Tradition, la culture, les obstacles en mathématiques de la Roumanie

Prof. Alexandru Marcel Florescu
Docteur en sciences mathématiques
Lycée C.F.R. – Craiova / Romania

La Roumanie, fondatrice en 1959 de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, a créé et développé à la longue un système complexe de concours annuels pour chaque niveau d'étude, concours organisés par étapes (locale, départementale, nationale) et basés sur des programmes spécifiques.

En Roumanie, il y a trois concours de mathématiques au niveau national:

- un concours national réservé aux collégiens (13 à 15 ans)
- un concours national réservé aux lycéens (15 à 18 ans).
- le concours international "Kangourou des mathématiques"

Il n'y a pas obligation de concourir.

A côté, il y a de nombreux concours de mathématiques au niveau régional et aussi des concours de mathématiques organisés par diverses fondations et particuliers (souvent payants), mais la participation est laissée au libre choix de chaque élève.

Déroulement de l'enseignement :

-les élèves ont le même professeur pendant toute leur scolarité (4 ans pour les collégiens et 4 ans également au lycée)
-les groupes d'études (d'une même classe) sont immuables pendant les cursus de 4 ans. ???
Pourquoi ce dispositif:

- le professeur connaît bien son élève, ses possibilités réelles et peut mieux l'aider dans le choix d'une orientation et pour son insertion dans une filière professionnelle
- les élèves peuvent mieux connaître leur niveau par rapport aux autres élèves tout au long des 4 années
- les élèves peuvent bénéficier d'une orientation à long terme (de simple à complexe) pour leur formation professionnelle.

Le déroulement des concours:

- **Septembre** – au début de chaque cycle de scolarité (collège et lycée), les professeurs établissent un test d'évaluation pour connaître la rapidité de calcul et de synthèse de chaque élève.
- **Octobre - novembre** : travaux individuels semi-dirigés, par le professeur de math en première année de cycle; puis dirigés d'une manière plus approfondie par le prof de math pour les 3 années suivantes.
- **Fin décembre – première partie de janvier**: concours au niveau de chaque classe – les sujets sont élaborés par les professeurs de chaque école. De ce premier concours on garde un groupe de 10 élèves maximum. Ils suivent une préparation (formation dirigée avec le professeur de la classe) avec épisodiquement la participation de tous les professeurs de l'école
- Des rencontres entre les élèves sélectionnés des classes de même année, des concours internes entre les élèves de même année, suivis d'analyses collectives des résultats des concours et des solutions données aux épreuves des concours
- **Fin mars – début avril** : concours au niveau du département. Les sujets sont élaborés par une commission départementale (professeurs des lycées et de l'Université). Après le concours on sélectionne le groupe qui doit représenter le département au concours national. Groupe de 7 à 10 élèves (nombre établi par la commission nationale suivant le budget alloué chaque année pour la prise en charge du trajet et de l'hébergement)
- **Avril -mai.** Le groupe sélectionné reçoit une préparation à la fois dans son école et aussi à l'Université du département
- **Vacances de Pâques –avril- mai : concours national**.

- Il se déroule en général dans une station balnéaire ou touristique, mais aussi quelquefois dans les villes universitaires. Les sujets sont élaborés par une commission nationale (prof. d'Universités majoritairement). Au vu des résultats et après une épreuve par équipe on constitue le groupe national élargi pour la participation aux olympiades internationales réservées aux élèves des lycées.
- **Mai – juin:** La Commission Nationale du Concours prépare en commun le groupe national élargi. La préparation se fait dans une station balnéaire ou dans une grande Université. Pendant cette préparation les élèves de terminale subissent les épreuves d'un BAC spécial, parce que les épreuves du BAC national se déroulent en juillet lors des olympiades internationales.

De fin juin à début juillet sont organisées des épreuves de barrage pour établir le groupe restreint qui représentera la Roumanie aux olympiades internationales auxquelles participeront 4 titulaires et 2 suppléants.

