CONJECTURER UNE FORMULE

Pierre-François BURGERMEISTER, DiMaGe, Université de Genève

Résumé – Nous présentons une activité pour la classe autour de la *formule de Héron* pour le calcul de l'aire d'un triangle dont on connait les trois côtés. L'objectif est d'initier des élèves de lycée à l'emploi de la *dimension fonctionnelle* des formules géométriques. Nous analysons cette activité sur la base d'expérimentations réalisées avec des élèves de 3$^{\text{ème}}$ année du Collège de Genève (17-18 ans).

Mots-clefs : formule géométrique, analyse sémiotique, modélisation algébrique, situation d'investigation.

I. PROBLÉMATIQUE

L'échange ci-dessous se déroule à Genève dans une classe de mathématiques du secondaire 2. Il est fictif bien mais emblématique et il va servir à introduire notre propos :

Thomas (un élève) : L'aire d'un disque, je sais bien que c'est $2\pi r$ ou πr^2, mais je ne me souviens jamais lequel des deux choisir …

Enseignant : Une aire, c'est des mètres ou des mètres carrés ?

Thomas : Des mètres carrés.

Enseignant : Bon. Et bien alors ?

Thomas : Euh … ??

Enseignant : $2\pi r$, c'est des mètres carrés ?

Thomas : Ben … ?

Laissons notre enseignant fictif poursuivre son travail parfois ingrat mais toujours stimulant et tentons d'interpréter cet échange. Dans les années qui précèdent, Thomas a appris que la circonférence d'un disque de rayon *r* est égale à $2\pi r$ et que son aire est donnée par πr^2. Ces formules ont été plus ou moins soigneusement introduites, justifiées et institutionnalisées par ses enseignants, et il a eu l'occasion d'en exercer l'usage dans de nombreux exercices et problèmes. Il est maintenant capable de calculer le périmètre ou l'aire d'un disque de rayon donné en convoquant l'une ou l'autre de ces deux formules, mais le choix qu'il opère entre les deux est incertain et dénué de possibilités de contrôle. En particulier, il ne paraît pas capable de discerner le lien qui existe entre le type de grandeur (longueur ou aire) représenté par chaque formule et la puissance à laquelle y est élevé le rayon du disque.

Cet exemple introductif illustre le propos de ce texte : il vise à apporter des éléments de réflexion sur ce que l'enseignement des mathématiques pourrait et devrait faire pour permettre aux élèves d'acquérir une meilleure compréhension des informations plus ou moins explicitement contenues dans une formule géométrique. Ainsi dans un premier temps (section II), nous dégageons et définissons deux fonctions essentiellement distinctes portées par toute formule géométrique, la *fonction procédurale* que maitrise Thomas et la *fonction sémiotique* dont il ne tire pas profit. A titre d'exemples, nous analysons ensuite la fonction sémiotique de la formule de l'aire d'un parallélogramme en fonction des longueurs de deux côtés adjacents et de la mesure de l'angle compris entre les deux (section III), puis celle de la formule de Héron pour l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés (section IV). En renversant la perspective, nous obtenons pour ces deux situations géométriques une liste de conditions que doivent remplir toutes formules potentielles destinées à les représenter. Ces analyses nous permettent alors de dégager des critères heuristiques pour mettre à l'épreuve la validité d'une formule géométrique proposée sous forme de conjecture, critères que nous utilisons pour élaborer un dispositif didactique (section V), sous la forme d'une situation d'investigation autour de la recherche d'une formule géométrique (celle de Héron) par une succession de conjectures et de réfutations. Ce dispositif vise, plus largement, à familiariser les élèves avec la fonction sémiotique des formules géométriques.

II. LES DEUX FONCTIONS D'UNE FORMULE GÉOMÉTRIQUE

Dans l'enseignement secondaire, la formule $A = \pi r^2$ possède avant tout une fonction que nous qualifierons de *fonction procédurale* : elle indique comment procéder pour calculer l'aire A d'un disque dont on connaît le rayon r. Cette fonction est la principale raison d'être de la formule dans le cours de mathématiques. Elle est toujours exemplifiée par l'enseignant et largement exercée par les élèves. Elle est au cœur des techniques qui permettent de déterminer l'aire d'un disque donné et on remarque en effet, à l'examen des plans d'études et des moyens d'enseignement, qu'elle est fréquemment convoquée dans les classes.

