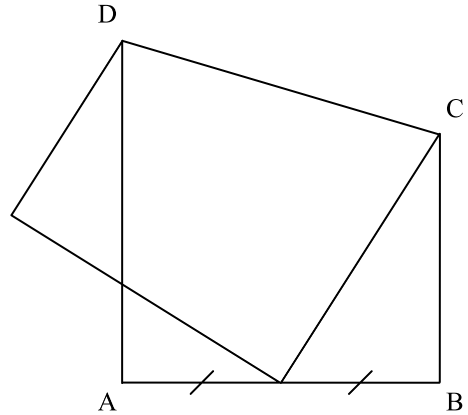
Annexe 3 : comptes rendus de recherche

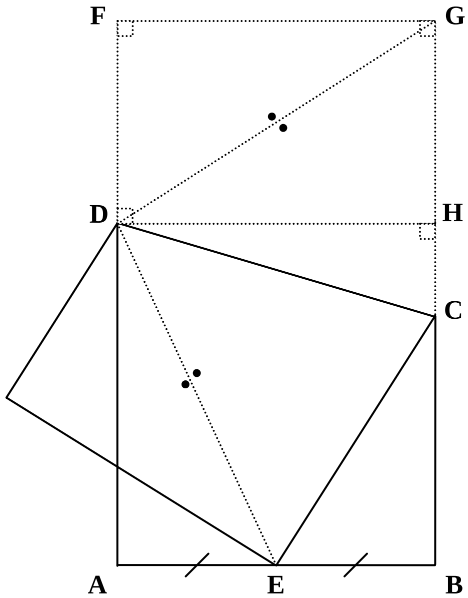
Exemple 1 : **UN PROBLEME DE PLI...**



On a plié une feuille rectangulaire, comme indiqué ci-contre, en amenant le coin supérieur droit au milieu du côté inférieur [AB].

Sachant que ce côté [AB] mesure 168 mm et que le pli [CD] mesure 175 mm, trouver la longueur de l'autre côté de cette feuille ...

Présence d'angles droits…
↳ utilisation du théorème de Pythagore…



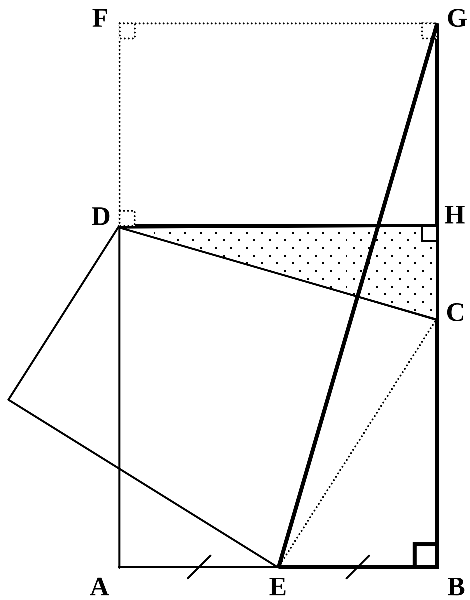
Par exemple :
Soit L la longueur cherchée ; en posant α = DF et β = CG, on obtient :
$BC^2 + BE^2 = EC^2$ c'est à dire $(L - \beta)^2 + 84^2 = \beta^2$ ① car CE = CG
$AD^2 + AE^2 = ED^2$ c'est à dire $(L - \alpha)^2 + 84^2 = \alpha^2 + 168^2$ ② car DG = DE
$CH^2 + HD^2 = CD^2$ c'est à dire $(\beta - \alpha)^2 + 168^2 = 175^2$
d'où : $\beta - \alpha = \sqrt{2401} = 49$ ③

De ① et ② on déduit : $\beta = \dfrac{L^2 + 7056}{2L}$ et $\alpha = \dfrac{L^2 - 21168}{2L}$ puis en remplaçant dans ③ on trouve :
$\dfrac{7056 + 21168}{2L} = 49$, d'où : $L = \dfrac{28224}{2 \times 49} = 288$ (mm)

↳ ou trigonométrie dans un triangle rectangle… Par exemple :
$HC = \sqrt{175^2 - 168^2} = 49$; $\sin \widehat{HCD} = \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{168}{175}$, d'où : $\widehat{HCD} \approx 73{,}74°$; or $\widehat{BCE} = 180° - 2 \times \widehat{HCD}$, d'où : $\widehat{BCE} \approx 32{,}52°$. Comme $EC = 84 / \sin \widehat{BCE}$ et $CB = 84 / \tan \widehat{BCE}$, on a donc : $EC \approx 156{,}25$ et $CB \approx 131{,}75$, d'où $L \approx 288$ (mm)

