☙ Brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier ❧
septembre 2020

Exercice 1 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

La fabrication de verre minéral résulte d'une fusion de trois éléments (quartz, potasse et oxyde). Tous ces éléments sont chauffés jusqu'à leur température de fusion de 1 500 degrés Celsius dans un four à cuve de vitrification, puis brassés pendant plusieurs heures. Le verre liquide est ensuite acheminé à une presse automatique qui produit des ébauches de verres, lesquels sont refroidis lentement jusqu'à température ambiante dans un four de recuit.

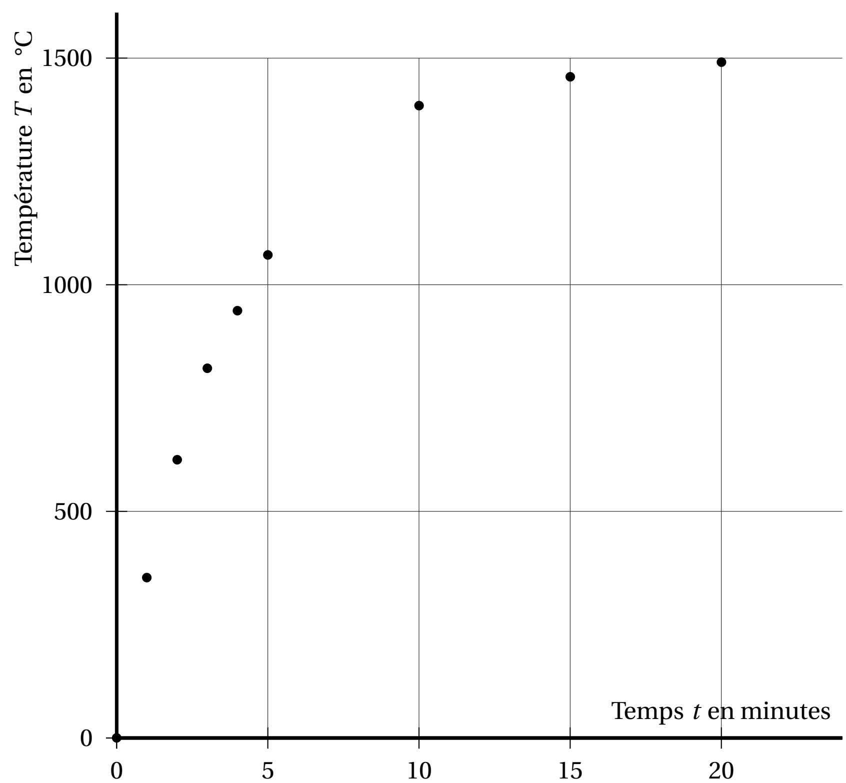
Dans les parties A, B et C, on s'intéresse à la mise en fusion des éléments constitutifs du verre minéral dans le four à cuve. Dans la partie D, on étudie le refroidissement du verre dans le four de recuit.

Partie A. Statistiques à 2 variables

On a mesuré la température du verre minéral dans la cuve de vitrification depuis le début du processus de chauffage jusqu'à la fusion. On obtient les résultats suivants :

Temps t (en minutes)	0	1	2	3	4	5	10	15	20
Température du verre T (en degrés Celsius)	24	354	614	816	943	1 066	1 395	1 459	1 491

Représentation de la série $(t\,;\ T)$:



Le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t\ ;\ T)$ est $r_1 \approx 0,865$.

L'allure du nuage de points représentant la série conduit à procéder à un changement de variable, en posant :

$$z = \ln\left(\frac{1\,500}{1\,500 - T}\right).$$

On obtient le tableau de valeurs suivant (les résultats ont été arrondis à 10^{-3} près).

Temps t (en minutes)	0	1	2	3	4	5	10	15	20
z	0,016	0,269	0,527	0,785	0,991	1,240	2,659	3,600	5,116

1. Le coefficient de corrélation linéaire de cette nouvelle série $(t\ ;\ z)$ est $r_2 \approx 0,999$.
   Expliquer pourquoi le changement de variable est pertinent.
2. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en t selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$, où a et b sont arrondis au millième.
3. En déduire, en utilisant le changement de variable, une expression de T en fonction de t de la forme
   $$T = A\mathrm{e}^{-0,251\,t} + 1\,500,$$
   où A est arrondi à l'unité.

Partie B. Résolution d'une équation différentielle

Le processus de chauffage commencé, la loi de propagation de la chaleur nous permet d'étudier la température du verre minéral dans la cuve en fonction du temps.
On modélise ainsi la température du verre minéral (en degré Celsius) par une fonction du temps (en minutes) solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad y' + 0,25y = 375$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :
   $$(E_0): \quad y' + 0,25y = 0.$$
   On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$

2. **a.** Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 1\,500$.
   Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E).
   b. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
3. À l'instant $t = 0$ (démarrage du four à cuve), les éléments constitutifs du verre minéral sont à température ambiante c'est-à-dire 24 degrés Celsius.
   Déterminer la fonction h donnant la température du verre minéral (en degrés Celsius) en fonction du temps t (en min) vérifiant cette condition initiale.

