1. Calcul de π

La formule de Machin, très connue des taupins,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} - \text{Arctg } \frac{1}{239}$$

a été utilisée pour les premiers calculs de π :

1949 REITWEISNER sur ENIAC, 2 000 décimales (70h)
1958 GENUYS sur I.B.M. 704, 10 000 décimales (100mn).

On lui préféra ensuite la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 6 \text{ Arctg } \frac{1}{8} + 2 \text{ Arctg } \frac{1}{57} + \text{Arctg } \frac{1}{239}$$

(1961 SHANKS et WRENCH sur I.B.M. 7090, 100 000 décimales (8h), Math of comp. vol. 16, 1962, p. 76-99).

Monsieur BRETTE, professeur de mathématiques au Palais de la Découverte, a connaissance d'un calcul non publié d'un million de décimales de π, par cette formule.

Enfin E. SALAMIN donne la formule déduite de la théorie des intégrales elliptiques qui lui permettrait de calculer 10^7 décimales de π :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{a\,g\,m\,(1,k)\;a\,g\,m\,(1,k')}{1 - \sum_{j\geq 1} 2^j (c_j^2 + c'^2_j)}$$

où k et k' sont deux nombres réels vérifiant $k^2 + k'^2 = 1$, $a_o = 1$, $b_o = k$; $a'_o = 1$; $b'_o = k'$;

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n) \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$a'_{n+1} = \frac{1}{2}(a'_n+b'_n) \quad b'_{n+1} = \sqrt{a'_n b'_n}$$

$$c_n = a_n^2 - b_n^2 \qquad c'_n = a'^2_n - b'^2_n$$

$a\,g\,m\,(1,k) = \lim a_n = \lim b_n$ est la moyenne arithmetico géométrique.

Une étude statistique a montré que les 10 000 premières décimales de π pouvaient être considérées comme une liste de chiffres au hasard.

L'étude des 21000 premières réduites du développement en fraction continue de π, a montré que π avait en ce domaine un comportement tout à fait normal.

BIBLIOGRAPHIE

M. MIGNOTTE, Séminaire de théorie des nombres D.P.P. 1972-1973, n° G. 12.

E. SALAMIN, Math of Comp. Vol. 30, 1976, p. 565-570.

2. Factorisation des nombres entiers

a) Test de primalité.

Il est toujours plus facile de tester si un nombre est premier ou non, que d'obtenir sa décomposition en facteurs premiers. Les tests de primalité sont basés sur le théorème de Fermat :

$$p \text{ premier} \Rightarrow \forall a, \quad a^p \equiv a \bmod p.$$

La réciproque n'est pas vraie : il existe des nombres m appelés nombres de Carmichael qui vérifient :

$$\forall a, \quad a^m \equiv a \bmod m$$

Le plus petit est $561 = 3.11.17$. Cependant il est possible d'obtenir des réciproques un peu plus compliquées du théorème de Fermat.

b) La méthode de division.

Pour factoriser n, on le divise par tous les nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$. En fait on divise n par les nombres d'un ensemble contenant les nombres premiers et contenu dans l'ensemble des nombres impairs, par exemple les nombres premiers à 30 ou à 210.

Cette méthode est en $O(\sqrt{n})$ pas, c'est-à-dire comprend un nombre d'opérations de l'ordre de $\sqrt{n}$. On peut noter ici qu'un ordinateur rapide fait très approximativement un million d'opérations à la seconde. Par cette méthode, un nombre de 12 chiffres sera factorisé en 1 seconde ; un nombre de 18 chiffres en un quart d'heure ; un nombre de 24 chiffres en 250 heures, ce qui est irréaliste.

BIBLIOGRAPHIE

D.E. KNUTH, Fundamental algorithms t.2. Addison Wesley 1969.

c) La méthode de Fermat.

Grace à l'identité valable pour n impair :

$$n = pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2.$$

Fermat avait remarqué qu'il est équivalent de factoriser n, ou de l'écrire sous la forme $n = x^2-y^2$. Pour les $x > \sqrt{n}$, il regardait si x^2-n est un carré parfait. L'idée a été reprise par Sherman Lehman qui en déduit une méthode de factorisation en $O(n^{1/3})$ pas, assez facile à programmer. Il s'agit de résoudre l'équation $x^2-y^2 = 4kn$ pour les petites valeurs de k.

BIBLIOGRAPHIE

R. SHERMAN LEHMAN, Math of Comp., vol. 28, 1974, p. 637-646.

d) La méthode de Legendre.

Cette méthode consiste à développer en fractions continues $\sqrt{kn}$ pour de petites valeurs de k. Si $\frac{x}{d}$ est une réduite, $a = x^2-knd^2$ sera petit en valeur absolue et sera un carré modulo n. On peut ainsi trouver x et y tels que $x^2 \equiv y^2 \mod n$; p g c d $(n,x+y)$ et p g c d $(n,x-y)$ sont des diviseurs de n. Un autre avantage de la méthode, comme a est un carré modulo tous les diviseurs premiers de n, est de situer ces diviseurs premiers dans des progressions arithmétiques (par exemple $a=-1$ entraine $p\equiv 1 \mod 4$) ce qui facilite la méthode de factorisation par division.

BIBLIOGRAPHIE

KRAITCHIK, Recherches sur la théorie des nombres, Paris 1929
MORRISON et BRILLHART, Math of Comp., vol. 29, 1975, p. 183-205.

e) La méthode de Shanks.

Considérons l'ensemble $E(\Delta)$ des formes quadratiques $AX^2 + BXY + CY^2$ avec $A,B,C \in \mathbb{Z}$, de discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ fixé. Si l'on fait la transformation :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z}\,,\ |ad-bc| = 1$$

la forme $AX^2 + BXY + CY^2$ se transforme en une forme $A'X'^2 + B'X'Y' + C'Y'^2$ de même discriminant Δ. La relation $(A,B,C) \sim (A',B',C')$ est une relation d'équivalence sur $E(\Delta)$. Le nombre de classes d'équivalences est fini et se note $h(\Delta)$. De plus, on peut mettre sur $E(\Delta)$ une loi de composition qui fait de l'ensemble quotient un groupe fini à $h(\Delta)$ éléments. On peut faire correspondre à chaque forme quadratique un idéal de l'anneau des entiers algébriques du corps de nombre $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$. La loi de composition des formes quadratiques s'interprète alors comme le produit des idéaux correspondants.

Pour factoriser n, Shanks calcule $h(\Delta)$ avec $\Delta=-n$, ou $\Delta=-4n$ et étudie le groupe fini à $h(\Delta)$ éléments de façon à trouver une forme (A,B,C) de discriminant Δ vérifiant $B=0$ ou $A=B$ ou $A=C$, ce qui donne une factorisation immédiate de Δ.

Cette méthode est d'une part très belle, puisqu'elle résoud un problème d'un énoncé très simple par des méthodes beaucoup plus profondes, et initialement développées dans d'autres but, et d'autre part très efficace pour des nombres de plus de 15 chiffres. (Le nombre de pas de l'algorithme est $O(n^{1/4+\varepsilon})$.

BIBLIOGRAPHIE

H. COHEN, Séminaire D.P.P. 1972-1973, n° G 7
D. SHANKS, Proc. of Symposia in pure mathematics, vol. XX, p. 415-440.

f) Un système de codage.

Un chef de réseau veut construire un codage de façon que n'importe qui puisse lui téléphoner un message qu'il est seul à savoir décrypter. A l'aide de tests de primalité, il choisit deux nombres premiers p et q d'une cinquantaine de chiffres. Il calcule $n=pq$; ce nombre n est trop grand pour être factorisé par les méthodes actuellement connues. Il calcule $\phi(n) = (p-1)(q-1)$ et choisit un nombre d, premier avec $\phi(n)$; $\phi(n)$ et d sont gardés secrets. Il calcule e, tel que $ed \equiv 1 \bmod \phi(n)$. Il envoie à ses correspondants la valeur de n et de e.

Un correspondant veut adresser au chef de réseau un message. Il le met d'abord sous la forme de nombres M, vérifiant $1 \leq M \leq n$, et envoie le message codé sous la forme du nombre $C \equiv M^e \bmod n$. Tout le monde peut connaître C, mais seul le chef de réseau peut reconstruire M par la formule $M \equiv C^d \bmod n$. Le calcul de d par un ennnemi est équivalent à la factorisation de n, et donc, pratiquement impossible.

BIBLIOGRAPHIE

R.L. RIVEST, A. SHAMIR, L. ADLEMAN, Com. A.C.M. vol. 21, 1978, p. 120 à 126.

M. MIGNOTTE, Publication du Séminaire d'Informatique de l'Université de Strasbourg.

3. Nombres de Mersenne et de Fermat

La grande presse a annoncé en décembre 1978 que le plus grand nombre premier connu était $2^{21701}-1$, battant l'ancien record qui était $2^{19937}-1$. Les nombres de la forme 2^p-1, où p est premier sont appelés nombres de Mersenne. Actuellement 25 d'entre eux ont été montrés premiers, correspondant aux valeurs de $p = 2,3,5,7,$ $13,17,19,31,61,89,107,127,521,607,1279,2203,2281,3217,4253,4423,9689,9941,11213,$ $19937,21701$. Pour ce type de nombre, il existe un test de primalité particulier.

Test de Lucas-Lehmer : Soit q premier $\neq 2$, $L_o=4$, $L_{n+1} \equiv L_n^2 - 2 \bmod (2^q-1)$, alors :

$$(2^q-1) \text{ premier} \iff L_{q-2} = 0.$$

En 1876, à l'aide de ce test, Lucas avait montré que $2^{127}-1$ était premier, et ceci à la main.

Fermat avait conjecturé que les nombres $F_m = 2^{2^m}+1$ étaient tous premiers, et l'avait montré pour $m \leq 4$. Malheureusement on ne connait pas de nombres F_m premiers avec $m \geq 5$. Ils sont tous composés pour $5 \leq m \leq 16$. Le premier cas non connu est $m=17$. Il existe deux méthodes pour tester les nombres de Fermat. D'abord on sait démontrer que si p premier divise F_m, alors $p\equiv 1 \bmod 2^{m+2}$. Ainsi pour $m=5$, on divise F_5 par les nombres de la forme $128k+1$; on constate rapidement que 641 divise F_5. Cette technique permet de trouver des diviseurs des nombres de Fermat.

La seconde méthode est un test de primalité : si $p=F_m$ est premier, on peut démontrer que 3 est un générateur du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*$ et l'on a le critère :

$$F_m = p \text{ premier} \iff 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p.$$

BIBLIOGRAPHIE.

W. SIERPINSKI, Elementary theory of numbers.

D.E. KNUTH., Fundamental algorithms, vol. 2.

J.C. HALLYBURTON and J. BRILLHART, Math of Comp., vol 29, 1975, p. 109-112.

4. Théorème de Fermat

Soit $n \geq 3$. Peut-on trouver des nombres entiers non nuls x,y,z tels que $x^n + y^n = z^n$?

Pour $n = 4$, Fermat avait démontré que c'est impossible, on peut donc se restreindre au cas $n=p$ premier.

Si p est un nombre premier régulier, Kummer a démontré en 1850, que l'équation de Fermat $x^p + y^p = z^p$ n'a pas de solution. Un nombre premier est régulier s'il ne divise pas le numérateur des nombres de Bernouilli $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$. Les nombres de Bernouilli sont définis par :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2} x^2 + \frac{B_4}{4!} x^4 + \ldots + \frac{B_{2k}}{2k!} x^{2k} + \ldots$$

ou par :

$$1 + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} B_k = 0 \qquad \text{avec} \qquad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

On a : $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = \frac{-691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$ etc ...

Le plus petit nombre premier irrégulier est 37 qui divise le numérateur de B_{32}.