Un autre concours, très connu à l'heure actuelle en Roumanie, est le concours international "Kangourou des mathématiques"

A partir de l'année 1992, la Roumanie à côté de la Pologne a préparé des épreuves partielles en français pour le concours Kangourou, soutenue par l'association "Maths pour tous" et aussi par le mathématicien français André Deledicq. La passion pour les mathématiques et pour la langue française a accru le nombre des participants au concours au fil des dix-huit années de déroulement en Roumanie. D'ailleurs, l'un des buts des programmes communautaires de l'Union Européenne est que les jeunes connaissent au moins deux langues européennes.

La Roumanie occupe, après la France, la troisième place et l'année passée elle a eu un nombre de 120 000 participants au concours Kangourou des mathématiques.

Les lauréats du concours Kangourou des mathématiques bénéficient de voyages en Europe, et, pour d'autres (200) participants au concours Kangourou de Roumanie, on a organisé un camp international de vacances dans les montagnes roumaines. D'autres élèves des pays de l'Europe participant eux -aussi au concours Kangourou y ont été invités. Le camp de vacances a été organisé par la Fondation pour l'intégration européenne –SIGMA-, l'organisatrice du concours Kangourou en Roumanie, dont le membre fondateur est aussi le soussigné.

En parallèle – avec un décalage de quelques jours - se dérouleront par groupes départementaux des concours régionaux avec des épreuves individuelles et par équipe.

Les associations de professeurs et les responsables des écoles collectent toute l'année des fonds pour les frais de déplacement et de nourriture garantissant le bon déroulement du concours. L'hébergement est assuré souvent dans les internats des écoles ou dans des salles de classe aménagées en dortoirs pour 2-3 jours (vendredi à dimanche).

Outre leur volonté de réussite, les participants au concours sont tous motivés par l'attrait du voyage et du séjour, car beaucoup de jeunes, mais aussi des professeurs, n'ont pas la possibilité financière de se déplacer dans ou en dehors de leur pays.

La présentation des sujets de ces dernières années avec les barèmes et leurs commentaires rendra possible un échange intéressant d'expériences et donnera une image des connaissances mathématiques en Roumanie.

Adresse : Alexandru Marcel Florescu
Str. Nicolae Titulescu , Bloc H 1 , Apt. 8
200218 CRAIOVA - Romania. E-mail : alex26950@yahoo.fr
Tél. / Fax. : 0040-251-590700

L'Olympiade de Mathématiques
Concours au niveau du département -2012
La IX ^{e} classe (Troisième-Fr.)

P. 1. a. Montrer que, pour tout nombre naturel n, l'inégalité suivante est vraie :

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}<\frac{1}{3}$$

b. Préciser si le nombre $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ est rationnel.

c. Soit $E(x)\equiv\left(\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^m\cdot\left(\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x^{-1}}}\right)^n$, où x est un nombre réel, strictement positif, quelconque.

Déterminer les paires de nombres naturels (m, n) de sorte que E (x) = x^3

P.2. Soit $x>1$, un nombre réel.
a. Montrer qu'il existe un seul nombre naturel n, non nul, de sorte que :

$$1+2+3+\ldots+n < x \leq 1+2+3+\ldots+n+(n+1)$$

b. Pour quelles valeurs de x le nombre n déterminer ci-dessus est un carré parfait ?

P.3. Déterminer le plus petit et le plus grand élément de l'ensemble :

$$A=\left\{n+\left[\frac{2003}{n}\right], n\in\{1,2,3,\ldots,2003\}\right\}$$

(Par [x] on a noté la partie entière du nombre réel x).

P.4. Soit les ensembles :

$$A=\left\{a\in Z \middle| (\exists)x\in Z t.q.\, x^2-2(2a+1)x+3a(a+1)=0\right\}$$
$$B=\left\{b\in Z \middle| (\exists)x\in Z t.q.\, 2bx^2+(8b-3)x+6b-6=0\right\}$$

Combien de triangles ont les pointes dans les points de l'ensemble AxB ?