Partie C. Étude d'une fonction

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la température du verre minéral en fonction du temps t, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 1\,500 - 1\,476\mathrm{e}^{-0,25t}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats ci-dessous. Ces résultats sont admis et pourront être utilisés pour répondre aux questions qui suivent.

Calcul formel	
1	Dérivée$(1\,500 - 1\,476\exp(-0,25t))$ $\rightarrow 369\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$
2	Intégrale$(1\,500 - 1\,476\exp(-0,25t))$ $\rightarrow 5\,904\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 1\,500t + c_1$
3	Limite$(1\,500 - 1\,476\exp(-0,25t), +\mathrm{inf})$ $\rightarrow 1\,500$
4	PolynômeTaylor$(1\,500 - 1\,476\exp(-0,25t), t, 0, 2)$ $\rightarrow 24 + 369t - \dfrac{369}{8}t^2$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. *Les questions* a., b., et c. *suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève pas de point.*

a.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$	$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 24$	$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1\,500$	$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1\,476$

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont l'équation est :

$t = 1\,500$	$y = 0$	$y = 1\,476$	$y = 1\,500$

c. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = 369t + 24$	$y = 369t - 24$	$y = 369 + 24t$	$y = 369t - \dfrac{369}{8}t^2$

Partie D. Étude d'une suite

Après le brassage du verre liquide pendant plusieurs heures, on commence le processus de refroidissement. La température du verre doit subir un abaissement régulier afin que le verre se solidifie sans se cristalliser.
On modélise l'évolution de la température du verre en fonction du temps à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1\,500 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n + 2,4 \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on note u_n la température du verre en degrés Celsius au bout de n minutes et u_0 désigne la température initiale du processus de refroidissement.
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 24$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. **a.** En déduire une expression de v_n en fonction de n.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,476 \times 0,9^n + 24$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter, dans le contexte, le résultat obtenu.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
n ← 0
u ← 1500
Tant Que u > 25
    u ← u × 0,9 + 2,4
    n ← n + 1
Fin Tant Que
```

Remarque : dans cet algorithme $n \leftarrow 0$ signifie que la valeur 0 est affectée à la variable n.

En sortie de cet algorithme, la valeur de n est 70. Que représente ce nombre dans le contexte ?

EXERCICE 2 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Les résultats approchés seront à arrondir au millième

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en titane de longueur 80 mm.

Partie A : Loi normale

Une tige est considérée comme conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, est dans l'intervalle $[79,63\,;\,80,37]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prise au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart-type $0,16$.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production ne soit pas conforme.

2. Calculer la probabilité $P(X \leqslant 80,28)$.

Partie B : Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, on considère que 2 % des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.

2. Pour cette question, on prend $n = 50$.
Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 tiges de longueur non conforme dans ce prélèvement.

3. On considère maintenant que $n = 200$.
On admet que la loi de la variable aléatoire Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On désigne par Z la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson. À l'aide de l'approximation de Y par Z, calculer la probabilité d'avoir au plus 3 tiges de longueur non conforme.

Partie C : Test d'hypothèse

Un client reçoit un lot important de tiges de ce type. On souhaite construire un test d'hypothèse bilatéral pour décider, au seuil de 5 %, si on peut considérer que la moyenne des longueurs des tiges reçues est égale à la longueur théorique de 80 mm.
On note L la variable aléatoire qui, à une tige prélevée au hasard dans le lot, associe sa longueur en mm. On admet que L suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $0,16$.
On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tiges prélevé dans le lot, associe la moyenne des longueurs de ces 100 tiges.
On admet que $\overline{L}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = \dfrac{0,16}{\sqrt{100}} = 0,016$.
Pour ce test :

- L'hypothèse nulle est : H_0 : « $\mu = 80$ ».
- L'hypothèse alternative est : H_1 : « $\mu \neq 80$ ».
- Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le réel positif h tel que $P(80 - h < L < 80 + h) = 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. Le client prélève un échantillon aléatoire de 100 tiges dans la livraison et il constate que la moyenne des longueurs de cet échantillon est de $80,02$ mm.
Quelle est la conclusion du test ?

Partie D : évènements indépendants

En fin de processus, en plus du défaut de longueur, on contrôle aussi le défaut de courbure des tiges.
On constate sur la production d'une journée que 2 % des tiges ont un défaut de longueur et que 5 % des tiges ont un défaut de courbure.
On prélève une tige au hasard dans cette production.
On note B l'évènement : « la tige prélevée présente un défaut de longueur ».
On note C l'évènement : « la tige prélevée présente un défaut de courbure ».
On admet que les évènements B et C sont indépendants.

1. Calculer $P(B \cap C)$.

2. Calculer la probabilité que la tige contrôlée ait au moins un des deux défauts.

3. Calculer la probabilité que la tige contrôlée n'ait aucun des deux défauts.