Lorsque p est irrégulier, un test toujours efficient jusqu'à présent (cf. Math of Comp. vol 29, 1975, p. 114) permet de montrer que l'équation de Fermat n'a pas de solution et ainsi Wagstaff a démontré qu'il n'y avait pas de solutions pour $3 \leq n \leq 125\,000$.

BIBLIOGRAPHIE

Z.I. BOREVITCH et I.R. CHAFAREVITCH, Théorie des nombres Gauthiers Villars 1967.
S. WAGSTAFF, Math of Comp. vol 32, 1978, p. 583-591.

5. Hypothèse de Riemann

La fonction ζ de Riemann est définie pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e\ s > 1$, par la série : $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$. Elle se prolonge en une fonction analytique dans $\mathbb{C} - \{1\}$ et a des zéros dans la bande $0 < \mathcal{R}e\ s < 1$ qui sont symétriques par rapport à l'axe réel et à la droite $\mathcal{R}e\ s = \frac{1}{2}$. Riemann a conjecturé que tous ces zéros (dont le plus petit en module est $\frac{1}{2} \pm 14{,}1\ i$) sont situés sur la droite $\mathcal{R}e\ s = \frac{1}{2}$. Rosser et Schoenfeld ont calculé plus de 3.500 000 zéros vérifiant $0 \leq \text{Im}\ s \leq 1.894\,438$. Ils vérifient tous l'hypothèse de Riemann.

La fonction ζ de Riemann intervient largement dans la distribution des nombres premiers. Les calculs précédents ont permis de démontrer certaines inégalités; par exemple pour la fonction $\pi(x)$ égale au nombre de nombres premiers $\leq x$, on a ; pour $x \geq 67$:

$$\frac{x}{\log x - 1/2} \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\log x - 3/2}$$

BIBLIOGRAPHIE

W.J. ELLISON et M. MENDES-FRANCE, les nombres premiers, Hermann, 1975.
J.B. ROSSER et L.S. SCHOENFELD, Math of Comp., vol 29, 1975, p. 243-269
" " Math of Comp., vol 30, 1976, p. 337-360.
EDWARDS : Riemann zeta function, Acad. Press.

6. Une démonstration achevée par des calculs

Dans ce domaine, l'exemple le plus célèbre est certainement le théorème des 4 couleurs. En arithmétique, un résultat important a été aussi obtenu par ordinateur : On sait démontrer que si Δ est négatif et si le nombre de classes (défini au paragraphe 2e) vérifie $h(\Delta) = 2$, alors $|\Delta| < 10^{1030}$. Il reste donc à regarder les "petites" valeurs de $|\Delta|$, (ce qui ne peut se faire par une recherche systématique), pour montrer qu'il n'y a que 18 valeurs de Δ comprises entre -15 et -427 qui sont solution de $h(\Delta) = 2$.

L'équation $h(\Delta) = 1$ avait été résolue ainsi, mais aussi par une autre démonstration n'utilisant pas les calculs numériques. D'autres résultats illustrent cette méthode, notamment la résolution des équations $x^2-y^3=k$ pour certaines valeurs de k.

BIBLIOGRAPHIE

H.M. STARK, Math of Comp., vol 29, 1975, p. 289-302.

7. Quelques exemples ou contre exemples

a) Euler avait conjecturé, comme généralisation du théorème de Fermat que pour $n \geq 3$ l'équation :

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n-1}^n = x_n^n$$

n'avait pas de solution.

Lander et Parkin (Math of Comp. vol 21, 1967, p. 101-103) ont fourni le contre exemple :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

b) Dans leur important travail sur les groupes finis, Feit et Thompson avaient conjecturé que si p et q étaient premiers, alors

$$\frac{p^q-1}{q-1} \quad \text{et} \quad \frac{q^p-1}{p-1}$$

étaient premiers entre eux. N.M. Stephens (Math of Comp. t. 25, 1971, p. 625) a montré que pour $p=17$ et $q=3313$, $112\,643=2pq+1$ était un facteur commun aux deux nombres.

c) Un vieux problème d'arithmétique, encore irrésolu est le suivant : Pour tout n, existe-t-il une progression arithmétique dont tous les termes $a+kb$, $0 \leq k \leq n-1$ soient des nombres premiers ? Le record actuel $n=17$ est dû à S. Weintraub, Math of Comp. vol 31, 1977, p. 1030.

d) Cassells et Guy (Mathematika t. 13, 1966, p. 11-120) ont démontré que l'équation :

$$5x^3 + 12y^3 + 9z^3 + 10w^3 = 0$$

a des solutions dans tous les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$, mais pas dans $\mathbb{Q}$. L'ordinateur leur a servi à trier parmi les formes qui avaient des zéros dans tous les $\mathbb{Q}_p$, celles qui n'avaient pas dans $\mathbb{Q}$ de racines $\frac{a}{b}$, avec a et b petit.

e) Soit $\mu(n)$ la fonction de Möbius. (Si n se décompose en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, on a $\mu(n) = \prod_{i=1}^{k} \mu(p_i^{a_i})$, $\mu(p) = -1$ et $\mu(p^a) = 0$ si $a \geq 2$, $\mu(1) = 1$). On pose $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. Van Sternek a conjecturé que $|M(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{2}$. H. Cohen et

F. Dress ont montré que cette conjecture était vraie pour $x \leq n_o = 7725038628$, et fausse pour $x = n_o+1$. (Astérisque 61, p. 57-61).

8. Quelques problèmes à résoudre

a) Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$. Le théorème des nombres premiers s'énonce : $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. En fait une meilleure approximation de $\pi(x)$ est le logarithme intégral de x, $\ell i\, x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Les tables de nombres premiers montrent que $\pi(x) < \ell i\, x$ pour $x \leq 10^8$. Cependant on peut démontrer que la différence $\pi(x)-\ell i\, x$ change de signe pour une infinité de valeurs de x. Sherman Lehman a montré (Acta Arithmetica, t. 11, 1966, p. 397-410) que $\pi(x_o) > \ell i(x_o)$ pour $x_o \leq 1{,}65.10^{1165,4}$. Mais cette borne est encore beaucoup trop grande pour pouvoir calculer la plus petite racine de l'équation $\pi(x) = \ell i\, x$. Cela montre également que dans ce type de problèmes, comme dans l'hypothèse de Riemann, il est dangereux d'extrapoler des résultats, mêmes s'ils sont obtenus pour un grand nombre de valeurs.

b) Vinogradov a démontré que tout nombre $n > 3^{3^{15}}$ et impair s'écrivait comme une somme de 3 nombres premiers. Là aussi la borne est trop grande pour montrer que la propriété est vraie pour $n > 7$.

c) Catalan avait conjecturé que l'équation $a^x-b^y = 1$ avec $a,b,x,y, \geq 2$ n'avait comme solution que $3^2 - 2^3 = 1$. Tijdeman (Acta Arithmetica, t. 24, 1976, p. 197-209) a démontré que l'équation de Catalan n'avait qu'un nombre fini de solutions. Cependant les calculs restant à faire sont beaucoup trop longs pour achever la démonstration de la conjecture.

d) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = n/2 \text{ si } n \text{ est pair}$$
$$f(n) = 3n+1 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

On construit la suite $a_o, \ldots, a_{n+1} = f(a_n)$. On conjecture que cette suite vaut 1 à partir d'un certain rang quel que soit la valeur de départ a_o. C'est un problème très simple à programmer, même sur une petite machine, et de nombreux calculs ont été faits pour mettre en défaut cette conjecture. Dans ce cas c'est la théorie qui est un peu en retard sur l'ordinateur.

BIBLIOGRAPHIE

R.E. CRANDALL, Math of Comp., vol 32, 1978, p. 1281-1292.

ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE EN CLASSE DE CINQUIEME

Gérard CHAUVAT

Collège Philippe de Commynes - Tours

Les élèves au travail

- Soit un nombre de trois chiffres non tous égaux, par exemple : A = 592 (mais pas 111 ni 222 ...). Quel est le nombre $\tilde{A}$ obtenu en écrivant les trois chiffres de A en ordre décroissant et quel est le nombre $\tilde{A}'$ obtenu en les écrivant dans l'ordre croissant ?

- $\tilde{A} = 952$ et $\tilde{A}' = 259$.
- Bien ! Faisons la différence $\tilde{A}-\tilde{A}' = 952-259 = 693$. Recommençons avec B = 693 ; il vient : $C = \tilde{B}-\tilde{B}' = 963-369 = 594$ et ainsi de suite... A vous maintenant !

Dans chaque groupe le travail s'organise :

- Moi, j'prends un nombre avec un zéro.
- Moi, avec deux chiffres pareils.
- Moi, j'prends 123
- Moi, j'prends 952, y-a déjà deux soustractions de faites !

Les opérations vont bon train.

- Eh !, M'sieur, je trouve toujours 495 !
- Moi aussi, M'sieur, en trois coups.
- Moi non... ah si, au sixième !

Pas de doute, en six soustractions maximum, tout le monde "tombe" sur 495 (sauf erreur, bien sûr !). Le but de la séance est alors de répondre aux questions suivantes : i) pourquoi toujours 495 ?

ii) le nombre de soustractions peut-il dépasser six ? pourquoi ?

De nombreux élèves remarquent tout d'abord que des nombres très "différents" peuvent donner le même résultat pour la soustraction, ainsi :

592 donne 952-259 = 693
470 donne 740- 47 = 693
811 donne 811-118 = 693 ....

Après des tentatives infructueuses pour expliquer cette propriété, un élève finit par remarquer que la différence entre le plus grand et le plus petit chiffre de ces nombres est toujours la même.(Dans l'exemple ci-dessus elle vaut 7). Cette différence x peut être 1,2, ... ou 9. Chaque groupe d'élèves choisit une valeur de x et vérifie la propriété sur de nombreux exemples, établissant la table suivante :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$D_x = \tilde{A} - \tilde{A}'$	99	198	297	396	495	594	693	792	891

DEMONSTRATION DE CETTE PROPRIETE :

Soit $\tilde{A} = \overline{abc}$ en base 10

$$\tilde{A} = a.10^2 + b.10 + c \quad \text{avec } 9 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a \neq c$$

On a $D = \tilde{A}-\tilde{A}' = (a-c).\ 10^2 + (c-a)$

Posons $x = a-c, x \neq 0$

$$D = x.10^2 - x = (x-1).10^2 + 9.10 + (10-x)$$

$$D = \overline{(x-1)\ 9\ (10-x)} \text{ en base 10.}$$

Nous proposons alors de définir sur l'ensemble E des nombres de trois chiffres non tous égaux la relation R suivante :

Si a et c sont respectivement le plus grand et le plus petit chiffre d'un nombre $A \in E$, posons $x = a-c$,

Si a' et c' sont respectivement le plus grand et le plus petit chiffre d'un nombre $B \in E$, posons $x' = a'-c'$,

On aura A R B si et seulement si $x = x'$.

Les élèves démontrent aisément que R est une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence sont notées $\hat{x}$, elles sont au nombre de 9 et forment une partition de E.

Soit $F = \{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7},\hat{8},\hat{9}\}$ l'ensemble quotient E/R.

Nous définissons sur F la relation S suivante :

$\hat{x}\ S\ \hat{y}$ si et seulement si quel que soit $A \in \hat{x}$, $\tilde{A}-\tilde{A}' \in \hat{y}$

La table établie plus haut permet aux élèves de construire rapidement un diagramme sagittal de la relation S :

$$\begin{tikzcd}
\hat{1} \arrow[d] & \hat{2} \arrow[d] & \hat{3} \arrow[d] & \hat{4} \arrow[d] & \\
\hat{9} \arrow[r] & \hat{8} \arrow[r] & \hat{7} \arrow[r] & \hat{6} \arrow[r] & \hat{5} \arrow[loop right]
\end{tikzcd} \quad \boxed{F}$$

et tous les mystères de s'éclaircir !

Le plus grand nombre de soustractions étant atteint par les nombres appartenant à $\hat{1}$, le sixième donne 495.