L'inconvénient, ici, est que les résultats sont approchés… En classe de 1ère (ou si l'on a eu l'opportunité de le montrer en Seconde…) on peut travailler en valeurs exactes en passant par :

$$\begin{aligned} \sin \widehat{BCE} &= \sin(180° - 2 \times \widehat{HCD}) \\ &= \sin 2 \times \widehat{HCD} \\ &= 2 \times \sin \widehat{HCD} \times \cos \widehat{HCD} \quad \left(= 2 \times \frac{168}{175} \times \frac{49}{175}\right) \end{aligned}$$



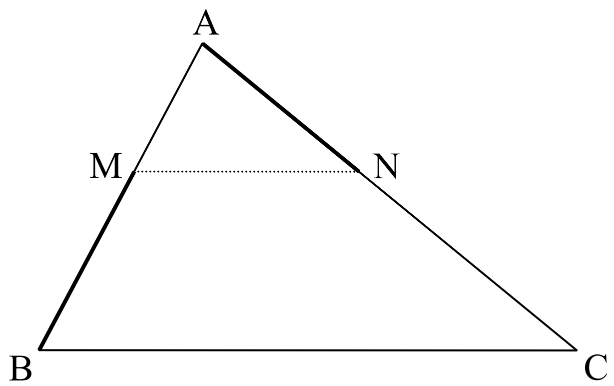
<u>Remarque</u> : les élèves qui utilisent la trigonométrie pour cet exercice établissent des égalités de rapports… qui peuvent également s'interpréter par le fait que l'on a des triangles de même forme… à savoir les triangles BEG et HDC…
(*Indication* : comme CE = CG et DE = DG, la droite (CD) est la médiatrice du segment [EG] et donc les segments EG et CD sont bien perpendiculaires tout comme les segments BG et DH…)

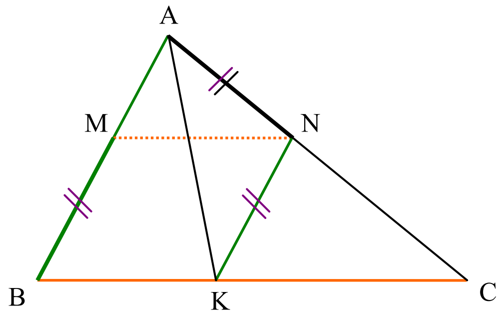
En utilisant comme précédemment le fait que $\beta - \alpha = 49$ puis en écrivant l'égalité des rapports on obtient :
$\dfrac{GB}{DG} = \dfrac{EB}{CH}$ c'est à dire $\dfrac{L}{168} = \dfrac{84}{49}$ qui amène L = 288 !

Annexe 3 : comptes rendus de recherche

Exemple 2 : UN PROBLEME DE PARTAGE...

Un triangle ABC étant donné, trouver comment construire le point M sur le côté [AB] et le point N sur le côté [AC] tels que : AN = BM et (MN) // (BC)





Qui dit parallélisme dit ... parallélogramme ...

- compléter la figure en plaçant le point K sur le segment [BC] tel que MNKB soit un parallélogramme c'est à dire tel que [NK] // [AB] et coder la figure en conséquence (pour les égalités de longueurs + les droites parallèles de même couleur)

Reconnaissance de configurations…

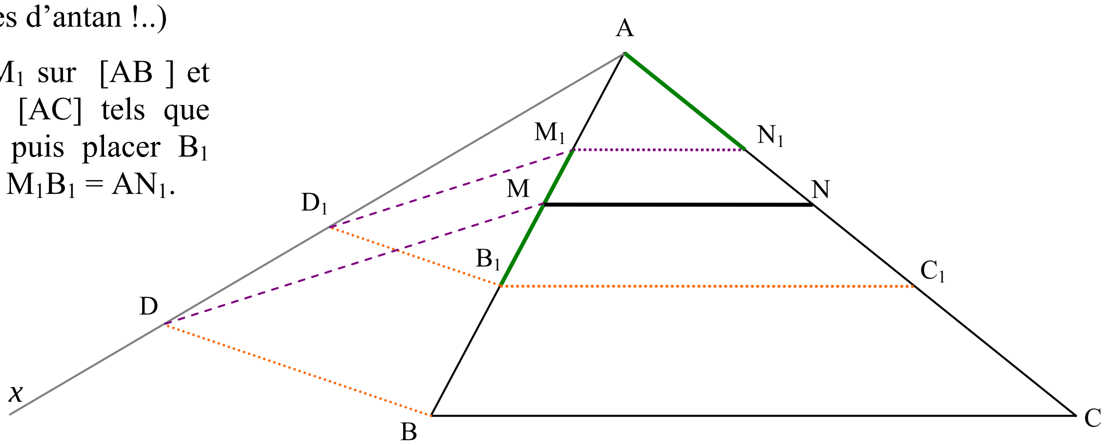
- le triangle ANK est isocèle en N
- considérations angulaires : angles à la base égaux + angles alternes-inernes (mettre les parallèles de la même couleur aide grandement à reconnaître cette configuration clé…)

Par abandon d'une contrainte...