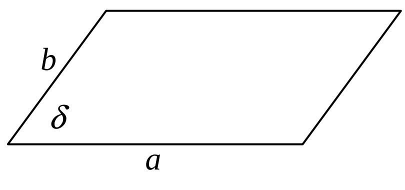
Mais l'écriture même de la formule $A = \pi r^2$, la façon dont elle associe certains signes, permet de « voir » que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon, que le coefficient de proportionnalité est π, que, moyennant le fait que π est proche de 3, cette aire correspond à peu près à celle de trois carrés identiques de côté égal au rayon du disque. En outre, le signe du 2 en exposant marque le fait qu'elle s'exprime dans une unité de surface. Nous voyons par là que cette formule possède également une *fonction sémiotique* : elle fonctionne comme une association de signes renvoyant, pour qui sait la décoder, à un ensemble de propriétés mathématiques qui lient le rayon à l'aire du disque.

Ce texte s'intéresse plus particulièrement à la fonction sémiotique des formules géométriques et à son apprentissage. Nous considérons que la plupart des élèves du secondaire genevois, à l'image de Thomas, maîtrisent très mal cette fonction sémiotique. Plus exactement, ils ne sont pas capables d'analyser les liens entre une formule géométrique, c'est-à-dire un ensemble de signes organisés par une syntaxe particulière, et les signifiés concernant les relations entre les variables en jeu auxquelles cette organisation, précisément, renvoie. Dans ce contexte, nous nous proposons de chercher des moyens propres à développer les facultés d'analyse sémiotique des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des formules géométriques.

III. UN EXEMPLE ÉLÉMENTAIRE

Ce premier exemple va nous permettre d'expliciter la fonction sémiotique d'une formule élémentaire. Nous renverserons ensuite la perspective pour constater que l'analyse sémiotique d'une formule géométrique peut être vue comme le processus inverse de la modélisation algébrique d'une situation géométrique.

Dans le plan euclidien, un parallélogramme est entièrement déterminé par la donnée des longueurs de deux côtés adjacents et de l'angle compris entre ces deux côtés. L'aire de ce parallélogramme peut s'obtenir de ces trois données par la formule $A = a \cdot b \cdot \sin(\delta)$.



La fonction procédurale de cette formule est évidement de calculer A pour des valeurs données de a, b et δ. Sa fonction sémiotique est de signifier que :

i. A est proportionnelle à a : pour b et δ fixés, A double (respectivement est multipliée par un facteur k) lorsque a double (respectivement est multiplié par k).

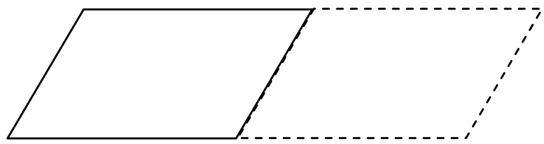
ii. A est proportionnelle à b pour la même raison.

iii. l'aire A étant le produit de a, b et d'un facteur dénué d'unité, elle s'exprime dans une unité composée du produit des unités de a et de b.

iv. A prend les valeurs 0, ab et 0 lorsque δ prend les valeurs 0°, 90° et 180° respectivement.

Nous avons établi cette liste de quatre points en partant d'une formule donnée et en cherchant à y « lire » les relations qu'elle signifie entre les grandeurs variables a, b, δ et A. Renversons maintenant la perspective : plutôt que d'aller de l'algébrique vers le géométrique, allons en sens inverse : en partant de la situation géométrique du parallélogramme représenté ci-dessus et en analysant cette situation, déterminons les relations algébriques qui doivent lier a, b, δ et A dans une formule que nous supposons encore inconnue. Cette analyse géométrique nous amène à remarquer que, dans la formule recherchée, l'aire A doit :

C1 être proportionnelle à a : en effet pour b et δ fixés, A doit doubler (respectivement être multipliée par un facteur k) lorsque a double (respectivement est multiplié par k),



C2 être proportionnelle à b pour la même raison,

C3 s'exprimer dans une unité de surface,

C4 prendre les valeurs 0, ab et 0 lorsque δ prend les valeurs 0°, 90° et 180° respectivement.

Remarquons que le chemin parcouru en sens inverse, c'est-à-dire du géométrique vers l'algébrique, nous fait passer par les quatre points déjà rencontrés précédemment, mais formulés cette fois sous forme de conditions déduites de la réalité géométriques et dont la formule algébrique cherchée doit rendre compte.