Généralisation

Il est difficile d'aller plus loin avec des élèves de 5è et c'est bien dommage ! En effet si l'on considère des nombres écrits avec quatre chiffres non tous égaux en base dix et qu'on leur applique le procédé de soustraction décrit ci-dessus, on"tombe" toujours sur 6174 ! et ce en sept soustractions au maximum. La méthode utilisée au I permet de "voir" pourquoi :

Soit A et B deux tels nombres,

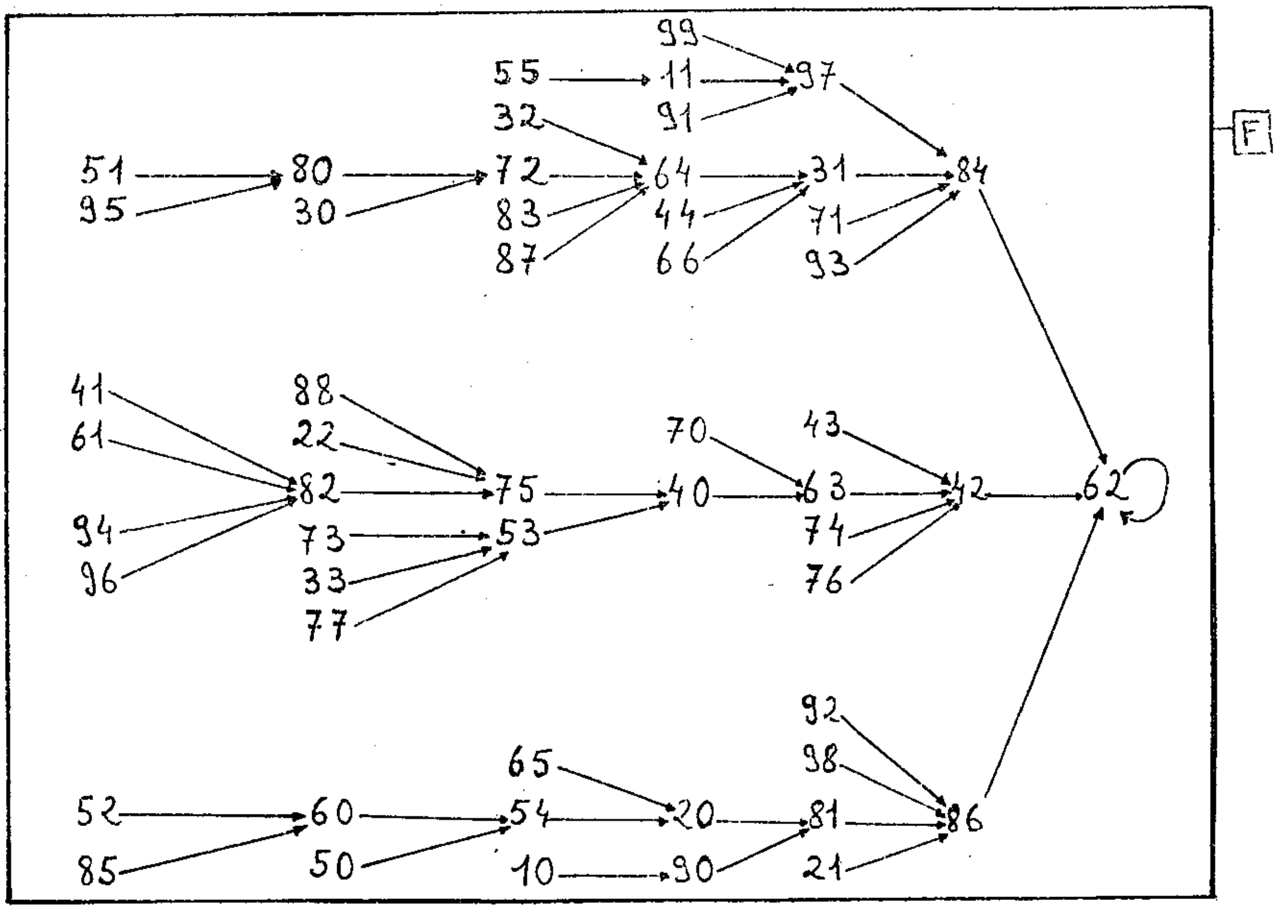
si $\tilde{A} = \overline{abcd}$ avec $9 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$ et $a \neq b'$, et
si $\tilde{B} = \overline{a'b'c'd'}$ avec $9 \geqslant a' \geqslant b' \geqslant c' \geqslant d' \geqslant 0$ et $a' \neq b'$,
posons : $x = a-d$ et $y = b-c$, ($x \geqslant y$ et $x \neq 0$)
$x' = a'-d'$ et $y' = b'-c'$, ($x' \geqslant y'$ et $x' \neq 0$)

La relation R définie dans l'ensemble E des nombres écrits avec quatre chiffres non tous égaux en base 10 par

A R B si et seulement si $(x,y) = (x',y')$

est une relation d'équivalence. On note xy les classes d'équivalence et F l'ensemble quotient. (Card F = 54). On démontre que

si $y = 0$, quel que soit $A \in xy$, $\tilde{A}-\tilde{A}' = \overline{(x-1)99(10-x)}$
si $y \neq 0$, quel que soit $A \in xy$, $\tilde{A}-\tilde{A}' = \overline{x(y-1)(9-y)(10-x)}$



Annexe 1. Cas n = 4, en base 10.

Soit S la relation définie sur F par :

xy S x'y' si et seulement si quel que soit $A \in xy$, $\tilde{A}-\tilde{A}' \in x'y'$.

L'annexe I reproduit un diagramme sagittal de cette relation. On y voit que six soustractions au plus nous amènent à la classe 62 ; la septième donnant $6(2-1)(9-2)(10-6) = 6174$.

Malheureusement (?), cela ne marche plus avec 5 chiffres, ni 6, ni 7... Pourquoi ? Pouvez-vous trouver tous les couples (n,b) tels que l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec n chiffres non tous égaux en base b possède la propriété "soustractive" décrite ci-dessus ?

SOMMES DE SUITES PÉRIODIQUES

Marc BLANCHARD
Lycée - Rochefort sur Mer

Etant données deux suites numériques réelles périodiques (u_n) et (v_n), notre propos est d'étudier la période de la suite $(u_n + v_n)$.

Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ numérique réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$

Elle est périodique, s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (u_{n+q} = u_n).$$

On dit alors que q est une période de la suite. L'ensemble $\mathcal{P}$ des périodes est une partie non-vide de $\mathbb{N}^*$, il a un plus petit élément p appelé la plus petite période de la suite.

THEOREME : $\boxed{\text{Si } p = \inf \mathcal{P}, \text{ alors } \mathcal{P} = p\,\mathbb{N}^*}$

Montrons ce résultat classique.

Par récurrence, il est aisé de vérifier que

$$p\,\mathbb{N}^* = \{p\,k \mid k \in \mathbb{N}^*\} \text{ est inclus dans } \mathcal{P}.$$

Montrons l'inclusion inverse.

Soit $q \in \mathcal{P}$. En effectuant la division euclidienne de q par p, on écrit : $q = b\,p + r \quad (0 \leq r < p)$.

Sachant que $p\,\mathbb{N}^* \subset \mathcal{P}$, $b\,p$ est une période de la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+r} = u_{n+r+bp}$$

C'est-à-dire : $u_{n+r} = u_{n+q} = u_n$ (car $q \in \mathcal{P}$).

Si $r \neq 0$, alors $r \in \mathcal{P}$ et $r < p$ (ce qui est absurde). Nécessairement $r = 0$, et $q = b\,p \in p\,\mathbb{N}^*$.

Ce qui signifie : $\mathcal{P} \subset p\,\mathbb{N}^*$.

La double inclusion entraîne : $\mathcal{P} = p\,\mathbb{N}^*$ (C.Q.F.D.)

CAS PARTICULIER : $p = 1$, la suite est constante.

Enonçons tout d'abord le

LEMME 1 :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, (u_n) et (λu_n) ont même ensemble de périodes, lorsque (u_n) est périodique.

(La démonstration en est immédiate).

Il s'en déduit le

LEMME 2 :

Soit $(u_{i,n})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, k suites de périodes respectives p_i.
Alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{*k}$, la suite $(\sum\limits_k \lambda_i u_{i,n}) = (u_n)$ a pour période p, diviseur du P.P.C.M. $\bigvee\limits_{i=1} p_i$.

La suite (u_n) est périodique, car $m = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i$ est une période. Sa plus petite période p est telle que $m \in p\,\mathbb{N}^*$, c'est donc un diviseur de m.

COROLLAIRES :

1) L'ensemble des suites périodiques est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des suites numériques réelles.

2) L'ensemble des suites numériques réelles ayant p pour période est un sous-espace vectoriel du précédent.

LEMME 3 :

Si deux suites (u_n) et (v_n) ont pour plus petites périodes respectives p et q, la suite $(u_n + v_n)$ est de plus petite période r de sorte que :

$$p \vee q = p \vee r = q \vee r \quad (*)$$

En effet, si $w_n = u_n + v_n$ a pour plus petite période r, d'après le résultat précédent $r \mid p \vee q$.

Comme $p \mid p \vee q$, alors $p \vee r \mid p \vee q$.

D'autre part, $v_n = w_n - u_n$, on en déduit (lemme 2) $q \mid p \vee r$, donc $p \vee q \mid p \vee r$.

La relation " $\mid$ " (divise) étant antisymétrique sur $\mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$p \vee q = p \vee r$$

De façon analogue : $p \vee q = q \vee r$.

Plus précisément, factorisons à l'aide de nombres premiers α_j $(1 \leqslant j \leqslant \ell)$

$p \vee q = \prod\limits_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{A_j}$ (les A_j sont des naturels non nuls).

Alors p et q peuvent se factoriser ainsi :

$$p = \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{a_j} \quad , \quad q = \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{b_j} \quad , \quad \text{avec}$$

$$\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell,\ 0 \leqslant a_j \leqslant A_j \quad , \quad 0 \leqslant b_j \leqslant A_j$$

$$\text{et} \quad A_j = \sup(a_j\ ;\ b_j)$$

(*) $p \vee q$ par exemple, désigne le P.P.C.M. de p et q.

r peut se factoriser sous la forme :

$$r = \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{c_j} \text{ , de sorte que :}$$

$\forall j,\ 1 \leq j \leq \ell,\ 0 \leq c_j \leq A_j$, et, $A_j = \sup(b_j \ ; c_j) = \sup(a_j \ ; c_j)$.

Si $a_j \neq b_j$, alors $c_j = A_j$ (le plus grand de a_j et b_j), si $a_j = b_j = (A_j)$, alors $0 \leq c_j \leq A_j$ (toutes les valeurs entre 0 et A_j , peuvent être prises pour c_j)

EXEMPLES -

1) Si $p = 2^3 \times 3 \times 7$ et $q = 2 \times 3^2 \times 5$, alors nécessairement

$$r = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

2) Si $p = 2^2 \times 3 = 12$ et $q = 2^2 = 4$, alors $r \in \{3, 6, 12\}$.

Supposons (u_n) de période 4,
(v_n) de période 3,
(w_n) de période 6
(x_n) de période 12.

- Alors $(-u_n + x_n)$ est de période 12, (u_n) de période 4 et leur somme (x_n) est de période 12.

- Alors $(-u_n + w_n)$ est de période 12, (u_n) de période 4 et leur somme (w_n) est de période 6.

- Alors $(-u_n + v_n)$ est de période 12, (u_n) de période 4 et leur somme (v_n) est de période 3.

Exemples avec les rationnels -

3) $\frac{6}{91} = 0,065934$ écriture décimale de période 6

$\frac{1}{13} = 0,076923$ écriture décimale de période 6

Alors : $\frac{6}{91} + \frac{1}{13} = \frac{1}{7} = 0,142857$ " " " " 6

$\frac{1}{7} = 0,142857$ écriture décimale de période 6

$\frac{33}{259} = 0,127413$ " " " " 6

Alors $\frac{1}{7} + \frac{33}{259} = \frac{10}{37} = 0,270$ " " " " 3

$\frac{1}{7} = 0,142857$ " " " " 6

$\frac{3}{77} = 0,038961$ " " " " 6.