Note : tous les sujets sont obligatoires
Temps affecté au travail : 3 heures

L′Olympiade de Mathématiques
Concours au niveau du département -2012
La X ^{e} classe (Seconde Fr.)

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une progression géométrique de sorte que $a_1 > 0$, $\dfrac{a_2}{a_1} > 0$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ une progression arithmétique de sorte que $b_2-b_1>0$.

Montrer qu′il existe un nombre réel α de sorte que $\log_\alpha a_n - b_n$ ne dépend pas de n.

2. Déterminer l′ensemble des valeurs de la fonction $f : R \to R$,

$$f(x) = (a\sin x + \cos x)(\sin x + b\cos x), \forall x \in R$$

Où $a, b \in R^*$.

3. Soit $A = \dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$

Montrer que $A \in N^*$ et l′ecrire sous la forme d′un produit de combinaisons.

4. Résoudre l′inéquation

$$\frac{1}{a^{\sin x+1} - 1} > \frac{1}{1 - a^{\sin x}} ,$$

Où $a > 0, a \neq 1$

Note : tous les sujets sont obligatoires
Temps affecté: 3 heures.

Le concours de Mathématiques
Concours au niveau du département -2012
La XI e classe (Première fr.)

1. Soit la fonction $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Pour tout nombre naturel non nul n on définit $f_n = f \circ f \circ .... \circ f$ (n fois).

Calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout x>0.

2. Soit a un nombre réel, $a \geq 1$. Montrer que

$$\lim\left(2a^{1/n} - 1\right)^n = a^2$$

3. Soit $A \subset M_2(R)$ une matrice aux propriétés $A \neq A^*$ et $A^3 = \left(A^*\right)^3$.
   Montrer que detA = Tr^2(A)

   Où Tr (A) représente la somme des éléments sur la diagonale de la matrice A.

4. Déterminer tous les polynômes P en coefficients réels qui ont la propriété que pour toute matrice A, B $\in M_2(R)$ avec A $\neq$ B, on a P(A) $\neq$ P(B).

Note : Temps affecté 3 heures
Tous les sujets sont obligatoires

L'Olympiade de Mathématiques
Concours au niveau du département -2012
La XII^{e} classe (Terminale Fr.)

P.1. Soit n≥2 un nombre naturel fixé et f,g : $(C^{*},\cdot)\rightarrow(C^{*},\cdot)$ deux morphismes de groupes multiplicatifs de sorte que f(z) = g(z) pour tout $z\in C^{*}$ et $z^{n}\neq 1$. Démontrer que f = g.

P.2. Soit M un ensemble non vide, P(M) l'ensemble de tous les sous-ensembles de Met 2^{M} l'ensemble de toutes les fonctions, définies sur M avec des valeurs en {0,1}. Pour f, g$\in 2^{M}$ on définit $f*g=|f-g|$

1. Montrer que * est une loi de composition dans 2^{M} et (2^{M}, *) est une groupe abélien.

2. Pour $f\in 2^{M}$, on note $A_{1}=\{x\in M|f(x)=1\}$et on dé finit $\psi:2^{M}\rightarrow P(M)$ par la formule$\psi(f)=A$. Montrer que ψ établit une bijection entre ensembles 2^{M} et P (M) et, pour tout $f,g\in 2^{M}$: $\psi\,(f\ *\ g\,)=\ \psi(f)\ \ \Delta\,\psi(g)$

où Δ note la différence symétrique dans P(M) ($A\,\Delta\,B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$, pour A,B∈P(M)).