Essayer successivement d'abandonner telle ou telle contrainte... l'abandon de (MN) // (BC) semble difficile à récupérer par la suite, sinon par essais et corrections successifs...

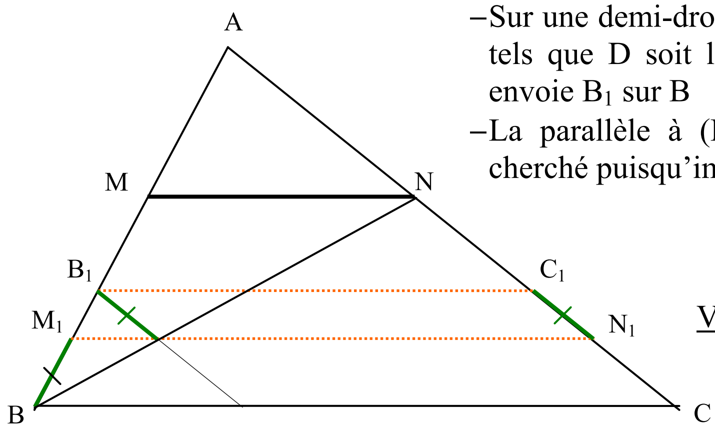
- abandonner la contrainte concernant le côté [BC] ... puis la récupérer par agrandissement-réduction (où sont les homothéties d'antan !..)

–Placer un point M_1 sur [AB] et un point N_1 sur [AC] tels que (M_1N_1) // (BC), puis placer B_1 sur $[M_1B]$ tel que $M_1B_1 = AN_1$.



–Sur une demi-droite quelconque [A*x*), construire les points D et D_1 tels que D soit l'image de D_1 par l'homothétie de centre A qui envoie B_1 sur B

–La parallèle à (D_1M_1) passant par D coupe [AB] au point M cherché puisqu'image de M_1 par cette même homothétie…



Variante : abandonner la contrainte concernant le sommet A…

Annexe 3 : comptes rendus de recherche

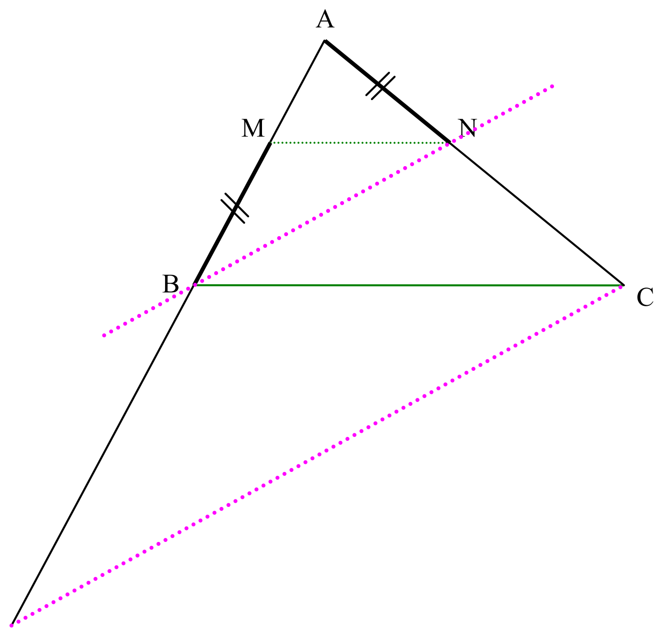
Par des calcul de longueurs…

Les théorèmes de Pythagore et de Thalès étant rencontrés dès le collège, une fois en lycée on peut dire que nos élèves sont relativement bien familiarisés à leur emploi ainsi que pour repérer les situations propices à leur utilisation. De ce fait, nos élèves se sentent souvent plus “armés” pour se lancer dans des calculs de longueurs que dans des démarches purement géométriques. Il n’est donc pas rare, pour ne pas dire “naturel” pour eux, d’essayer de ramener un exercice de construction à un calcul de longueur(s).

L’absence de mesure des longueurs des côtés du triangle peut constituer ici un frein à se lancer dans cette démarche, mais à chaque fois que cet exercice a été donné, quelques élèves se sont tout de même lancé dans des calculs de longueurs, certains en posant AM = *x*, d’autres AN = *x* = MB…
Le fait que (MN) soit parallèle à (BC) crée effectivement un réflexe quasi pavlovien amenant à l’égalité $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}}$. Un peu plus difficilement vient ensuite la traduction du fait que AN = MB, ce qui donne, par exemple : $\frac{\text{AM}}{\text{AM}+\text{AN}} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}}$… d’où ils déduisent $\text{AM} = \frac{\text{AN}^2}{\text{NC}}$ mais se trouvent ensuite bloqués…
(c’est le cas de ceux qui ont pris pour inconnue *x* = AM)

Ce n’est en effet pas si simple pour nos élèves que de penser alors ***à changer de stratégie***. On peut cependant essayer de leur faire comprendre pourquoi le résultat précédent conduit à une impasse vu qu’ils ont exprimé AM à l’aide des longueurs AN et NC qui ont elles même le statut d’inconnues… et les inciter à “*revenir en arrière*” pour écrire, par exemple : $\frac{\text{AB}-\text{AN}}{\text{AB}} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}}$… Pour cela il faudra pas mal d’entraînement et avoir compris que AB et AC sont des données du problème même si l’on n’en connaît pas la valeur et qu’il est donc “plus naturel” de procéder ainsi…
(par contre ceux qui, dès le départ, ont pris pour inconnue *x* = AN n’auront pas tous ce problème…)

Mais ce n’est pas fini pour autant car ils aboutissent ensuite à $\text{AN} = \frac{\text{AB}\times\text{AC}}{\text{AB}+\text{AC}}$, calcul qui n’amène pas de solution satisfaisante pour dégager une **construction exacte**…



Une “**clé**” consiste alors à transformer cette égalité sous la forme $\frac{\text{AN}}{\text{AC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AB}+\text{AC}}$ que l’on interprète comme une “égalité de Thalès”…

Il reste ensuite à enrichir la figure en prolongeant le côté [AB] d’une longueur égale à AC…

<u>Remarque</u> : les élèves ont énormément apprécié la *beauté* de cette solution, peu courante pour eux, car plus habitués à raisonner dans le sens :

“Thalés → égalité de rapports”

Reconnaître des expressions et les contextualiser devient alors une méthode parmi d’autres pour ces élèves. Ainsi, par exemple, pour résoudre le “petit” problème suivant :

> Étant donné trois nombres positifs *a*, *b* et *c*, démontrer que :
> $$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

cela sera quasiment naturel pour certains de penser à considérer l’expression $\sqrt{a^2+b^2}$ comme l’hypoténuse d’un triangle rectangle de côté *a* et *b* ou encore $(a+b+c)\sqrt{2}$ comme la longueur de la diagonale d’un carré de côté (*a* + *b* + *c*) ➷ voir compte rendu de recherche **Annexe 3b**…

Annexe 3 : comptes rendus de recherche

Solution proposée par un élève de 1ère S en option scientifique : faire intervenir une isométrie…

Comme AN = BM, on peut tenter de chercher une isométrie, transformant [AN] en [BM] par exemple...

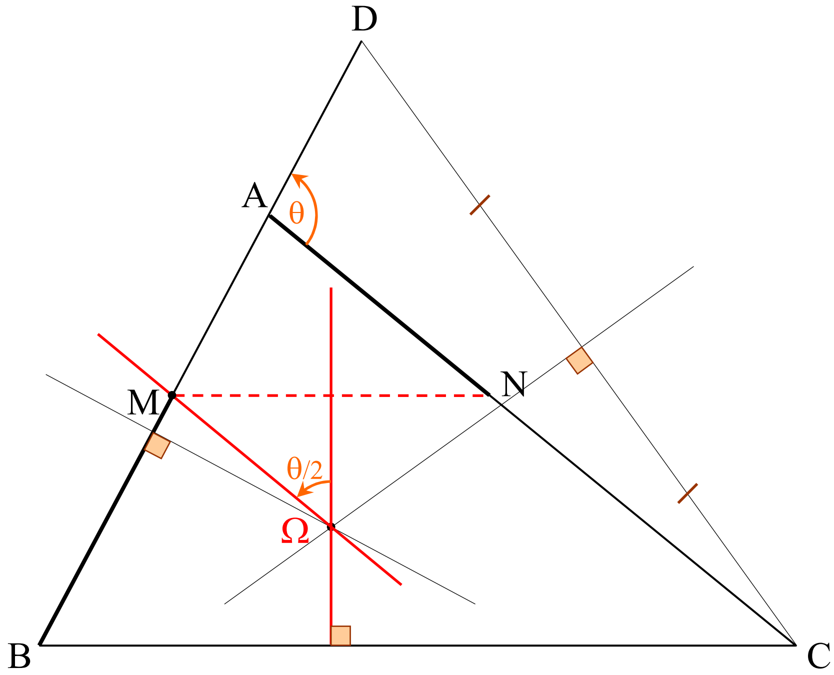
➷ Faire intervenir la rotation ***r*** qui envoie la demi-droite [AC) sur la demi-droite [BA).
Si Ω est son centre et θ son angle, on a ***r*** : $\Omega \mapsto \Omega$

$A \mapsto B$

$C \mapsto D$ tel que $D \in [BA)$ et $BD = AC$

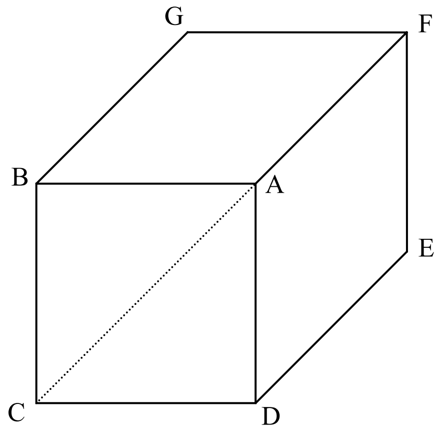
$N \mapsto M$

et $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BD}\right)\quad [2\pi]\ldots$



Annexe 3 : comptes rendus de recherche

Exemple 3 : CONSTRUCTION DE FIGURE



Sur la figure ci-contre :
- ABCD est un carré,
- ABGF et ADEF sont des losanges,
- les points C, A et F sont alignés.

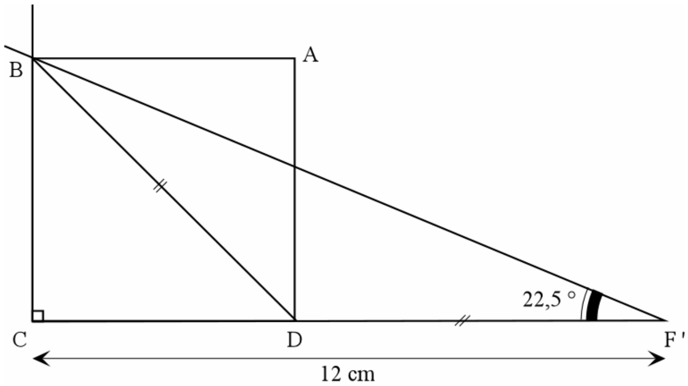
Le but de cet exercice est de trouver une construction exacte de cette figure de telle sorte que CF = 12 cm.

➢ Solution faisant intervenir une transformation : par “abandon d’une contrainte”… on construit une figure *semblable* à celle demandée à partir d’un carré quelconque ABCD, puis selon le cas on est ramené à agrandir ou à réduire la figure à l’aide d’une homothétie…

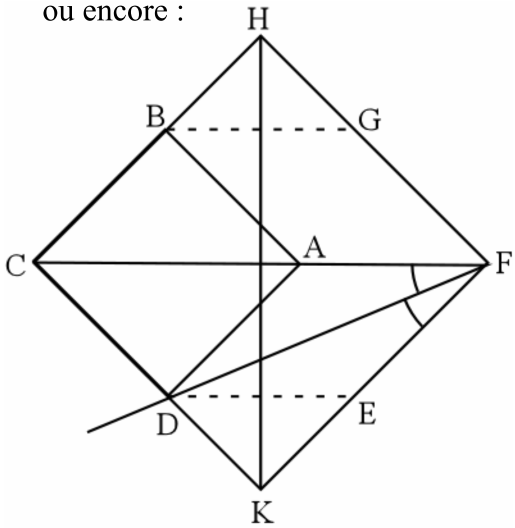
Mais il y a bien d’autres façons d’y arriver :

➢ Solutions faisant intervenir des considérations angulaires :

CF = CA + AF = DF’ + CD avec F’ tel que D sur [CF’], d’où BDF’ isocèle en D, …
On trace [CF’] de 12 cm puis une demi-droite d’origine F’ faisant un angle de 22,5° avec [F’C) qui coupe la perpendiculaire en C à [F’C] en B, on peut alors construire le carré CBAD avec D sur [CF’], etc.



ou encore :



On trace un carré CHFK dont les diagonales mesurent 12 cm, puis on trace la bissectrice de $\widehat{CFK}$ qui coupe [CK] en D, etc.

➢ sans oublier une solution algébrique : en posant x la longueur du carré ABCD, on trouve :

$$x\sqrt{2} + x = 12 \text{ d'où } x = \frac{12}{1+\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 12 \ldots$$

on peut en déduire une construction exacte en partant d’un carré de 12 cm de côté… (exemple où “rendre rationnel le dénominateur” présente de l’intérêt…)

Annexe 3 : comptes rendus de recherche

Pour développer l'intelligence du calcul…[1]

Exemple 4 : CALCUL ET GRANDS NOMBRES : LES PUISSANCES DE 10

Sans utiliser votre calculatrice, ranger dans l'ordre croissant les trois nombres qui suivent :

$A = 999\,999\,999\,999 \times 999\,999\,999\,999$

$B = 999\,999 \times 999\,999 \times 999\,999 \times 999\,999$

$C = 999\,999\,999\,999\,999\,999 \times 999\,999$

L'ordre de grandeur des trois nombres est 10^{24}. Une calculatrice scientifique ou graphique où les entrées sont limitées à 10 chiffres ne permet directement que de poser le calcul de B pour lequel elle donne le résultat : 9.99996 E23. L'utiliser pour comparer les nombres va donc nécessiter des détours et il est clair que le calcul à la main via les puissances de 10 est ici particulièrement performant, comme le montrent les solutions d'élèves que nous avons reproduites. Une calculatrice formelle, comme la TI89, en mode approché, affiche, pour ces trois calculs, les résultats suivants : 1.E 24, 9.99996 E23 et 9.99999 E23. Son utilisation est ici bien sûr à éviter[2].

Exemples de solutions données par des élèves :

1. $A = (10^{12} - 1)^2 = 10^{24} - 2\times10^{12} + 1$

$B = (10^6 - 1)^2\times(10^6 - 1)^2 = 10^{24} - 4\times10^{18} + 6\times10^{12} - 4\times10^6 + 1$

$C = (10^{18} - 1)\times(10^6 - 1) = 10^{24} - 10^{18} - 10^6 + 1$

$A - C = 10^{18} - 2\times10^{12} + 10^6 = 10^6\times(10^{12} - 2\times10^6 + 1) = 10^6\times(10^6 - 1)^2 > 0$ d'où $A > C$

$C - B = 3\times10^{18} - 6\times10^{12} + 3\times10^6 = 3\times10^6\times(10^6 - 1)^2 > 0$ d'où $C > B$

Conclusion : $B < C < A$

2. En posant $\alpha = 999\,999$…

$A = (\alpha\times10^6 + \alpha)^2 = \alpha^2\times(10^6 + 1)^2 = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} + 2\times10^6)$

$B = \alpha^4 = \alpha^2\times(10^6 - 1)^2 = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} - 2\times10^6)$

$C = (\alpha\times10^{12} + \alpha\times10^6 + \alpha)\times\alpha = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} + 10^6)$

Or : $-2\times10^6 < 10^6 < 2\times10^6$…

Exemple 5 : CALCUL ET RECONNAISSANCES DE FORMES, DECOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS…

Sans utiliser votre calculatrice, calculer la valeur exacte du produit suivant :

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\times$$
$$(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}) = P$$

<u>Version d'origine</u> [IREM de Strasbourg] : On considère l'expression $1 \bigcirc \sqrt{2} \triangle \sqrt{3} \square \sqrt{5}$. En remplaçant chacun des signes $\bigcirc$, $\triangle$, $\square$ par les signes + ou –, déterminer toutes les expressions possibles puis calculer leur produit.

Quelle que soit la calculatrice, on trouve **P = –71**. *Trouver un nombre entier surprend plus d'un élève et ils se demandent alors si leur calculatrice ne leur a pas joué un mauvais tour... d'où une certaine curiosité suivie d' une motivation certaine pour se lancer dans un calcul à la main.*

➷ ***identités remarquables* à… remarquer !**

[1] Voir annexe au **Rapport sur le calcul** de la CREM (**C**ommission de **R**éflexion sur l'**E**nseignement des **M**athématiques présidée par Jean-Pierre Kahane)

[2] Il faut savoir aussi que depuis plusieurs années maintenant, je ne cherche plus à situer cet exercice dans la rubrique « plus fort que ma calculatrice »… car elles sont de plus en plus performantes. Je le donne aujourd'hui dans ma classe "option Sciences" en plaçant cet exercice, avec quelques autres, sous le titre "défis"… et en disant simplement : « *Sans utiliser votre calculatrice, pouvez-vous ranger dans l'ordre croissant les trois nombres qui suivent ?* » et les élèves sont tout autant motivés sans chercher à utiliser leur calculatrice !

Annexe 3 : comptes rendus de recherche

La reconnaissance d'identités et trouver de "bonnes" associations rend donc cet exercice formateur à plus d'un titre…

En posant $a = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $b = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $c = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $d = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, $e = 1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $f = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, $g = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ et $h = 1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$, on peut procéder ainsi :

A = $a \times g = [(1+\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})]\times[(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{5})] = (1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = -5+2\sqrt{2}-2\sqrt{15}$

B = $b \times h = [(1-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})]\times[(1-\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{5})] = (1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = -5-2\sqrt{2}-2\sqrt{15}$

C = $d \times c = [(1+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})]\times[(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{5})] = (1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 = -5+2\sqrt{2}+2\sqrt{15}$

D = $f \times e = [(1-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})]\times[(1-\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{5})] = (1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 = -5-2\sqrt{2}+2\sqrt{15}$

Puis : ***A × C*** = $(-5+2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{15})^2 = -27-20\sqrt{2}$

B × D = $(-5-2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{15})^2 = -27+20\sqrt{2}$

D'où* P** = $(-27)^2-(20\sqrt{2})^2 = 729-800 = -71$ ***!

Exemple 6 : DECOMPOSITION ET RECOMPOSITION DE NOMBRES : LES NOMBRES DE FERMAT

Le texte ci-après est celui d'une fiche conçue pour des élèves de 1ère S en option Sciences[3]. Le problème posé, outre son intérêt historique, m'a semblé particulièrement intéressant pour illustrer le jeu de décomposition et recomposition de nombres que met en jeu le calcul en arithmétique.

Les nombres de Fermat sont définis pour $n \in \mathbb{N}$ par $F_n = 2^{(2^n)}+1$.

1° Donner une estimation du nombre de chiffres de F_{10}.

2° Déterminer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.

3° Fermat croyait, à tort, que les nombres F_n étaient tous des nombres premiers (un nombre premier est un nombre entier admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui même). Mais Euler montra en 1732 que F_5 était divisible par 641 en utilisant le fait que 16 est égal à 641 moins une puissance de 5 et la décomposition de 640 en un produit de facteurs premiers…

Essayer de retrouver la démonstration d'Euler (à l'époque il ne disposait pas de calculatrice !).

La réponse à la première question mobilise l'approximation particulièrement utile $2^{10} \approx 10^3$.
Alors $F_{10} \approx 2^{1000}$ c'est à dire $F_{10} \approx (2^{10})^{100} \approx (10^3)^{100}$ donc ce nombre a environ 300 chiffres.

Pour la question 3, une solution possible trouvée par des élèves est la suivante :

$2^{32} = 16\times 2^{28}$, or $5^4 = 625 = 641-16$ ou encore $16 = 641-5^4$,
d'où $2^{32} = (641 - 5^4)\times 2^{28} = 641\times 2^{28} - (5\times 2^7)^4 = 641\times 2^{28} - (641 - 1)^4$.
En décomposant $(641 - 1)^4$ en produit de deux carrés et en développant on a :
$(641-1)^4 = (641-1)^2\times(641-1)^2 = \left(641^2-2\times 641+1\right)\times\left(641^2-2\times 641+1\right)$

On finit donc par arriver à : $2^{32} = 641\times q-1$ c'est à dire au fait que F_5 est divisible par 641.

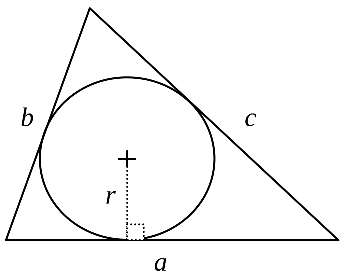
<u>Remarque</u> : Le calcul mené ci-dessus est relativement laborieux et il peut être tout à fait intéressant de comparer cette solution avec une solution utilisant les congruences. Les deux décompositions suivantes de 641 : 641 = 640+1 et 641 = 625+16 conduisent aux deux relations de congruence :
$5\times 2^7 \equiv -1$ (641) et $5^4 \equiv -2^4$ (641).
On en déduit que : $5^4\times 2^{28} \equiv 1$ (641) et donc que : $2^{32} \equiv -1$ (641). F_5 est bien divisible par 641.

[3] Voir "**La copie de Jean-Christophe**"

Exemple 7 : TRAVAILLER AVEC DES FORMULES

La formule de Héron pour l'aire d'un triangle

Voici une autre fiche pouvant être proposée aussi bien à des élèves de Seconde que de 1ère S, concernant cette fois un travail sur des formules. Il nous semble bien illustrer le fait que le travail sur des formules, même a priori données, peut mobiliser l'intelligence du calcul, et montrer également qu'une certaine complexité, nécessaire pour sortir du cadre des calculs routiniers, est accessible aux élèves actuels, si elle est bien sûr adéquatement amenée et gérée par l'enseignant.



Les longueurs a, b, c des trois côtés d'un triangle étant données, ce triangle est déterminé à une isométrie près, donc son périmètre et son aire le sont. Il est facile de calculer son périmètre $\mathcal{P}$ en fonction de a, b et c. Peut-on, de la même façon, trouver une formule permettant de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle en fonction de a, b et c ?

Un essai avec le cercle inscrit au triangle fait bien intervenir la longueur des trois côtés mais il reste un intrus, le rayon r du cercle inscrit, puisque l'on obtient $\mathcal{A} = \dfrac{\mathcal{P}}{2} \times r = p \times r$ où p est le demi-périmètre du triangle…

↳ **Démontrer ce résultat** !

Il y a bien la fameuse formule « *Base* × *hauteur* / 2 » en privilégiant l'un des côtés, à condition de pouvoir exprimer la hauteur correspondante en fonction de la longueur des trois côtés… C'est ce qu'a réussi le mathématicien grec Héron (1er siècle après J.-C.) en démontrant la formule suivante :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1° Vérifier cette formule dans le **cas particulier** :

a) d'un triangle équilatéral,
b) d'un triangle rectangle isocèle,
c) d'un triangle isocèle non rectangle,
d) d'un triangle rectangle non isocèle.

2° Étude du cas d'un triangle quelconque :

Calculer l'aire d'un triangle quelconque en fonction de la longueur de ses trois côtés puis montrer que l'on peut se ramener à la formule de Héron…

Le travail sur cette formule, dans les quatre cas particuliers de la première question, n'est qu'un travail de vérification. Pourtant il demande une réelle "intelligence" des calculs comme on peut le voir par les indications ci-dessous. L'étude ensuite du cas du triangle quelconque a été généralement proposée dans les classes à titre de recherche personnelle.

1° a) cas d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur a : $\mathcal{A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Avec $p = \dfrac{3a}{2}$, on a : $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\dfrac{3a^4}{16}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \mathcal{A}$.

b) cas d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse de longueur b et ayant deux côtés de longueur a : $\mathcal{A} = \dfrac{a^2}{2}$. Avec $p = \dfrac{2a+b}{2}$ et $b = a\sqrt{2}$, on a :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2a^4(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{16}} = \sqrt{\frac{a^4}{4}} = \mathcal{A}.$$

c) cas d'un triangle isocèle non rectangle dont la base a pour longueur b et ayant deux côtés de longueur a : $\mathcal{A} = \dfrac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$. Avec $p = \dfrac{2a+b}{2}$, on a :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2a+b}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{2a-b}{2}} = \sqrt{\frac{b^2(4a^2-b^2)}{16}} = \mathcal{A}.$$

Annexe 3 : comptes rendus de recherche

d) cas d'un triangle rectangle non isocèle d'hypoténuse de longueur $b = \sqrt{a^2 + c^2}$: $\mathcal{A} = \frac{ac}{2}$.

Avec $p = \frac{a+b+c}{2}$, on a :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{a+c-b}{2} \times \frac{a+b-c}{2}} \ (*)$$

$$= \sqrt{\frac{[(a+c)^2 - b^2][2ac + b^2 - c^2 - a^2]}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2ac \times 2ac}{16}} = \frac{ac}{2} \text{ car } b^2 = a^2 + c^2 \ldots$$

* *Remarque* : $(b + c - a)(a + b - c) = [b + (c - a)][(b - (c - a)] = \ldots$

2° Soit h est la longueur de la hauteur issue de $\mathcal{A}$. Que l'angle en B soit aigu ou obtus, en appliquant le théorème de Pythagore à deux reprises, on démontre que $h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$ et c'est là que commencent diverses transformations d'écritures qui n'ont rien de "mécanique" :

$$h^2 = \frac{[2ab - (b^2 + a^2 - c^2)][2ab + b^2 + a^2 - c^2]}{4a^2} = \frac{[c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)][(a+b)^2 - c^2]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{\left[c^2 - (a-b)^2\right]\left[(a+b)^2 - c^2\right]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{4a^2}, \text{ d'où :}$$

$$\mathcal{A} = \frac{a}{2} \times h = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)}}{2a}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{16}}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{c+a-b}{2} \times \frac{a+b-c}{2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ \ldots !$$