Alors : $\frac{1}{7} + \frac{3}{77} = \frac{2}{11} = 0,18$ écriture décimale de période 2

$\frac{5}{21} = 0,238095$ " " " " 6

$\frac{2}{21} = 0{,}\overline{095238}$ " " " " 6

Alors : $\frac{5}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ " " " " 1

4) $\frac{359}{407} = 0{,}\overline{882063}$ écriture décimale de période 6

$\frac{1}{37} = 0{,}\overline{027}$ " " " " 3

Alors : $\frac{359}{407} + \frac{1}{37} = \frac{10}{11} = 0{,}\overline{90}$ " " " " 2

$\frac{1}{259} = 0{,}\overline{003861}$ écriture décimale de période 6

$\frac{1}{37} = 0{,}\overline{027}$ " " " " 3

$\frac{1}{259} + \frac{1}{37} = \frac{8}{259} = 0{,}\overline{030888}$ " " " " 6 .

On en déduit, en particulier :

1) Lorsque dans les factorisations de p et q les puissances des mêmes nombres premiers sont toutes différentes, alors $r = p \vee q$;

2) Si $p = q$, alors r peut être l'un quelconque des diviseurs de p (ou q). Donc si $(u_n + v_n)$ est constante, nécessairement $p = q$.

On peut généraliser le résultat précédent, par récurrence, pour obtenir le théorème :

> Soit $(u_{i,n})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ une famille de k suites de plus petites périodes p_i respectivement, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{*k}$.
>
> Alors $(u_n) = (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, u_{i,n})$ est une suite de période p telle que :
>
> si $\bigvee_{i=1}^{k} p_i = \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{A_j}$ (factorisation à l'aide de nombres premiers)
>
> en posant $p_i = \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{a_{i,j}}$, alors $p = \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{a_j}$, avec
>
> - $a_j = A_j$ $(= \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} a_{i,j})$ lorsque la borne supérieure est atteinte pour un seul indice i $(1 \leqslant i \leqslant k)$;
>
> - $0 \leqslant a_j \leqslant A_j$ $(= \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} a_{i,j})$ lorsque la borne supérieure est atteinte pour au moins deux indices i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Tous les résultats précédents sont généralisables aux suites numériques périodiques <u>à partir d'un certain rang</u>.

Ils peuvent être illustrés par des calculs sur des rationnels. Leurs développement décimaux sont périodiques à partir d'un certain rang. Dans de nombreux articles ou ouvrages d'arithmétique, ces problèmes sont abordés.

UTILISATION D'UNE TABLE TRACANTE DANS L'APPRENTISSAGE DE L'ANALYSE

Dominique et Francis LABROUE

Lycée - Egletons

MATERIEL : Le lycée d'Egletons possède un calculateur programmable HEWLETT PACKARD 9825 et une table traçante HP 9872 A.

OBJECTIFS : L'étude de la continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point est au programme de la quasi totalité des classes de lère et Terminale conduisant à un bac de second degré, un bac de technicien ou un brevet de technicien.

La manière dont le professeur introduit cette notion nous paraît importante pour plusieurs raisons :

- il s'agit d'un des tous premiers cours de l'année,
- il s'agit de remettre en cause un certain "acquis" de la classe de seconde (tracé d'une courbe, hyperbole par exemple, à partir seulement de quelques points et du sens de variation), et il est donc très important de cerner avec précision le problème posé,
- il s'agit d'introduire un modèle théorique (une définition) adapté à une situation concrète facile à observer, à décrire dans la langue française (l'existence ou non de saut), et rencontrée par nos élèves dans leur vie quotidienne (voir feuille 6).

Aussi nous nous sommes attachés, non pas à rédiger un cours destiné à être polycopié, ou un questionnaire à choix multiples, mais au contraire à utiliser des techniques modernes pour éclairer le cours théorique qui reste nécessaire.

UTILISATION : Aucune connaissance particulière en informatique n'est nécessaire pour utiliser le programme stocké dans une cassette (une courte fiche détaille les quelques instructions à taper au clavier). Le professeur anime la discussion des élèves (demi-classe) et n'a qu'à appuyer sur un bouton pour faire poursuivre l'exécution du programme après chaque arrêt programmé (une vingtaine au total) destiné à obtenir des réponses aux questions écrites ou à observer plus en détail une particularité graphique.

La simple lecture de ces feuilles en noir et blanc ne nous semble pas permettre d'apprécier réellement les moyens utilisés : programmation du choix des quatre couleurs, lever de la plume, temporisation des mouvements, arrêt sur un point isolé, mouvement de va et vient...

Aussi nous nous tenons à la disposition de ceux qui voudront bien nous apporter leurs critiques ou nous demander des renseignements supplémentaires.

REMARQUE : Signalons que ce document a été publié dans le *"Bulletin Irémois"* (IREM de LIMOGES - Printemps 1980), dans un format réduit mais avec les courbes en couleur.

voir au verso

PUBLICATIONS DE L'APMEP

Commandez-les à votre Régionale (voir page 13)

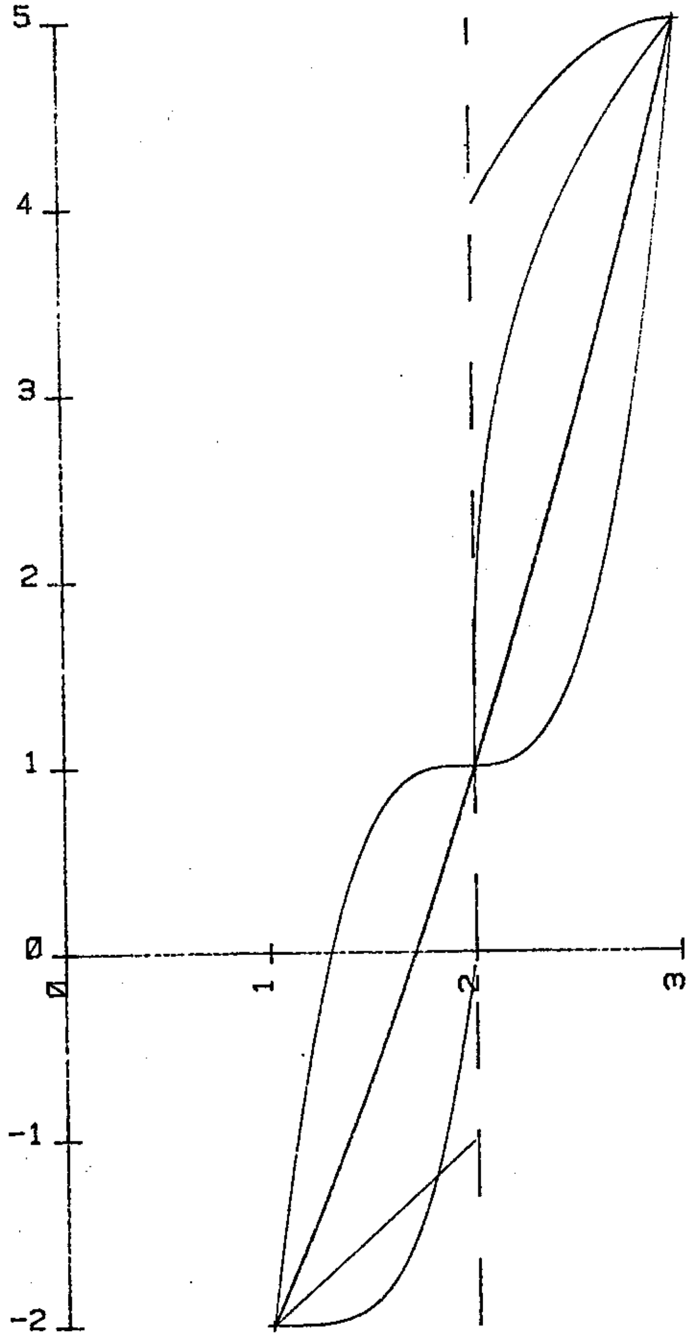
CONTINUITE

1. Approche du probleme

Comment tracer la representation graphique d'une fonction?

Soit f strictement croissante sur [1, 3], avec

$f(1)=-2 \quad f(2)=1 \quad f(3)=5$



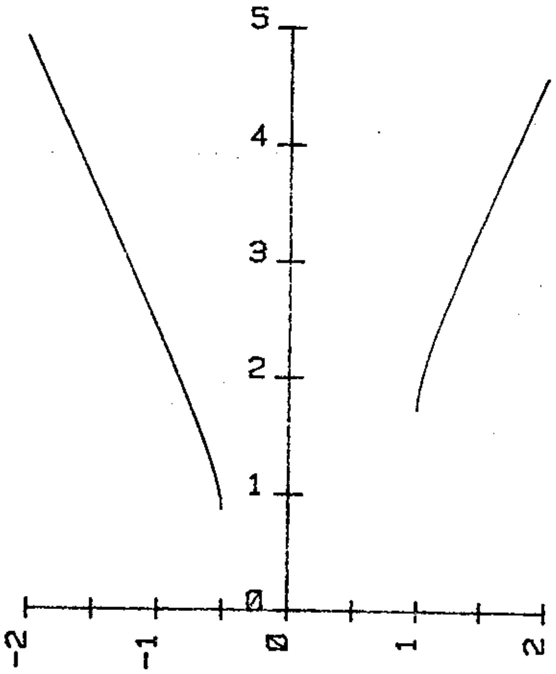
Quel dessin choisir? Comment distinguer ces quatre traces?

La notion de continuite va permettre de determiner s'il est necessaire de lever la plume. Le trace se fait-il de maniere continue ou comporte-il des sauts?

2. Comment definir la continuite en un point?

2. 1. Premiere condition necessaire

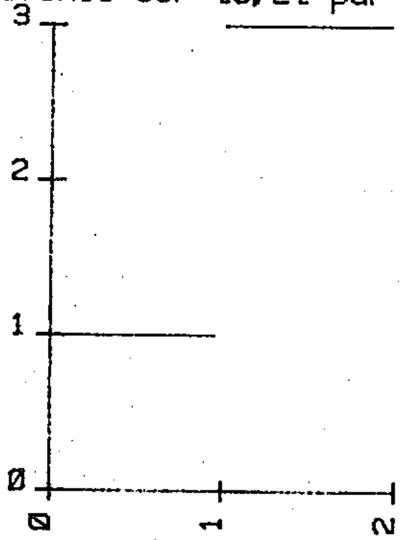
Soit f definie par $f(x)=\sqrt{x(2x+1)}+\sqrt{x(x-1)}$ sur [-2, 2]



La plume se leve pour tracer le point d'abscisse 0. Pourquoi ?
Pour qu'une fonction soit continue en a, il faut qu'elle soit definie "autour de"a.