3. Employant les propriétés de 2, montrer que (P (M),Δ) est un groupe abélien isomorphe au groupe (2^{M},*).

P.3. Trouver les primitives de la fonction $f:\left(o,\dfrac{\pi}{2}\right)\rightarrow R$ définie par

$$f(x)=e^{x}\left(2\sqrt{tg^{n}x}+n\sqrt{tg^{n-2}x}+n\sqrt{tg^{n+2}x}\right)$$

P.4. On considère la fonction $f:R\rightarrow R$, $f(x)=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\cdot\cos\pi x$ (où [a] désigne la partie entière du nombre a). Montrer que la fonction f est continue sur R et déterminer ensuite les primitives de cette fonction sur R. Si F est une primitive de la fonction f sur R, fixée arbitrairement, calculer :

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\left(F\left(2n+\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Note : Temps affecté 3 heures
Tous les sujets sont obligatoires

Le Ministère de l'Education et de la Recherche
Le Service National d'Evaluation et Examination
Olympiade Nationale de Mathématique
L'Etape nationale 2012
La XII^{e} classe (Terminale Fr.)

Sujet 1

Soit (G,·) un groupe fini avec l'élément neutre *e*.
Le plus petit nombre naturel non nul avec la propriété que $x^n = e$, pour tout $x \in G$, s'appelle *l'exposant* du groupe G.

a) Pour tout nombre prime p, p≥3, montrer que le groupe multiplicatif G_p des matrices ayant la forme $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ avec $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in Z_P$ est *non communicatif* et a *l'exposant p*.

b) Montrer que si (G,o) et (H, ▪) sont des groupes finis avec les *exposants* respectivement m et n, alors le groupe (G x H,*) avec l'opération donnée par $(g,h)*(g',h')=(gog', h▪h')$, pour tout $(g,h), (g',h') \in G \times H$, a pour *exposant* le plus petit commun multiple des nombres m et n.

c) Déduire que tout nombre naturel $n \geq 3$ est *l'exposant* d'un groupe fini non commutatif.

Sujet 2

Soit les fonctions continues f,g : [0,1] → $(0, \infty)$, différentes, de sorte que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$

Soit la série $(x_n)_{n\geq 0}$ définit par

$$x_n = \int_0^1 \frac{(f(x))^{n+1}}{(g(x))^n} dx$$

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

b) Démontrer que la série $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

Sujet 3

Soit *K* un corps fini de sorte que le polynôme $X^2 - 5$ este irréductible dans K[X]. Montrer que :
a) $1+1 \neq 0$;
b) pour tout $a \in K$, le polynôme X^5+a est réductible dans / en K[X]
(*Note* : on admet pour comme le fait que tout corps fini est commutatif).

Sujet 4

On considère les fonctions continues $f : [0, \infty) \to R$ et $g : [0,1] \to R$.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in R$, montrer que : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) g\left(\frac{x}{n}\right) dx = L \int_0^1 g(x)dx$

Note : Temps affecté 3 heures

Le Ministère de l'Education et de la Recherche
Le Service National d'Evaluation et Examination
Olympiade Nationale de Mathématique
L'Etape nationale 2012
La IX^e Classe (Troisième-Fr.)

Sujet 1

Déterminer les fonctions $f : N^* \to N^*$ avec la propriété que, pour tout $n \geq 1$,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

est une cube parfait au moins égal a n^3.

Sujet 2

Trouver $n \in N, n \geq 2$ les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de sort que

$$\sqrt{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}} - \sqrt{\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}} = a_n$$

Sujet 3

Sur un tableau sont dessines les points *A, B, C, D*.

Vlad construit les points A', B', C', D' ainsi : A' est le symétrique de *A* vis-à-vis de *B*, B', est le symétrique de *B* vis-à-vis de *C*, C', est le symétrique de *C* vis-à-vis de *D* et D' est le symétrique de *D* vis-à-vis de *A* . Marie efface du tableau les points *A, B, C, D*. Pourrait Vlad refaire les positions de ces points ? Justifier la réponse en utilisant éventuellement des vecteurs.

Sujet 4

On dit qu'un ensemble A de vecteurs non nulles du plan a la propriété (S) si elle a au moins trois éléments et pour tout $\vec{u} \in A$ il existe $\vec{v}, \vec{w} \in A$ de sorte que $\vec{v} \neq \vec{w}$ et $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

a) Démontrer que, pour tout $n \geq 6$ il existe un ensemble avec n vecteurs non nulles, qui a la propriété (S)
b) Démontrer que tout ensemble fini de vecteurs non nulles, qui a la propriété (S), a au moins 6 éléments.

Note : Temps affecté 3 heures

Le Ministère de l'Education et de la Recherche
Le Service National d'Evaluation et Examination
Olympiade Nationale de Mathématique
L'Etape nationale 2012

La X^{e} Classe (Seconde Fr.)

Sujet 1

À l'intérieur d'un cube on considère 2003 points. Montrer qu'on peut diviser le cube en plus de 2003^3 cubes de sorte que tout point de ceux donnes se trouve a l'intérieur de l'un des petits cubes (et non pas sur ses faces).

Sujet 2

a) Déterminer toutes les fonctions $f : N^* \to M$ avec la propriété :

$$1 + f(n)f(n+1) = 2n^2\left(f(n+1) - f(n)\right), \text{ pour tout } n \in N^*$$

dans chacune des situations suivantes :

a. M=N;
b. M=Q

Sujet 3

a) Si ABC est un triangle et M un point dans son plan, montrer que

$$AM \sin A \leq BM \sin B + CM \sin C$$

b) soit A_1, B_1, C_1 des points sur les cotes (BC) (AC) et respectivement (BA) du triangle ABC, de sorte que les angles du triangle $A_1B_1C_1$ sont dans cet ordre de mesures α, β, γ

Montrer que :

$$\sum AA_1 \sin \alpha \leq \sum BC \sin \alpha$$

Sujet 4

On donne les nombres réels a, b, c, d avec a>c>d>b>1 de sorte que ab>cd. Démontrer que la fonction $f : [0, \infty) \to R$ définie par $f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x$, pour tout $x \geq 0$, est strictement croissante.

Note : Temps affecté 3 heures

Le Ministère de l'Education et de la Recherche
Le Service National d'Evaluation et Examination
Olympiade Nationale de Mathématique
L'Etape nationale 2012
La XI^e Classe (Première fr.)

Sujet 1

Dans le repère cartésien xOy on considère les points colinéaires $A_i(x_i, y_i), i = \overline{1,4}$ de sorte qu'il existe des matrices irréversibles $M \in \mathrm{M}_4(C)$ dans lesquelles les deux premières lignes sont (x_1,x_2,x_3,x_4) et (y_1,y_2,y_3,y_4). Montrer que la somme des éléments de la matrice M^{-1} ne dépend pas de la matrice M donnée.

Sujet 2

Soit $f:[0,1] \to [0,1]$ une fonction continue dans 0 et 1, qui a des limites latérales dans tout point et qui vérifie

$$f(x-0) \le f(x) \le f(x+0)$$

Pour tout $x \in (0,1)$ montrer que :

a) pour l'ensemble $A = \{x \in [0,1] f(x) \ge x\}$, avons $\sup A \in A$
b) il existe $x_0 \in [0,1]$ de sorte que $f(x_0) = x_0$

Sujet 3

a) Montrer que tout matrice $A \in M_4(C)$ peut être écrite comme la somme de 4 matrices $B_i \in M_4(C), i = \overline{1,4}$ de rang 1.
b) Montrer que I_4 Ne peut pas être écrit comme la somme de moins de quatre matrices de rang 1.

Sujet 4

Soit $\alpha. > 1$ et $f:\left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right] \to \left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right]$ bijective.

Si $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$, pour tout $x \in \left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right]$, montrer que :

a) f a un moins un point de discontinuité ;
b) si f est continue dans 1, alors f a une infinité de points de discontinuité ;
c) il existe une fonction f qui vérifie les conditions de l'énonce et a un nombre fini de points de discontinuité.

Note : Temps affecté 3 heures