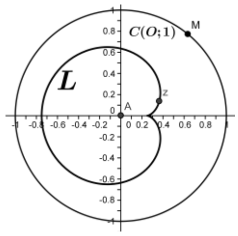
TS_2 – Troisième devoir de mathématiques – 7 Janvier 2013

On désigne par **C** l'ensemble des nombres complexes. C(I ;r) est le cercle de centre I et de rayon r. Avec Géogébra 4 il faut parfois cliquer sur Graphique (en haut à gauche de la fenêtre graphique) pour avoir simultanément le tableur et la barre d'outils de Géogébra 3. Dans le pire des cas, on passe de l'un à l'autre en cliquant sur affichage, puis en cochant tableur ou pas.

1) Tracé d'une cardioïde

a) Tracer le cercle C(O ;1) de centre O(0 ;0) (icone 6) puis placer un « point complexe » A dessus (icone 2/nombre complexe). On le renomme M. Dans la zone de saisie taper M*(1-M/2)/2. C'est le nombre (complexe) z. Activer momentanément sa trace en faisant varier M sur C(O ;1).
On a créé L = $\{z'=(1-z/2)z/2 \quad / \quad |z|=1\}$ mais on n'en a qu'une trace éphémère. Dans l'icone 4 cliquer sur Lieu puis sur z, M et C(O ;1) : on obtient le lieu (= l'ensemble) L des points z quand M varie sur C(O ;1), voir le dessin ci-contre).



b) Créer les complexes u et $u'=(1-u/2)u/2$. Faire afficher la trace de u' et déplacer u.
On se persuade ainsi du fait suivant :

si u est à l'intérieur de C(O ;1), alors u' est à l'intérieur de L (on notera Intérieur (L) cet intérieur).

On l'admet : $|u| \prec 1 \Rightarrow u'=(1-u/2)u/2 \in \mathit{Intérieur}(L)$.

2) Notion de suite de nombres complexes

Elle découle de celle de suite de réels :

Définitions une suite de nombres complexes (z_n) peut être définie pour tout entier n par $z_n = x_n + iy_n$ où (x_n) et (y_n) sont des suites réelles.

On dit que (z_n) converge vers $l = l_1 + i\,l_2$ si (x_n) converge vers l_1 et (y_n) converge vers l_2.
C'est équivalent à : la suite réelle $|z_n - l|$ converge vers 0.

On dit que (z_n) diverge vers l'infini si au moins une des deux suites (x_n) et (y_n) diverge vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.
C'est équivalent à : $|z_n| \to +\infty$.

On dit que la suite (z_n) est bornée s'il existe $A \succ 0$ vérifiant : pour tout entier n, on a $|z_n| \le A$.

Dans ce qui suit on étudie les suites (z_n) de **C** du type suivant :

on se fixe $z_1 = c$ puis pour tout entier $n \ge 1$, $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. (1)

3) Visualisation

a) Premier exemple Pour visualiser de telles suites on peut, dans la feuille où on a créé L, créer un z dans **C** puis dans le tableur saisir =z en A1, =A1^2+A$1 en A2 et copier-glisser A2 vers le bas(jusqu'en A100 par exemple. Les points complexes s'affichent. Un clic droit sur la colonne A permet de choisir leur couleur. Faire un clic droit sur A1 puis changer le style de ce point en le mettant en assez gros : c'est le seul qui est manipulable à la souris et il faut pouvoir le repérer. On voit qu'il y a un accident quand z =A1 passe la « frontière » L…

b) Deuxième exemple On peut procéder différemment : créer deux curseurs a et b, nombres entre -2 et 2, on verra pourquoi au 4), saisir =a+i*b en C1 et =C1^2+C$1 en C2 et copier-glisser C2 vers le bas. On a alors une suite manipulable au curseur. On peut, par exemple, animer a .

On peut relier les points représentant les termes d'une suite. Exemple pour la suite A : taper Segment[A1,A2] en B2 puis copier-glisser B2 vers le bas. On voit bien alors ce qu'on appelle parfois l'orbite du point de départ A1.