2. 2. Deuxieme condition necessaire

Soit f definie sur [0, 2[par $f(x)=E(x)-E(-x)$

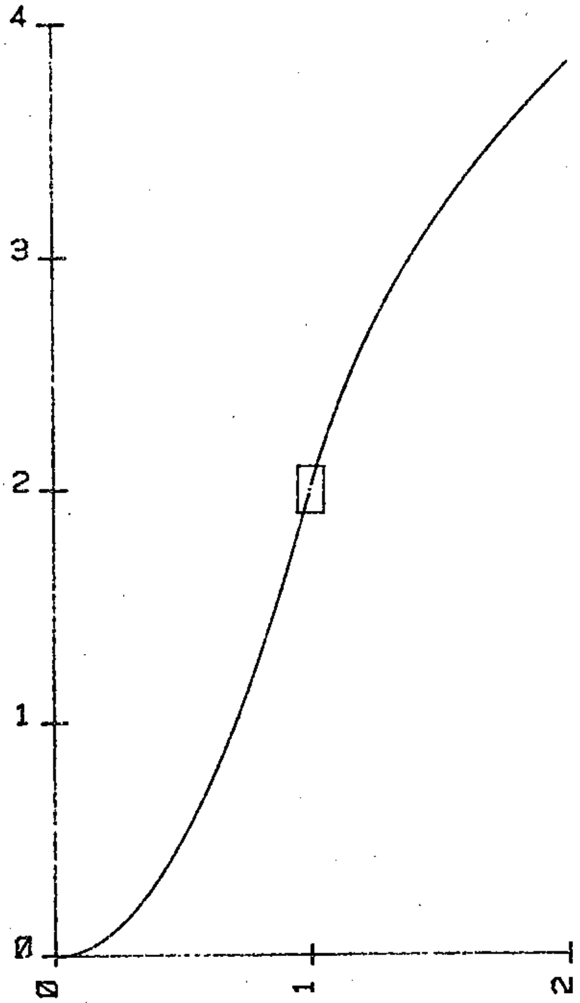


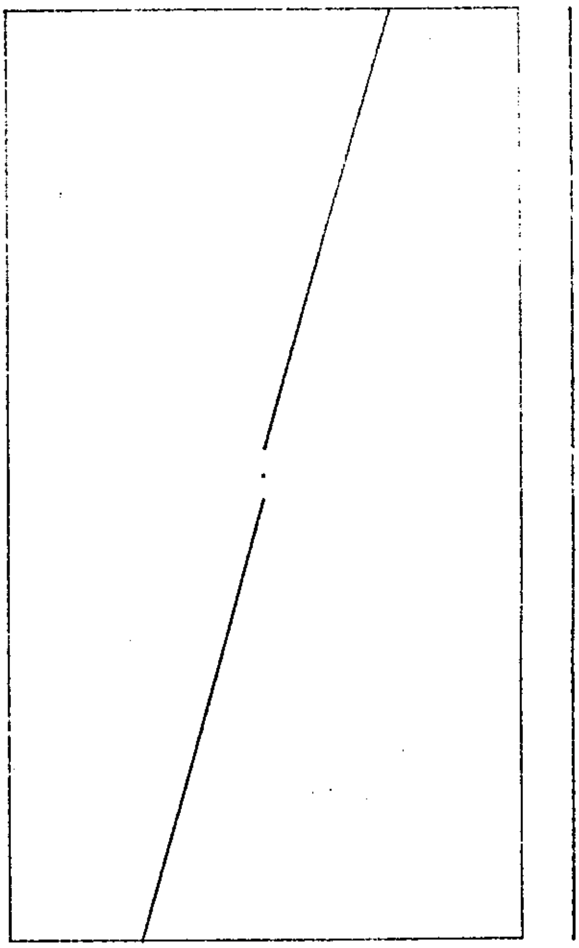
La plume se leve pour tracer le point d'abscisse 1 et pourtant f est definie sur [0, 2[, donc"autour de"1.
La premiere condition n'est donc pas suffisante. Pourquoi?

Pour qu'une fonction soit continue au point d'abscisse a, il faut que, pour x"voisin de"a, f(x) soit defini et "voisin de"f(a)

2. 3. Necessite de preciser le vocabulaire

Que signifie, en mathematiques, "voisin de"?
Est ce que 1, 01 est voisin de 1? Et 0, 9? 1, 001? 0, 99999?
Soit f definie sur]0, 2[, telle que f(1)=2,
et dont la representation graphique est:





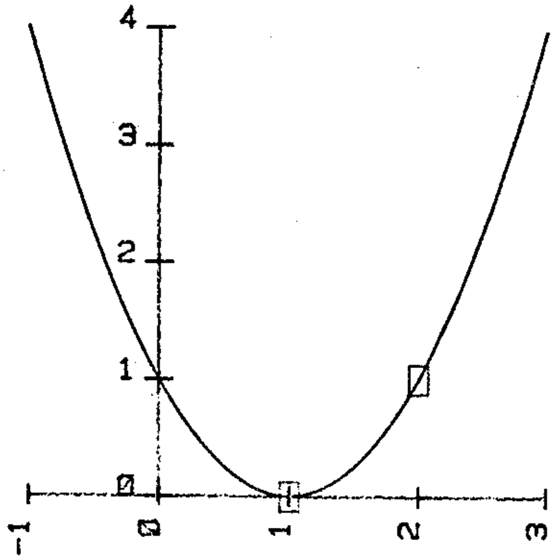
Agrandissement 20 fois

Regardons sur l'axe des ordonnees (agrandi 20 fois) quelles valeurs prend l'ordonnee y=f(x) d'un point de la representation graphique de f dont l'abscisse x parcourt l'intervalle ouvert

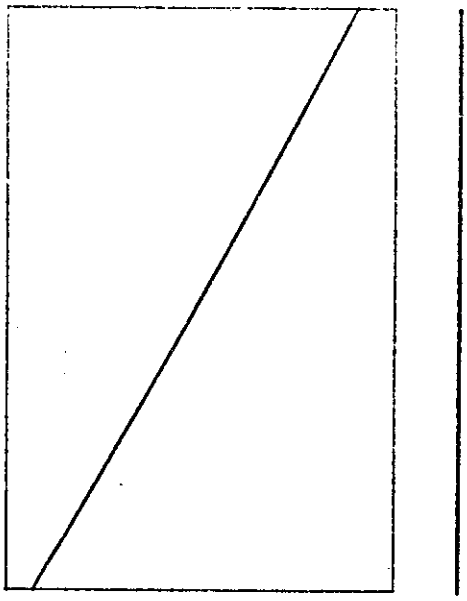
]1-0, 05 , 1+0, 05[

Que constate-t-on ?
Pour x"voisin de"1, f(x) est-il"voisin de"f(1)=2 ?

Soit f definie sur $]-1,3[$ par $f(x)=(x-1)^2$

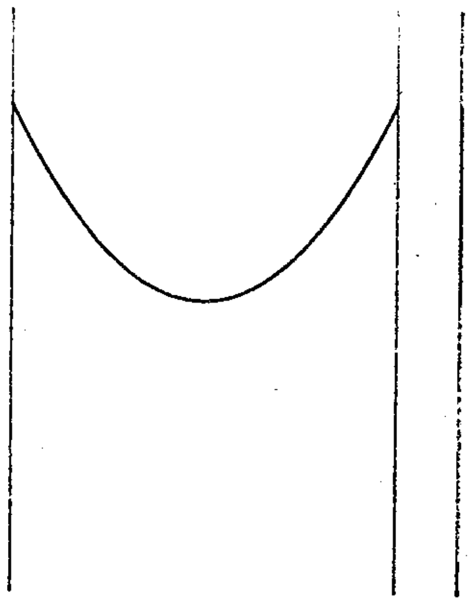


f(2)=1



Agrandissement 20 fois

f(1)=0



Agrandissement sur Ox: 20 fois
sur Oy: 300 fois

Que constate-t-on ?
A quelle condition necessaire et suffisante une fonction f est-elle continue en a ?

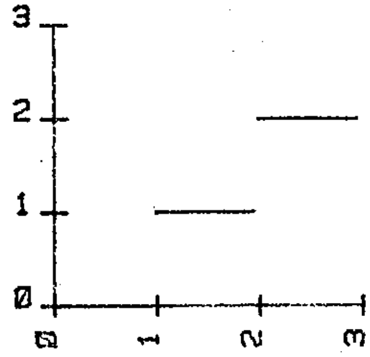
2. 4. Definition

Soit f definie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a si et seulement si, pour tout intervalle ouvert J de centre f(a), il existe un intervalle ouvert I de centre a tel que, pour tout x appartenant a I, f(x) appartienne a J

3. Continuite a droite , a gauche

Soit f definie sur [0, 3] par $f(x)=E(x)$

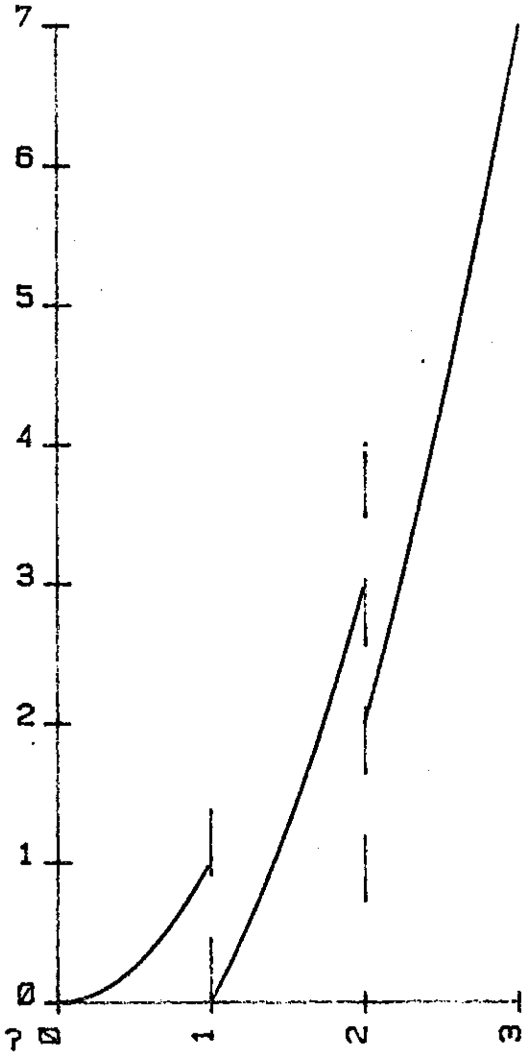
$f(0)=0$ $f(1)=1$ $f(2)=2$ $f(3)=3$



f est-elle continue en 1 ? Que remarque-t-on ?

Soit g definie sur [0, 3] par $g(x)=x^2-E(x)$

$g(0)=0$ $g(1)=0$ $g(2)=2$ $g(3)=6$



g est-elle continue en 1?

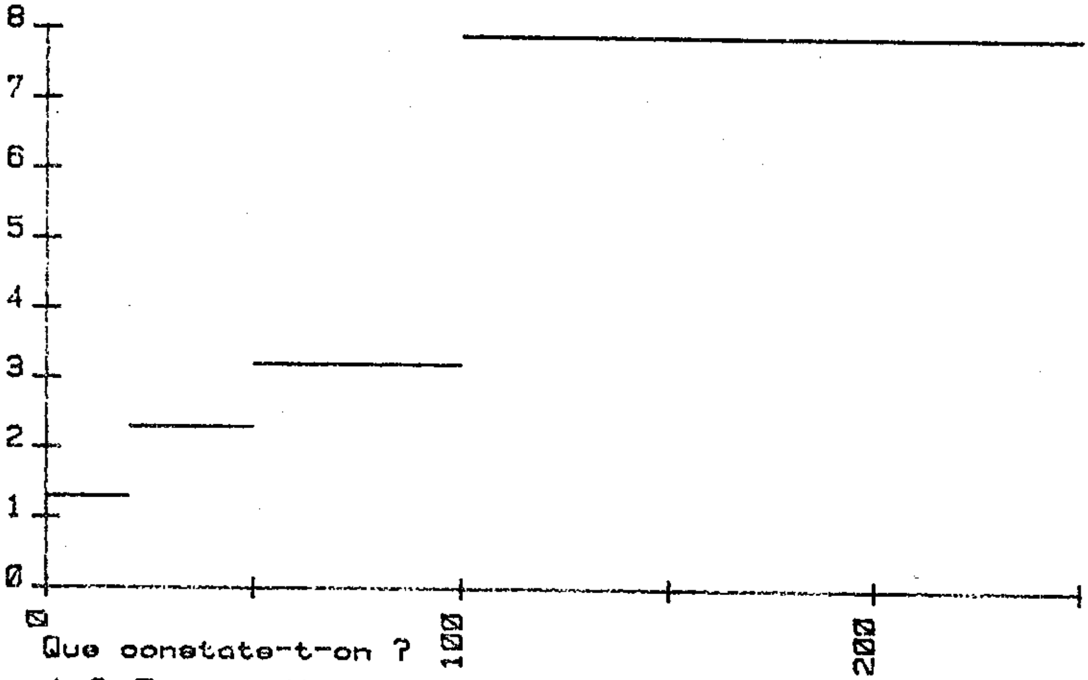
f et g ne sont pas continues en 1.