Récapitulons : l'analyse sémiotique de la formule $A = a \cdot b \cdot \sin(\delta)$ consiste à interroger la syntaxe de l'écriture $a \cdot b \cdot \sin(\delta)$, autrement dit à analyser algébriquement cette formule, pour en retirer les informations i à iv portant sur la situation géométrique à laquelle elle fait référence. En sens inverse, l'analyse géométrique de la situation nous permet de remarquer que les conditions C1 à C4 doivent être respectées par une formule potentielle (supposée encore inconnue). Il nous semble que les deux analyses sont intimement liées sitôt que l'on considère une formule géométrique comme une modélisation algébrique d'une situation géométrique, suivant ainsi Chevallard (1989) pour qui la modélisation mathématique

> (...) suppose essentiellement deux registres d'entités : un système mathématique ou non mathématique et un modèle (mathématique) de ce système. (Op. cité, p. 53)

Considérée ainsi, l'analyse sémiotique d'une formule géométrique consiste à expliciter les informations que porte le modèle (algébrique) relativement au système (géométrique), alors que l'analyse géométrique consiste à retirer les informations essentielles d'un système (géométrique) pour en construire un modèle (algébrique), c'est-à-dire à modéliser algébriquement le système géométrique. Les deux analyses concernent donc un même couple système – modèle. C'est pourquoi nous postulerons par la suite (section V) qu'un travail didactique sur l'analyse géométrique des contraintes et la construction du modèle algébrique à partir de ces contraintes, s'il est porteur d'apprentissages sur la relation entre système et modèle, doit permettre aux élèves de développer, en retour, leurs facultés d'analyse sémiotique des formules géométriques

Nous passons maintenant à l'analyse de la formule en jeu dans notre situation d'investigation expérimentale.

IV. LA FORMULE DE HÉRON POUR L'AIRE D'UN TRIANGLE

Dans la plan euclidien, un triangle est entièrement déterminé par la donnée des longueurs a, b et c de ses trois côtés. En particulier, son aire A peut s'exprimer en fonction de a, b et c uniquement. Ce résultat classique est connu sous le nom de formule de Héron (ou théorème de Héron). Dans la littérature, (par exemple Ostermann et Wanner, 2012, pp.183–185), il apparaît généralement sous la forme suivante :

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (1)$$

où $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ représente le demi périmètre du triangle.

Dans ce texte, nous préférerons cependant la forme développée :

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \qquad (2)$$

La forme (2) présente sur la première un désavantage esthétique qui explique vraisemblablement l'adoption généralisée de la forme (1) dans la littérature tant scolaire que scientifique, mais elle présente à nos yeux un avantage didactique déterminant, celui de permettre une analyse sémiotique plus directe ou, autrement dit, de proposer une modélisation plus facilement « lisible ». En effet, l'analyse algébrique de cette forme nous permet de constater que

i. *Unités* : A s'exprime dans une unité qui est le carré de celle des trois côtés.

ii. *Symétrie* en a, b et c : les trois variables peuvent être interchangées dans la formule sans que le résultat en soit affecté.

iii. *Valeurs extrêmes* : A s'annule si $a+b=c$; idem pour $b+c=a$, $c+a=b$ et $a+b+c=0$.

iv. *Valeurs non définies* : $A\notin\mathbb{R}$ si $a+b<c$; idem pour $b+c<a$ et $c+a<b$.

Mais l'avantage de la forme (2) devient encore plus évident lorsque nous nous intéressons, à l'inverse, au travail de modélisation algébrique de la situation géométrique. En effet, mettons nous dans la posture de chercher à établir une formule (supposée inconnue) pour établir l'aire A d'un triangle en fonction des longueurs a, b et c de ses trois côtés. Quelles sont, sur la base d'une analyse de cette situation géométrique, les contraintes que la formule recherchée devra respecter ? En voici une liste (non exhaustive mais suffisante pour en déduire la formule) :

C1 *Respect des unités* : le résultat doit être de degré 2.

C2 *Symétrie* en a, b et c : les places des trois côtés doivent pouvoir être interchangées dans la formule sans que le résultat en soit affecté.

C3 *Respect des cas dégénérés de première espèce* : Si $a+b=c$, A doit être nulle ; idem pour $b+c=a$ et $c+a=b$.

C4 *Respect des cas dégénérés de deuxième espèce* : Si $a = 0$ et si $b = c$, A doit être nulle ; idem pour $b = 0$ et $c = a$ ainsi que pour $c = 0$ et $a = b$.

