ACTIVITE LOGARITHME

Préalable :
On veut étudier l'évolution de la population des Etats Unis au XIX° siècle :

Rang n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Année	1800	1820	1840	1860	1880
Population P_n	5,7	9,6	17	31	50

La suite (Pn) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

Dans cette activité, on réalise une échelle de sorte que chaque graduation correspond à un terme d'une suite géométrique de façon à évaluer si les données d'un tableau sont proches d'une suite géométrique.

A Réalisation de la graduation

1) Tracer une échelle verticale en commençant en bas à 1, et en doublant la valeur tous les 3 cm.
On placera ainsi : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512

2) On cherche quels sont les nombres à placer dans les graduations intermédiaires. Si (u_n) est la suite géométrique telle que $u_0 = 1$ et $u_3 = 2$, que vaut la raison ? Que valent u_1 et u_2 ? Ecrire sur l'axe la valeur correspondant à chaque centimètre (On pourra mettre la raison dans la mémoire Q, remarquer que u_1 = Q et obtenir les termes successifs en répétant la multiplication par Q grâce à l'instruction **Ans × Q**).

B Une propriété intéressante de cette graduation.

1) Vérifier que la distance de 1 à 32 est égale à la somme des distances de 1 à 4 et de 1 à 8.
2) Vérifier que la distance de 1 à 32 est égale à la somme des distances de 1 à 2 et de 1 à 16.
3) Vérifier que la distance de 1 à ($2^n \times 2^p$) est égale à la somme des distances de 1 à 2^n et de 1 à 2^p .
4) On appelle L(x) la distance de 1 à x où x est un nombre lu sur une graduation ou une sous-graduation correspondant à une suite géométrique de raison q de terme initial 1.
   Montrez que L(ab) = L(a) + L(b)

C Une fonction bien utile

Au XIV° et XVII°, les savants cherchent à connaître toutes les planètes du Soleil. Pour cela, des calculs précis sont indispensables car ils peuvent indiquer où regarder. Les planètes inconnues sont petites et renvoient peu de lumière. Les nombres à utiliser sont souvent très grands et les divisions délicates. Plusieurs savants cherchent des moyens de les simplifier.

C'est le cas du baron de Merchiston (1550 – 1617) qui publiera plusieurs livres et tables en latin, et dont le nom est resté célèbre au point d'apparaître sur toutes les calculatrices (sous une forme simplifiée). Saurez-vous retrouver son nom ? et où il est écrit sur votre calculatrice ?

La fonction qu'il a définie vérifie la relation de la question B4) et est aujourd'hui indispensable dans de nombreux domaines : Démographie, Mathématiques Financières, Economie, Acoustique, Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre… sans parler des Mathématiques elles-mêmes.

La fonction Log de la calculatrice vérifie cette propriété et correspond à une unité telle que Log 10 = 1 ; cela correspond à peu près à notre échelle en dm, en effet Log 2 ≈ 0,3.
Par exemple, en utilisant cette fonction, Log 64 ≈ 1,8 on doit placer 64 à 1,8 dm de 1, c'est-à-dire à 18 cm de 1, c'est ce que nous avons fait.
En utilisant cette échelle verticale et une échelle horizontale régulière, placer les points correspondant au tableau de la population des Etats Unis.
Les points sont-ils alignés ?

Autres éléments de la progression :

On peut définir $a^{1/d}$ par $\sqrt[d]{a}$ puis $a^{n/d}$ par $\sqrt[d]{a^n}$ ou $\sqrt[d]{a}^{\,n}$ ce qui permet de réaliser une graduation sous forme de suite géométrique aussi fine que l'on veut. On étudie les variations en lien avec les suites géométriques, selon la position de *a* par rapport à 1. L'élève doit ainsi rapidement savoir calculer un taux moyen et mener quelques calculs de puissances.
Si *x* et *y* sont deux nombres de cette graduation, soit L(*x*) la longueur du segment qui rejoint 1 à *x* et L(*y*) la longueur du segment qui rejoint 1 à *y*. Alors L(*x y*) = L(*x*) + L(*y*). On explique en quoi cette transformation a été importante historiquement ce qui permet déjà de signaler l'existence (et l'intérêt de la fonction réciproque).
En fait, on peut faire descendre cette graduation en dessous de 1, et pour mesurer les longueurs, on peut disposer un axe ordinaire à côté de cette graduation de sorte que le 0 corresponde à la graduation 1. (On pourra faire correspondre 0,3 dm = 3 cm à la graduation 2 en remarquant que ce choix est arbitraire mais en fait, il conduit à peu près à faire correspondre 1 dm à 10). Ceci permet d'obtenir des mesures négatives comme L(0,5) = – L(2) …
La fonction L est une des fonctions logarithmes (ici le logarithme décimal).
On admet que sa dérivée est *k*/*x*. et on appelle logarithme népérien celle dont la dérivée est 1/*x*.
On étudie cette fonction *ln* et on montre son utilité pour résoudre des équations ou inéquations dans lesquels la variable apparaît en exposant.
On définit enfin la fonction *exp* comme réciproque de *ln*. On admet que sa dérivée est elle-même.

Remarque : l'absence de technique pour dériver une fonction composée conduit à admettre beaucoup de résultats.