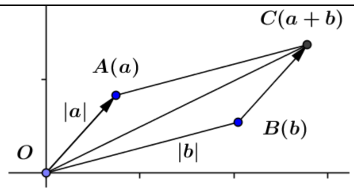
4) Définition de l'ensemble *E*

L'ensemble E est l'ensemble des points c de **C** tels que la suite des points définie par (1) est bornée :

$c \in E \Leftrightarrow \exists A \in IR^{+}$ *tel que* $: \forall n \in IN,$ *on a* $|z_n| \leq A$.

Exercice 1 Prouver que si $|c| \succ 2$ alors $c \notin E$ (car (z_n) diverge vers l'infini).

Indications : a) L'inégalité triangulaire la plus courante : pour tous a et b dans **C,** $|a+b| \leq |a|+|b|$ est la traduction de $OC \leq OA + AC$ (qu'on admet car elle est intuitivement évidente : « entre deux points la plus court chemin est la ligne droite »). La version qu'on doit utiliser ici est $|a+b| \geq |a|-|b|$ qui est la traduction de $OC + CA \geq OA$.



b) Prouver que si $x \geq 0$ et $A \geq 1$ alors $xA^2 - 1 \geq A(x-1)$ (il y a une façon collège et une façon classe de première).

c) Il suffit de prouver par récurrence que si $|c| \succ 2$, pour tout $n \geq 1$ (H_n) : $|z_n| \geq |c|(|c|-1)^{n-1}$ est vraie. On a ensuite facilement que la limite de $|z_n|$ est $+\infty$.

Remarque On prouverait de la même façon : s'il existe un entier N tel que $|z_N| \succ 2$ alors $c \notin E$ (car si un terme de (z_n) est hors de C(0 ;2), alors (z_n) s'échappe vers l'infini. Ce sera essentiel au paragraphe 9.)

5) Des racines carrées dans C (!)

Si $x \in IR, x \succ 0$, l'équation dans IR, d'inconnue y, $y^2 = x$ a deux solutions et celle qui est positive est notée $\sqrt{x}$.
Montrer que si Z est dans **C** , l'équation d'inconnue z : $z^2 = Z$ dans **C** a deux solutions, distinctes si $Z \neq 0$, qui ont pour module $\sqrt{|Z|}$ et sont opposées. On désigne par sqrt(Z) celle dont l'argument est $\theta/2$ où θ est la détermination principale (= entre $-\pi$, exclu, et π) de l'argument de Z .

[sqrt signifie square root]

C'est la définition adoptée par Géogébra mais <u>cette notation est absolument proscrite au bac</u>.

Sur une autre page définir un point complexe z puis taper sqrt(z). Faire varier z. On voit que la fonction sqrt :
z→sqrt(z) n'est pas continue sur la partie négative de l'axe des réels. Que dire de la partie réelle de sqrt(z) ?

6) Calcul et localisation de la limite de (z_n) [quand elle existe]

On peut prouver (mais ça semble hors de portée au lycée) que si $z_1 = c$ est dans Intérieur (L) mais pas sur son bord L, (z_n) converge vers un nombre (complexe) l. En prenant la limite quand n tend vers l'infini dans (1) on obtient une équation d'inconnue l. Admettons qu'on peut résoudre cette équation avec les formules qu'on connaît dans le cas réel. En utilisant le $z_1 = c$ d'une des suites construites au 3), construire les deux solutions α et β obtenues (en traçant des gros points en couleur). Un de ces nombres α et β est manifestement la limite de (z_n) (quand (z_n) converge).

Exercice 2 au 1) b), on admet de plus que tout u' de Int (L) est de la forme $u' = (1-u/2)u/2$ avec $|u| \prec 1$.
Prouver à l'aide du 1) qu'un de ces nombres α et β est à l'intérieur de C(O ;0,5).