C5 *Respect des cas impossibles de la première espèce* : Il n'existe pas de triangle avec $a + b < c$. La formule doit rendre compte de cette impossibilité. Idem pour $b + c < a$ et $c + a < b$.

C6 *Respect des cas impossibles de la deuxième espèce* : Il n'existe pas de triangle avec $a < 0$. La formule doit rendre compte de cette impossibilité.

C7 *Respect des cas particuliers connus*, par exemple 3–4–5, 5–12–13 et *a*–*a*–*a* : dans ces cas particuliers, la formule doit donner les valeurs adéquates pour A (6, 30 et $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ respectivement).

Il apparaît clairement que la modélisation proposée par la forme (2) de la formule de Héron est plus facilement accessible, à partir des contraintes ci-dessus (en particulier C3) que celle de la forme (1).

Nous avons établi cette liste en cherchant à répertorier les contraintes minimales qui pourraient permettre, à elles seules, de déterminer un modèle algébrique aussi proche que possible de la forme (2). Notons toutefois que, pour être déjà relativement longue, cette liste n'est pas exhaustive. Par exemple, nous n'avons pas retenu la contrainte « A doit toujours être positive » qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter aux précédentes pour pouvoir construire le modèle recherché.

Dans la suite de ce texte, nous allons construire un dispositif didactique autour de la tâche « modéliser algébriquement la relation qui lie l'aire d'un triangle aux longueurs de ses trois côtés ». Cependant, en raison du contrat de recherche que nous définirons avec les élèves, cette tâche sera énoncée sous une forme proche de « deviner une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ». Les contraintes C1 à C7 listées ci-dessus nous servirons de balises pour l'avancement de la recherche.

V. ÉLABORATION DU DISPOSITIF DIDACTIQUE

Le dispositif que nous allons présenter s'adresse à des élèves du collège genevois (équivalent du lycée français), et en particulier à des classes de 3ème année (élèves de 17-18 ans). L'objectif général est d'entraîner les élèves à repérer, par décryptage de la syntaxe algébrique, les traits saillants des relations et contraintes liant les variables à l'intérieur d'une formule géométrique donnée.

Nous visons essentiellement l'objectif d'apprentissage suivant :

Objectif général (version décodage) :

> Être capable de procéder à l'analyse sémiotique d'une formule géométrique. C'est-à-dire savoir lire dans la syntaxe algébrique de cette formule tout ce qu'elle signifie en termes de relations et contraintes entre les variables géométriques qui la composent.

Notre objectif principal est donc l'apprentissage de l'analyse sémiotique d'une formule ou, autrement dit, de son décodage algébrique. Or, nous adoptons comme postulat que pour pouvoir décoder il est nécessaire de connaître le codage. Dès lors, nous nous proposons d'initier les élèves au codage algébrique d'une situation géométrique. Et nous reformulons notre objectif général de la manière suivante :

Objectif général (version codage) :

> Être capable de modéliser une situation géométrique par un modèle algébrique. Plus précisément : savoir expliciter les contraintes qu'une situation géométrique donnée impose à tout modèle algébrique (formule) supposé la représenter, et savoir organiser ces différentes contraintes au sein d'un modèle algébrique à éprouver.

Pour travailler cet objectif sous la forme d'une situation pour la classe, nous avons choisi le cas particulier de la formule de Héron pour trois raisons. Premièrement, le système géométrique qu'elle modélise est suffisamment simple pour que l'entrée des élèves dans l'activité soit aisée. D'autre part, les contraintes algébriques à respecter (cf. C1 à C7 ci-dessus) sont nombreuses et riches ; l'enjeu d'apprentissage, c'est-à-dire l'explicitation de ces contraintes, est ainsi particulièrement consistant. Finalement, cette formule ne faisant pas partie du plan d'étude genevois, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse qu'elle ne sera pas déjà connue des élèves de notre dispositif expérimental, condition essentielle pour qu'ils puissent entrer dans une réelle démarche d'investigation (ils ne connaîtront pas le résultat à l'avance).

Dans ce cas particulier, notre objectif général se décline comme :

Objectif spécifique (pour la formule de Héron) :

> Être capable d'identifier les contraintes algébriques que doit vérifier un candidat-formule pour exprimer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ; savoir organiser ces différentes contraintes au sein d'un modèle algébrique (une formule) à éprouver ; savoir mettre ce modèle à l'épreuve de quelques triangles particuliers.

Notre propos est maintenant de construire une activité pour la classe visant à mettre les élèves en situation d'investigation autour de la tâche « *deviner une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés* ».