f et g sont continues a droite, mais pas a gauche, en 1

4. Quelques situations concretes

4. 1. Tarif postal (au 1-10-79)

Poids d'une lettre (en grammes)	]0, 20]	]20, 50]	]50, 100]	]100, 250]
Affranchissement (en francs)	1, 30	2, 30	3, 20	7, 80

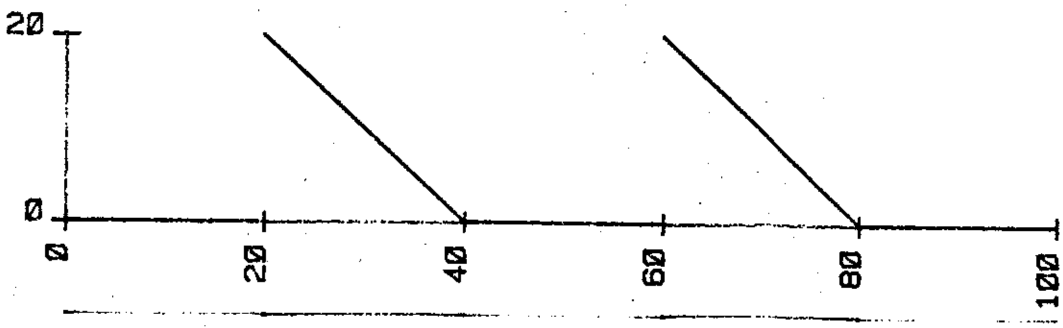


Que constate-t-on ?

4. 2. Temps d'attente a un feu rouge

Un cycliste arrive a un feu bicolore (rouge-vert) a l'instant t.
Les feux rouge et vert durent, chacun, 20 secondes.
A l'instant t=0, le feu passe au vert.
Soit f l'application qui a tout instant t (en secondes) de [0, 100] associe la duree f(t) de l'attente du cycliste.

f(0)=0 f(t)=0 sur [0, 20[f(20)=20 f(40)=0



Que remarque-t-on ?

POURCENTAGE, CALCULETTES ET VIEILLES IDÉES

Serge GOUIN

Lycée - Rochefort sur Mer

De vieilles idées toujours à la mode.

"Le prix d'un produit a augmenté de 10 % en 1978 et de 12 % en 1979. De quel pourcentage a-t-il augmenté pendant ces deux ans ?"
Silence prudent des élèves. Un courageux : "Ca peut pas être 22 %, c'est trop simple !"

C'est par de petits problèmes de ce genre que j'ai l'habitude d'inaugurer le cours de TA sur les exponentielles. Nous avons là une bonne occasion de faire entrer les mathématiques dans la vie, particulièrement en troisième et en seconde avec les applications linéaires et la proportionnalité, en terminale avec les suites exponentielles, et évidemment en classes de G.

L'utilisation des pourcentages relève moins de la logique que d'une tradition née à une époque où on ignorait tout des machines à calculer (pourquoi en effet prendre 100 comme base au lieu de 1000 ou simplement 1 ?). Dire que y vaut t% de x signifie que $y = x \times \frac{t}{100}$; si t = 8, on multiplie x par 8/100, ou 0,08. Où les difficultés commencent, c'est lorsqu'on dit que y vaut t% de plus que x : alors $y = x + x\,\frac{t}{100}$. On a à effectuer une multiplication, puis une addition. Mais on voit que $y = x(1 + \frac{t}{100})$. 1 + t/100 est le coefficient multiplicateur. A l'époque de l'électronique, l'usage de ce coefficient permet un calcul plus rapide.

Il y a quelques années, le gouvernement décidait une diminution de 2% du prix de certains articles par réduction de la TVA. J'achetai un objet dont l'ancien prix était 76,50 F ; la vendeuse calcula sur sa machine 2% de 76,50, qu'elle retrancha à 76,50. Alors qu'il aurait suffi pour avoir le nouveau prix de multiplier l'ancien par 0,98 (1 - 2/100 = 0,98).

Supposons maintenant qu'un produit valant 100 F augmente de 8%, puis de 10%. Son prix sera d'abord de 108 F, puis de 108 + 10,8, soit 118,8 F. Il aura donc augmenté en tout de 18,8%, alors que 8 + 10 = 18.

Les pourcentages ne s'ajoutent pas.

En utilisant le coefficient multiplicateur, le nouveau prix est 100 x 1,08 x 1,10. On a donc des multiplications successives. Il en résulte que si l'augmentation est d'abord de 10%, puis de 8%, le nouveau prix est le même que si elle est d'abord de 8% puis de 10%.

Si un nombre subit n augmentations successives de t%, il suffit de multiplier sa valeur initiale par $(1 + t/100)^n$ pour avoir sa valeur finale. On obtient une suite géométrique de raison $(1 + \frac{t}{100})$.

Exemples.

1°) La population d'un pays augmente de 3% par an. De quel pourcentage augmente-t-elle en 20 ans ?

Si P_n est la population au bout de n années, alors $P_{20} = P_0(1,03)^{20}$. Une calculatrice possédant la touche $\boxed{y^x}$ donne : $(1,03)^{20} \simeq 1,81$. L'augmentation est donc de 81%, environ.

Au bout de combien d'années double-t-elle ? Si n est le nombre d'années cherché, $(1,03)^n = 2$, donc $\log(1,03)^n = \log 2$, $n\log 1,03 = \log 2$, $n = \dfrac{\log 2}{\log 1,03} \simeq 23,45$. Elle fait donc plus que doubler en 24 ans.

2°) On vous présente une facture sur laquelle vous lisez : montant TTC : 1884 F, dont TVA 30% du prix HT. Quel est le montant HT ?

$HT \xrightarrow{\times 1,3} TTC$ donc $TTC : \xrightarrow{:1,3} HT$ $HT = 1449,23$.

D'apparents paradoxes

En bon citoyen, vous avez réussi une année à réduire de 10% votre consommation de mazout. Malheureusement, l'année suivante, les rigueurs de l'hiver la font remonter de 10%. Avez-vous retrouvé votre consommation initiale ? La réponse est non, puisque celle-ci a été multipliée par 0,9 puis par 1,1, donc par 0,99. Il manque 1%. Cela vient du fait que les premiers 10% ne s'appliquent pas au même nombre que les seconds.

Vous savez d'autre part que l'an dernier l'inflation a été d'environ 12%, ce qui signifie qu'en moyenne le prix des marchandises et des services a augmenté de 12% en un an. On pense couramment que dans ces conditions le franc s'est dévalué de 12%. C'est inexact. Soit F_0 le franc 1979 et F_1 le franc 1980. Pour acheter la même chose, il fallait 100 F_0, il faudra 112 F_1. Donc $100\ F_0 = 112\ F_1$, $F_1 = F_0 \times \frac{100}{112}$, $F_1 = F_0 \times 0,8929$.
La valeur du franc a donc diminué d'à-peu-près 10,71%.

Si vous avez placé 100 F_0 à la caisse d'épargne, au taux actuel de 6,5% l'an, ils sont devenus au bout d'un an $100 \times 1,065\ F_1$, soit $100 \times 1,065 \times 0,8929\ F_0$. $1,065 \times 0,8929 \simeq 0,9509 = 1 - 0,0491$. La perte est donc de 4,91% et non de 5,5% (= 12-6,5).

Il n'empêche, et là le bon sens prend sa revanche, que si vous voulez que votre capital se conserve, vous devez le placer au taux de 12% annuels.

Vous avez sans doute entendu parler de cette affaire de publicité mensongère à propos du plan d'épargne-logement. La banque sert 4% d'intérêt, et en fin de contrat, on reçoit une prime égale au montant total des intérêts perçus ce qui, disait la publicité, double les intérêts donc les porte à 8%. N'abordons pas ici le problème de la valeur acquise par une suite d'annuités constantes, qui est du domaine exclusif des classes de G, et pour simplifier, supposons un seul versement de 1000F. Au bout de 4 ans, le livret contient : $1000 \times (1,04)^4$, soit 1169,86 F. Total des intérêts versés = prime = 169,86 F.

Capital final : 1339,72 F.

Avec un intérêt de 8%, au bout de 4 ans, le livret contiendrait

$$1000 \times (1,08)^4, \text{ soit } 1360,49 \text{ F.}$$

La publicité est donc mensongère. Cette différence provient du fait que la prime n'est pas elle-même porteuse d'intérêts.

Laquelle croît le plus vite ?

De 1968 à 1980, la population d'une ville A est passée de 12000 à 17000 habitants. De 1960 à 1980, celle de la ville B a crû de 45000 à 68000 h. Laquelle des deux a connu l'expansion la plus forte ?

On peut chercher le taux annuel d'augmentation de la population de chacune des deux villes, en supposant ce taux constant ; on calcule donc une sorte de taux moyen sur 12 ou 20 ans, qui n'est évidemment pas la moyenne arithmétique des taux annuels.

Pour A : $17000 = 12000\,(1 + t)^{12}$

Pour B : $68000 = 45000\,(1 + t')^{20}$

$$(1 + t)^{12} = \frac{17}{12} \qquad \log\,(1 + t) = \frac{1}{12} \log \frac{17}{12}$$

La machine à calculer donne : $\log(1 + t) = 0,012605...$

$1 + t = 1,02946$ $\qquad t = 2,95\%$

Pour B, on trouve de même : $t' = 2,09\%$

La ville A a donc crû plus vite que la ville B.

On pourrait citer bien d'autres situations où interviennent ces pourcentages d'un usage si courant. C'est l'un des domaines où les calculatrices de poche libèrent l'utilisateur de calculs contraignants et lui permettent d'élargir le champ de ses investigations. Il serait dommage de ne ne pas en profiter ; ce ne sont pas nos collègues d'économie ou de géographie (entre autres utilisateurs)qui s'en plaindront, car si leurs élèves croient que les pourcentages s'ajoutent, ils risquent d'avoir une idée singulièrement faussée des phénomènes économiques.

RÉGIONALE DE POITIERS — La Régionale et la Presse

L'enseignement des mathématiques et l'emploi des calculatrices électroniques

LA POSITION DES PROFESSEURS DE L'ACADÉMIE DE POITIERS

Nouvelle République 12-XII-79

A propos de l'article paru dans nos colonnes sur l'introduction dans l'enseignement des calculatrices (« Les calculatrices électroniques utilisées au Bac 80 : une ère nouvelle pour les mathématiques », « N.R. » du 5 décembre 1979), Mme C. Bloch, présidente de la régionale de Poitiers de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.), nous adresse les remarques suivantes :

« *D'abord sur la décision d'autoriser l'usage des calculatrices, en particulier aux épreuves du baccalauréat. Cette décision était certes souhaitée et attendue par notre association. Mais la circulaire ministérielle, datée du 2 octobre, n'a été publiée au Bulletin Officiel que le 29 novembre, plus de deux mois après la rentrée des classes.*

Une fois de plus, les professeurs, premiers intéressés, sont avertis les derniers d'une décision prise sans les consulter et qui concerne directement le travail de l'année en cours, alors que les fabricants de calculatrices étaient au courant puisqu'ils avaient déjà commencé à envoyer leurs prospectus publicitaires.

Naturellement, cette décision subite pose de nombreux problèmes : aux familles (choix et coût de la machine) et aux enseignants (choix des sujets d'examen, par exemple).

La circulaire, très vague quant aux types de machines qui seront autorisés, indique par contre que, suivant la nature du sujet, on pourra interdire l'usage tant des calculatrices que des tables numériques et de la règle à calcul ! Dans ces conditions il est à craindre que, pour éviter des difficultés innombrables (de surveillance entre autres), les auteurs de sujets renoncent à toute question numérique, ce qui va à l'encontre de l'évolution que nous souhaitons vers un aspect plus concret des mathématiques. »

D'autre part, la régionale de l'A.P.M.E.P. de Poitiers a adressé une circulaire à tous les enseignants de mathématiques de l'Académie, dans laquelle elle écrit notamment :

« *Doit-on considérer la calculatrice comme une règle à calcul perfectionnée, comme semble l'indiquer la circulaire, ou n'est-ce pas là un auxiliaire pédagogique qui pourrait, à plus ou moins long terme, modifier en profondeur les finalités de l'enseignement des mathématiques, en accentuant l'aspect quantitatif qu'il avait un peu tendance à négliger ?*

D'autre part, n'appartient-il pas aux enseignants de mathématiques de démythifier l'informatique, d'éviter que chaque élève ne devienne un simple exécutant presse-bouton, que ce soit sur une calculatrice de poche ou sur un micro-ordinateur ?

Pour cela, les enseignants doivent être formés à la pensée algorithmique, s'en est-on préoccupé ? Les I.R.E.M. avaient commencé à faire ce travail, les moyens de le poursuivre leur en ont été ôtés juste avant la rédaction de cette circulaire...

Il faudrait profiter de l'apparition des calculatrices pour orienter les nouveaux programmes vers des mathématiques plus appliquées, plus près de la vie, en les rédigeant en termes d'objectifs (pas seulement de connaissances, mais aussi de savoir-faire et de comportement) de façon à donner aux enseignants une véritable liberté pédagogique, et aux élèves du goût pour les mathématiques. »

Les calculatrices ... enfin

Position de la Régionale de Poitiers (29-XI-79)

Une circulaire ministérielle du 2 Octobre 1979, qui vient tout juste de paraître au Bulletin Officiel de l'Education Nationale, a décidé qu'à partir de 1980 "les calculatrices électroniques seront autorisées dans tous les examens et concours relevant du Ministère de l'Education".

Il s'agit pour nous d'une mesure très attendue.

Pourtant quelques observations s'imposent :

1) LA DATE DE PARUTION DE LA CIRCULAIRE

Plus de deux mois après la rentrée scolaire, une circulaire ministérielle concernant le travail de l'année n'est toujours pas officielle. Ainsi les enseignants qui sont parmi les premiers intéressés, seront une fois de plus prévenus les derniers. De plus, ils n'ont été ni consultés, ni préparés à une telle mesure dont les conséquences sont considérables.

D'autre part les familles ont depuis longtemps acheté tables numériques et règles à calcul, dépenses inutiles et regrettables.

2) LES MODELES DE CALCULATRICES SOUHAITABLES

Les familles vont devoir affronter une nouvelle dépense ? Mais laquelle ?

Un passage de la circulaire précise :

"Pour éviter que la mesure objet de la présente circulaire ne devienne une cause de surenchères, un effort d'information devra être fait, à tous les niveaux, à l'intention des familles, afin qu'elles sachent qu'aucun type de machine n'est imposé de façon règlementaire et qu'il n'est pas nécessaire qu'elles portent leur choix sur un modèle perfectionné et onéreux

Les capacités de calcul suivantes, bien que limitées sont en effet suffisantes pour les épreuves dont il s'agit :

- *quatre opérations*
- *racine carrée*
- *fonctions usuelles (trigonométrie, logarithme, exponentielle...*
- *mémoire avec entrée en plus ou en moins*
- *changement de signe*
- *notation scientifique (virgule flottante)".*

Mais :

- aucune mesure rectorale correspondant à "l'effort d'information" n'a été prise
- dans certains pays (Suède, RFA) l'équipement des élèves en calculatrices est pris en charge par l'Etat
- l'important n'est pas la machine, mais ce que les utilisateurs en feront !

3) UTILISATION DES CALCULATRICES

Un autre passage de la circulaire dit :

"Toutefois dans certains cas particuliers, en fonction du sujet proposé, l'interdiction des calculatrices électroniques pourra être prononcée. Dans cette hypothèse, l'emploi de la règle à calcul et des tables de fonctions sera également interdit".

Qui prononcera cette interdiction ?
En fonction de quels critères ?
N'est-ce pas là le moyen de reprendre d'une main ce que l'on a accordé de l'autre ?

"Il appartiendra aux auteurs de sujets et aux membres des commissions de choix de sujets de proposer des épreuves qui ne puissent en aucune façon favoriser les utilisateurs de machines plus perfectionnées".

Le danger pour nous est que l'on supprime tout aspect numérique des sujets pour être sûr de ne léser personne ! Moyennant quoi on fera encore un pas vers l'abstraction et on coupera encore plus l'enseignement de la vie.

4) CALCULATRICES ET ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, FORMATION DES ENSEIGNANTS

Doit on considérer la calculatrice comme une règle à calcul perfectionnée, comme semble l'indiquer la circulaire, ou n'est-ce pas là un auxiliaire pédagogique qui pourrait, à plus ou moins long terme, modifier en profondeur les finalités de l'enseignement des mathématiques, en accentuant l'aspect quantitatif qu'il avait un peu tendance à négliger ?

D'autre part n'appartient-il pas aux enseignants de mathématiques de démysthifier l'informatique, d'éviter que chaque élève ne devienne un simple exécutant presse-bouton, que ce soit sur une calculatrice de poche ou sur un micro-ordinateur.

Pour cela les enseignants doivent être formés à la pensée algorithmique, s'en est-on préoccupé ? Les IREM avaient commencé à faire ce travail, les moyens de le poursuivre leur en ont été ôtés juste avant la rédaction de cette circulaire...

Il faudrait profiter de l'apparition des calculatrices pour orienter les nouveaux programmes vers des mathématiques plus appliquées, plus près de la vie, en les rédigeant en termes d'objectifs (pas seulement de connaissances, mais aussi de savoir-faire et de comportement) de façon à donner aux enseignants une véritable liberté pédagogique, et aux élèves du goût pour les mathématiques.

RÉGIONALE DE LIMOGES

Rencontre avec les Associations de Spécialistes

LES RESPONSABLES DES ASSOCIATIONS de SPECIALISTES
de l'ACADEMIE de LIMOGES

se sont réunis le mercredi 2 Avril 1980 pour débattre de la formation continue des enseignants.

Ils ont constaté qu'il existe d'importants besoins, exprimés ou non, à tous les niveaux d'enseignement. Ces besoins sont suscités par une évolution rapide des Sciences et Techniques, par une évolution de la classe (nouvelles pédagogies liées à l'audiovisuel par exemple) et du public sollicité par un environnement extérieur porteur d'informations multiples et disparates.

De ce fait, ils ont été amenés à préciser les conditions dans lesquelles les structures de formation continue (I.R.E.M. ou autres) doivent être développées :

- La formation continue ne doit pas entraîner un accroissement du temps de travail actuel des enseignants.
- Elle doit respecter le volontariat.
- Les enseignants doivent être maîtres des modalités et des objectifs de leur formation continue.
- Une formation continue est une entreprise à long terme qui doit permettre à chaque enseignant de participer à des recherches pédagogiques. Elle ne doit pas être constituée d'actions ponctuelles sans lien, ni suite.
- Mais elle ne peut, en aucun cas, être un palliatif à une formation initiale des enseignants insuffisante.

Les Associations soussignées invitent les enseignants à adopter une attitude critique vis-à-vis de la formation qui peut leur être proposée actuellement : ils doivent, en particulier, refuser toute formation imposée qui ne correspondrait pas à leurs besoins.

« Les mathématiques dans la vie, dans la ville, dans la classe » :

thème d'une exposition salle Gérard-Philipe

République du Centre 15-I-80

Jamais des élèves ne s'étaient montrés aussi passionnés par les mathématiques que lundi après-midi, à la salle Gérard-Philipe, où l'Institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques présentait son exposition consacrée aux « mathématiques dans la ville, dans la vie et dans la classe ».

Faites de panneaux informatifs, de jeux et de collages, cette exposition, qui circulera dans toute l'académie jusqu'au mois de juin, voulait surtout montrer un aspect des mathématiques, autre que celui des problèmes rebutants, en rapport étroit avec les choses de la vie. Ainsi, des panneaux montraient les rapports entre les maths et la littérature, par l'intermédiaire de poètes comme Desnos et Queneau ; d'autres tentaient d'expliquer les difficiles relations entre cette science et les femmes et un jeu permettait même de déterminer son « sexe mathématique ».

D'ailleurs, les « connexions entre les mathématiques et les phénomènes de la vie » sont infiniment plus développées qu'il n'y paraît à première vue ; citons la poésie, l'électronique, mais aussi la musique, pour fabriquer, décrypter uneœuvre, la peinture avec les diffiérents procédés de papiers peints, etc. Et l'intérêt de cette exposition est de faire découvrir, aux élèves, parents et professeurs, un autre aspect des mathématiques mais aussi de les initier à la logique, notamment par l'utilisation du « LOGO », un petit ordinateur.

Avant de se déplacer au centre culturel de Saran, cette exposition présente à la salle Gérard-Philipe jusqu'au 19 Janvier, proposera une séance de films, mercredi matin, et un stand samedi montrera comment construire un mini-ordinateur.

La logique des mathématiques.

Les Nouvelles d'Orléans (25-I-80)

MATHEMATIQUES...

LES MATHS DANS LA VIE

Aucun mathématicien ne sera un mathématicien complet s'il n'est pas aussi un peu poète.
Weierstrass.

Weierstrass était un mathématicien allemand du XIX^e^ siècle. c'était donc un connaisseur en matière de mathématiques et certainement aussi de poésie. Nous ne sommes pas bien habitués à lier les mathématiques à la poésie et chacun d'entre nous n'a pas toujours gardé un excellent souvenir de ses profs de maths. En général, même, quand on évoque des souvenirs scolaires, il s'y mêle un peu d'émotion, sauf pour les maths, contre lesquelles la rancune est souvent tenace, rancune qui concerne aussi bien les ci-devant problèmes de robinet que les équations du second degré. Et puis, on s'est bien habitués a considérer les « matheux » comme une espèce un peu spéciale de farfelus abstracteurs qui possèdent le pouvoir mystérieux de lier commerce avec un monstre bien particulier : les mathématiques.

Néanmoins, la semaine dernière on a vu des gens, des parents, des élèves (qui en font bien assez comme ca à l'école, au collège, au lycée !) venir plusieurs fois faire des maths librement, avec curiosité, avec joie, avec plaisir. Personne ne les y avait contraints, ni par la menace, ni par une promesse de récompense. Ils étaient tout simplement un peu tombés amoureux d'une exposition appelée :

Les maths dans la vie
Les maths dans la ville
Les maths dans la classe

Elle est proposée par des profs de maths de la région, ceux de l'APM (Association des Professeurs de Mathématiques) et ceux qui travaillent à l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Elle est faite pour tous, les jeunes et les moins jeunes, les élèves et les autres. On n'y court qu'un seul risque, celui de sentir certaines convictions faiblir, celui de se prendre à quelques jeux (sinon à tous). Car c'est à partir du dessin, de la musique, de la littérature, du jeu qu'on est invité à s'installer dans une activité mathématique. Et cette installation on peut la faire tout seul, en toute liberté.

Alors, il vous arrivera bien de penser, à vous aussi, que tout cela, tout ce qui est montré dans cette exposition est bien éloigné des maths que les enfants font à l'école. Et c'est bien un peu vrai, bien que beaucoup d'enseignants essaient de rompre avec ces maths un peu arides, pour faire connaître aux élèves certaines de ces activités. C'était un des objectifs fondamentaux des IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) que d'essayer et d'expérimenter ces nouvelles approches. Beaucoup d'enseignants y ont travaillé en y consacrant souvent bien plus de temps que celui que leur octroyait l'administration (2 ou 3 heures par semaine) Ce travail, il n'est plus question de le financer. Par cette exposition, les profs de maths essaient de nous montrer que le « jeu en valait la chandelle ». Nous avons tous besoin d'une formation vivante et active.

Si vous êtes un peu curieux, pour rencontrer ces enseignants et pour voir ce qu'ils proposent, l'exposition est encore dans la région d'Orléans pour quelques jours :

DES BULLES, DES CUBES ET UN ORDINATEUR POUR FAIRE CHANTER LES MATHÉMATIQUES

Nouvelle République 9/10-II-80

Je ne sais pas ce qu'est une « fractale ». Il y a belle lurette que je ne flirte plus avec les fractions et que le triangle de Pascal est sorti de mes pensées. Bref, j'applique à la virgule près la formule classique : la culture, c'est ce qui reste quand on a tout oublié. Et je n'ai pas beaucoup de mémoire, tout particulièrement du côté de la bosse des maths...

Faut dire que je n'ai pas connu les gens de l'I.R.E.M. (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et que mes professeurs (que je respecte comme il se doit) ne passaient pas leurs cours à faire des petits dessins au tableau noir de mes sombres reflexions. Les gens de l'I.R.E.M. et leurs copains de l'A.P.M.E.P. (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) en font des tas et même, mais oui m'sieu, ils jouent avec des cubes quand ils ne font pas des bulles...

DANGER :

RECHERCHES MATHEMATIQUES

Parce que ces drôles de mathématiciens-là ont décidé que leur discipline n'est pas aussi barbare et abstraite que l'ont pensé des générations de lycéens. Au début, le ministère a été d'accord avec eux et leur a accordé des crédits, histoire, lors de la réforme des mathématiques, de recycler les professeurs et de faire des ateliers de recherche. Allez donc savoir ce qu'il y avait de caché derrière les intégrales... Toujours est-il que les crédits se sont taris et que les matheux curieux ont dû continuer tout seuls.

Basés à Orléans, ils sont arrivés en Touraine, en commençant par le Centre d'Animation des Fontaines où les écoliers et leurs professeurs sont venus leur rendre visite. Au mur, un accueil terrible : les lycéens d'Orléans ont fait des statistiques sur leurs professeurs, style enquête SECED, Louis Harris ou IFOP. Question ; **« Quel est votre degré de satisfaction, de compréhension, etc... face aux profs ? »** C'est 68, revu et corrigé par l'ordinateur. Une bonne mise en condition pour les visiteurs.

Première porte : un ordinateur, qui joue au morpion. Noble tâche, s'il en fut, en matière lycéenne. Là n'est pas le but de la démonstration : **« Nous voulons permettre aux enfants l'approche de l'ordinateur. Plus cela ira, plus la calculatrice sera utilisée. Il est absurde de faire perdre du temps à des élèves sous prétexte qu'ils ne savent pas dessiner une courbe point par point, alors que, s'ils font une carrière d'ingénieur, ils utiliseront exclusivement des machines comme celle-ci. »** Un point de vue qui n'est pas partagé par tout le monde, on s'en doute...

LUDIQUE, LOGIQUE :

MEME COMBAT

Deuxième porte tout aussi attrayante : quand les jeux ludiques mènent à la logique. Des cubes qui n'en sont pas, des puzzles qui disent des tas de choses. On fait rouler des billes qui représentent des chiffres, elles forment des silhouettes qui sont des résultats. **« Nous sommes surpris par les réactions des jeunes qui bien souvent ne s'arrêtent pas au jeu mais veulent savoir en quoi ils ont un rapport avec les maths. »** Sur les tableaux, les figures se déforment. Sur un autre, un couché de soleil stylisé n'est rien d'autre que la décomposition des nombres premiers !

Plus loin, Vasarely, accompagné de son copain Escher, montre les rapports entre l'art et les maths. Plus loin c'est la musique. Ailleurs, des assemblages de fil de fer trempés dans l'eau savonneuse deviennent des volumes extraordinaires. C'est l'abstrait devenu beau, la question qui trouve sa réponse.

Petite application subversive ?) des maths décidément accommodées à toutes les sauces : comment prouver mathématiquement qu'une fille a moins de chances de réussite dans les carrières matheuses qu'un homme, au moyen d'un jeu de l'oie !

« Nous voulons montrer les maths que l'on ne fait pas tous les jours en classe, mais que l'on aimerait faire » disent les animateurs. Sur le livre d'or, leurs jeunes visiteurs semblent d'accord.

Il y aura pourtant sûrement des détracteurs. Ceux qui, par exemple regrettent que les maths priment sur les lettres. Tout près de l'ordinateur il y avait un joli panneau qui disait : **« Aucun mathématitien ne sera un mathématitien complet si il n'est pas aussi un peu poète »** (sic). Et bon en orthographe ?

Patrice de Sarran

ABONNEMENT

L'abonnement au PLOT est valable pour l'année civile.

Prix : membres de l'APMEP : .... 15 F

Personnes non membres de l'APMEP, établissements scolaires, bibliothèques..... 30 F

Règlement : par virement postal de préférence, à adresser :

- pour les membres de l'APM d'une des trois Régionales, à la Régionale dont ils dépendent (voir adresse et CCP ci-contre).
- pour les autres, à :
  Daniel FREDON 40, rue Regnard - 87100 LIMOGES
  le chèque étant libellé à l'ordre de
  Régionale APMEP de Limoges. CCP Limoges 117 66 R

ORLEANS-TOURS

CCP : Régionale APMEP d'Orléans-Tours. La Source 1440 09 X

Siège Social : CRDP 55, rue N.D. de Recouvrance - 45000 ORLEANS

Adresser toute correspondance à :

André Rouchier. Irem. Université - 45045 ORLEANS Cedex

Président : Pierre CHRISTOFLEAU (54).77.52.06
Résidence St Exupéry. 10, rue Jean Duverger
41100 VENDOME

Trésorier : Jean-Louis BON (54).46.34.03.
Les Milleries. Mont près Chambord - 41250 BRACIEUX

Secrétaires :

André DUTHILLEUL
13, rue du Domaine - 37300 JOUE LES TOURS

Marie-Laure GIORGI-DARCHE (38).62.22.85
1, rue Albert Laville - 45000 ORLEANS

Pascal MONSELLIER (38).65.11.77
Les Tourelles. Marcilly-en-Villette
45240 LA FERTE SAINT AUBIN

Guy PELLE (38).91.14.98
170, rue de la Verdelle. "Les Breteaux". Mardié
45430 CHECY

Jacques PINAUD (37).46.74.55
Le Coq Fleuri. Fermaincourt - 28500 VERNOUILLET

André ROUCHIER (38).63.22.16 poste 624
Irem. Université - 45045 ORLEANS Cedex

Délégués locaux :

18 - BOURGES : J.P. HEMMER 9, rue Lamartine - 18000 BOURGES
VIERZON : A. PALAT 6, rue du Crot à Foulon - 18100 VIERZON
St AMAND : G. RAY 34, rue des Buissonnets - 18200 St AMAND

28 - CHARTRES / CHATEAUDUN : A. GOUGEON 35, rue des Bas Menus 28000 CHARTRES
DREUX : J. PINAUD Le Coq Fleuri. Fermaincourt
28500 VERNOUILLET
NOGENT le ROTROU : J.C. MILCENT 11, rue Paul Deschanel
28400 NOGENT le ROTROU

36 - ARGENTON : A. LOUIS Paumulé le Péchereau - 36200 ARGENTON
CHATEAUROUX : M. PERRIN 9/100 Avenue de Paris
36000 CHATEAUROUX

37 - INDRE et LOIRE : V. BOUTEILLER 150, rue Chantepie
37300 JOUE LES TOURS

41 - BLOIS : V. OLIVIER 3, rue Lathan - 41000 BLOIS
ROMORANTIN : P. LEGAI 307, rue René Crozet
41200 ROMORANTIN
VENDOME : C. BLCANE 72 ter rue du Cdt Verrier
41100 VENDOME

45 - MONTARGIS : R. HEHERY 6, rue des Ormeaux - 45200 MONTARGIS
ORLEANS & GIEN : A. ROUCHIER Irem, Université -
45045 ORLEANS Cedex
PITHIVIERS : D. NAUDET Dimancheville - 45390 PUISEAUX

LIMOGES

CCP : Régionale APMEP de Limoges. Limoges 117 66 R

Secrétariat : IREM 123, rue A. Thomas
87000 LIMOGES (55).79.24.12

Président d'honneur : Mr ROGERIE doyen actif de l'APMEP (95 ans
22, rue L. Codet 87200 St JUNIEN (55).02.15.69

Président : Mr LABROUSSE 10, rue Rhin et Danube 87100 LIMOGES
(55).37.17.02

Vice-Présidents :

Hte Vienne : Mr FREDON 40, rue Regnard 87100 LIMOGES
(55).79.34.02

Corrèze : Mr BOUTEILLER 7bis, avenue du Président Roosevelt
19100 BRIVE (55).74.20.11

Creuse : Mme MEIGNAL 41, rue A. Grand 23000 GUERET
Mr BOURCY Ecole 23 CHENERAILLES

Secrétaire : Mlle CEAUX 2, rue A. de Vigny 87100 LIMOGES
(55).37.45.74

Trésorier : Mr DUVEAU Rue de l'Alouette 87500 St YRIEIX
LA PERCHE (55).75.07.32

Brochures : Mme ROUGIER 35, avenue de la Vienne 87170 ISLE
(55).32.54.23

Enseignement Elémentaire : Mlle PAILLER 18, rue Puy Las Rodas
87100 LIMOGES

Premier Cycle : Mr CREPIN 94, avenue de Locarno 87000 LIMOGES
(55).33.46.68

Technique : Mme COURTEIX 18, rue Max Dormoy 87000 LIMOGES
(55).01.47.35

Post Baccalauréat : Mr SOURD 58, rue Meissonier 87000 LIMOGES
Mr NICOLAS 29, rue A. Tixier 87100 LIMOGES

Liaisons interdisciplinaires : Mr ROUGIER 35, avenue de la
Vienne 87170 ISLE (55).32.54.23

POITIERS

CCP : Régionale APMEP de Poitiers. Bordeaux 3852 59

Siège Social : CRDP 6, rue Sainte Catherine - 86034 POITIERS

Adresser toute correspondance à D. PORTE (Secrétaire de la Régionale).

Secrétaires des Départementales :

(16) G. MARRON Collège Grande Garenne - 16000 ANGOULEME
(17) M. BLANCHARD Lycée - 17309 ROCHEFORT
G. VARENNE 1, avenue du Cdt Linack - 17690 ANGOULINS/MER
(79) J. FROMENTIN Collège François Rabelais - 79000 NIORT
(86) M. PUYGRENIER La Folie - 86500 MONTMORILLON

Présidente : C. BLOCH (49).41.40.74. 138, rue de la Mérigotte
86000 POITIERS

Secrétaire : M. PUYGRENIER La Folie - 86500 MONTMORILLON

Trésorier : S. PARPAY (49).24.31.70 2, rue Rougier 79000 NIOR

Elémentaire : BELLICOT

Premier Cycle : J. CARTRON Collège Jean Zay - 79000 NIORT
M. PUYGRENIER Collège - 86500 MONTMORILLON

Second Cycle : D. PORTE

Agricole : Mme ELIARD Lycée Agricole de l'Oisellerie
16400 LA COURONNE

Technique : M. FOURNIER 5, rue de la Résidence - 17100 SAINTES

Informatique : G. DESENFANT IUT - 86022 POITIERS
G. BORION Collège de Beaulieu - 86000 POITIERS

Jeux : J. FROMENTIN 17, rue de la Rousille - 79000 NIORT

Formation des maîtres : S. PARPAY - C. BLOCH

Sujets d'examen : D. MARRANT Lycée C. Guérin - 86000 POITIERS

Conseil d'administration de l'Irem : M. PUYGRENIER