C'est celui des deux nombres α et β qui est à l'intérieur de C(O ;0,5) qui est la limite de (z_n) (quand elle converge) mais ça n'est a priori pas évident à prouver ; c'est le problème de la notation sqrt(Z) : si un nombre z vérifie $z^2 = Z$, on ne sait pas a priori si $z = sqrt(Z)$ ou si $z = -sqrt(Z)$ …

7) Deux autres parties de *E*

On a prouvé au 4) que $E \subset$C(O ;2) et observé au 6) que Intérieur (L)$\subset E$. E est « quelque part » entre L et C(O ;2). En fait il y a des quantités de points de E qui ne sont pas dans L. On va en observer quelques uns.

a) Soit I le point I(-1 ;0). Vérifier avec une animation que C(I ;1/4) $\subset E$. Lorsqu'on prend $z_1 = c$ à l'intérieur de C(I ;1/4), la suite (z_n) ne converge pas mais elle est bornée. Les nombres z_n s'accumulent autour de deux valeurs. On dit qu'on a à la limite (quand $n \to +\infty$) un cycle d'ordre 2.

b) Dans le cas où $z_1 = c \in IR$, on peut prouver que $E \cap IR = [-2;1/4[$. Par exemple, prouver que $[-1;0]$ et $[0;1/4[$ sont inclus dans E est facile. Le fichier Géogébra disponible sur la page http://pardailhan.entmip.fr/rubrique-des-disciplines/mathematiques/terminale-/un-debut-d-etude-de-l-ensemble-m-36208.htm permet de bien voir certains comportements chaotiques de la suite réelle définie par $x_1 = c \in IR$ et $x_{n+1} = (x_n)^2 + c$, suite bornée mais « pas souvent » convergente si $c \in [-2;1/4[$.

8) Quelques autres orbites presque cycliques

Il y a des tas de petits ensembles (ressemblant à des petits cercles) collés à L qui sont dans E. C(I ;1/4) du 7) a) n'est que le plus grand d'entre eux. On en localise quelques uns :

a) Créer un nombre complexe z (icone 2) <u>sur L</u> puis la suite (z_n) avec le tableur comme au 3) mais avec au moins 100 valeurs. En animant z on voit que L$\subset E$. (les suites sont bornées)

b) Observation plus précise Créer deux curseurs p et q, entiers de 1 à 30 disons, donc avec incrément 1. Définir ensuite le complexe exp(2ί π p / q) / 2 *(1 - exp(2ί π p / q) / 2) dans la zone de saisie. Comme on l'a vu au 1), c'est un point u de L. Créer la suite (z_n) vérifiant $z_1 = u$ avec le tableur et faire alors varier p mais surtout q. On a des orbites qui donnent à la limite des cycles d'ordre q lorsque p et q sont premiers entre eux.

9) Images informatiques

Ce qui précède avait pour but de faire sentir une (très faible !) part de la complexité des formes qui délimitent l'ensemble E. E a été découvert au début du vingtième siècle mais il n'est devenu populaire que bien plus tard quand on a réussi à le représenter (informatiquement). Il est impossible de représenter exactement E. Voici comment obtenir deux représentations (informatiques) approximatives de E. Les programmes sont sur le lien de 7) b).

On se fixe un entier M = maxIter (= le nombre maximum d'itérations = le nombre maximum de termes qui vont être calculés). On a prouvé au 4) que $E \subset$C(O ;2) donc on ne teste que les points de C(O ;2). Pour « chaque » point (avec la précision permise par le nombre de pixels dont on dispose) $z_1 = c$ de C(O ;2), on calcule les termes de la suite (z_n). Dès qu'un terme z_N vérifie $|z_N| \succ 2$, on arrête le calcul car la remarque de la fin de 4) montre que $c \notin E$.

Si pour tout $n \le M$ on a $|z_n| \le 2$ on déclare que le point $z_1 = c$ est dans E (on peut se tromper !) et on le colore en noir. Plus M = maxIter est grand (et plus on dispose de pixels !) plus on a une bonne représentation de E.

a) Télécharger le logiciel AmiensPython. Ouvrir, « comprendre » et exécuter le programme Image_1_de_E.py.

b) Télécharger Python 3. Aller dans IDLE (qui signifie "Integrated DeveLopment Environment"). Même procédure avec Image_2_de_E.py. Le programme est moins élémentaire et l'image obtenue est plus belle.

Essayer aussi avec Javascool. Ne pas hésiter à zoomer en changeant les plages. Etonnement garanti !