L'objectif premier étant l'identification des contraintes algébriques que cette formule devra respecter, nous désirons que ces contraintes soient mobilisées et formulées par les élèves eux-mêmes. C'est pourquoi, nous avons choisi d'organiser la recherche sous la forme d'un débat scientifique (Legrand 1990) avec toute la classe, et plus particulièrement d'un « débat de conjecture » :

> (…) il s'agit alors pour l'enseignant de susciter un certain nombre d'énoncés conjecturaux (…). Le débat porte alors d'une part sur la correction des énoncés proposés en tant qu'énoncés scientifiques (exigence de forme) et d'autre part sur la validité de l'affirmation ; les arguments apportés par les participants sont à leur tour examinés sous ces deux aspects. (Op. cité, p. 92)

Ce dispositif offre en effet deux caractéristiques particulièrement adéquates à notre propos. D'une part, les propositions de tous les élèves d'une classe s'ajoutant les unes aux autres, les probabilités d'apparition des différentes contraintes visées sont optimisées. D'autre part, la forme du débat place sur les élèves la responsabilité d'examiner la validité des conjectures proposées et donc de les tester sur des cas particuliers, de les réfuter lorsqu'il y a lieu et de poursuivre ainsi la recherche de la manière la plus adidactique possible, c'est-à-dire avec le moins possible d'interventions de l'enseignant.

Nous devons néanmoins nous demander, pour chacune des contraintes C1 à C7 identifiées plus haut, dans quelle mesure nous pouvons nous attendre à ce que les élèves de notre expérience y fassent appel d'eux-mêmes. Nous procédons maintenant à cet examen préalable :

C1 devrait être rapidement mobilisé par une partie importante des élèves. En effet, cette contrainte est fréquemment utilisée comme critère de pertinence dans les cours de maths et de physique du collège. Et même s'ils ne l'utilisent généralement pas eux-mêmes dans leurs pratiques mathématiques usuelles (c'est-à-dire sous le contrat didactique usuel), il est probable que dans le contexte d'un débat scientifique (et sous le contrat didactique spécifique à ce contexte), les élèves cherchent à mobiliser des outils de contrôle connus.

La mobilisation de C2 par les élèves semble beaucoup moins probable car cette contrainte n'est pratiquement jamais explicitée dans les cours de mathématiques et de physique. Nous nous attendons donc à ce qu'une intervention de l'enseignant soit probablement nécessaire à son apparition.

Par rapport aux deux premières contraintes, C3 à C6 sont plus spécifiques à la situation géométrique. Leur mise en évidence suppose une analyse fonctionnelle (examiner comment varie l'aire lorsque les côtés varient) couplée avec une modélisation algébrique relativement complexe pour les élèves concernés (par exemple, la contrainte « A est nulle si $a+b=c$ » doit être modélisée par la présence du facteur $(a+b-c)$ dans la formule). En ce sens, elles constituent à la fois une difficulté importante et un enjeu fort de notre dispositif. Avant les expérimentations en classe, nous étions très incertains quant à la probabilité de construction de ces contraintes par les élèves au cours du débat.

C7 doit impérativement être mobilisée par les élèves pour que la recherche puisse avancer de manière contrôlée. Nous pouvons essayer de favoriser son emploi en exposant le problème aux élèves à partir d'un cas particulier (par exemple 3–4–5) et en laissant ce cas exposé durant le débat.

Notons enfin que C4 est contenue dans C3 : si $a=0$ et si $b=c$, alors $a+b=c$. De même C6 est contenue dans C5 : si $a<0$, alors $a+b<c$ ou $a+c<b$. Autrement dit, l'identification des cas dégénérés et impossibles de la première espèce est plus utile que celle des cas de la deuxième espèce. Et de fait, ce sont bien les cas de la première espèce qui constituent les clés pour accéder à un modèle algébrique relativement abouti.

REFERENCES

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie : perspectives curriculaires, la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Legrand M. (1990) Le débat scientifique en cours de mathématiques. In Commission Inter-Irem-Université (Ed.) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, principes et réalisations* (pp.91-109).

Linn, M. C., Davis, E. A. et Bell, P. (2004). *Internet environments for science education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ostermann A., Wanner G. (2012) *Geometry by Its History*. Berlin : Springer-Verlag.

Rocard, M., Cesrmley, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Herniksson, H., Hemmo, V. (2007). Science education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Retrieved March 2010, from http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf.