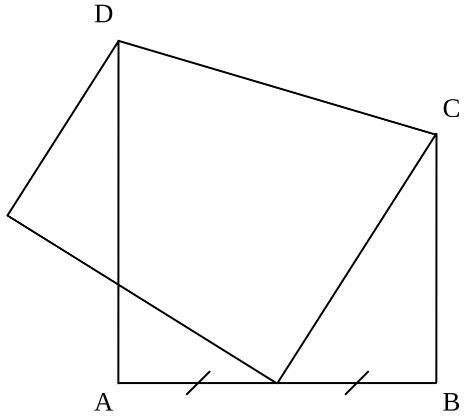
Annexe 2

I. Exemples de problèmes posés en seconde :

PROBLÈME DE PLI...



On a plié une feuille rectangulaire, comme indiqué ci-contre, en amenant le coin supérieur droit au milieu du côté inférieur [AB].

Sachant que ce côté [AB] mesure 168 mm et que le pli [CD] mesure 175 mm, trouver la longueur de l'autre côté de cette feuille ...

➷ **Voir Annexe 3, exemple 1**

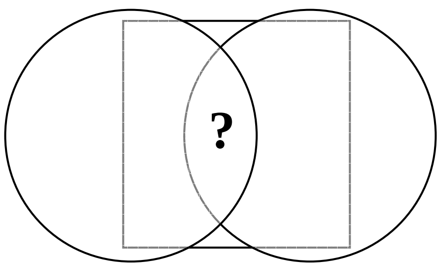
MARIAGES EN CHAÎNE…

Cinq damoiseaux prénommés André, Benoît, Claude, Dominique et Émile ont décidé d'épouser cinq demoiselles prénommées… Andrée, Benoîte, Claude, Dominique et Émilie ! Cependant ils décident de respecter les conditions suivantes :

- Aucun des garçons n'épousera son homonyme féminin.
- Si le garçon prénommé X épouse la jeune fille prénommée Y alors le jeune homme prénommé Y ne peut épouser la jeune fille prénommée X.
- Émile épousera la jeune fille dont l'homonyme masculin épousera Dominique.
- André épousera la jeune fille dont l'homonyme masculin épousera la jeune fille dont l'homonyme masculin épousera la jeune fille dont l'homonyme masculin épousera Benoîte.

Vont-ils tous pouvoir se marier ?

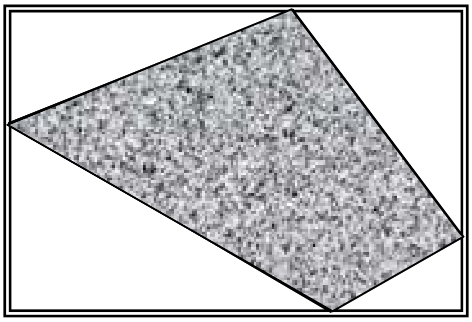
DEUX NAPPES POUR UNE TABLE…



Peut-on recouvrir entièrement une table carrée de 90 cm de côté avec deux nappes circulaires de 1m de diamètre ?

Et avec deux nappes carrées de 85 cm de côté peut-on recouvrir entièrement une table circulaire de 1 m de diamètre ?

UN “NAPPERON” QUADRANGULAIRE…



Sur une table rectangulaire est disposé un napperon ayant la forme d'un quadrilatère dont l'aire est égale à la moitié de celle de la table et dont les sommets appartiennent aux bords de la table comme indiqué sur la figure ci-contre.

Faire quelques figures de votre choix traduisant une telle situation, établir une conjecture… puis la démontrer…

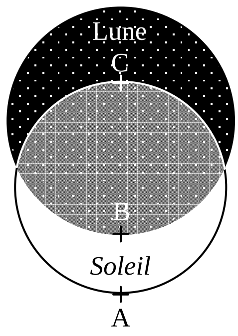
(Rallye mathématiques d'Alsace 1981-1982 – niveau 2^{nde})

GRANDEUR D'UNE ÉCLIPSE DE SOLEIL

Pour une éclipse de Soleil, on peut définir pour un lieu donné et à un instant donné la grandeur de l'éclipse et le pourcentage du disque solaire éclipsé.

$$\text{Grandeur} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{d\,S} \qquad (d\,S = \text{diamètre du Soleil})$$

(A et C sont deux points diamétralement opposé du disque solaire, comme indiqué sur la figure ci-contre, et B est le point d'intersection du diamètre [AC] et de l'arc de lune caché)



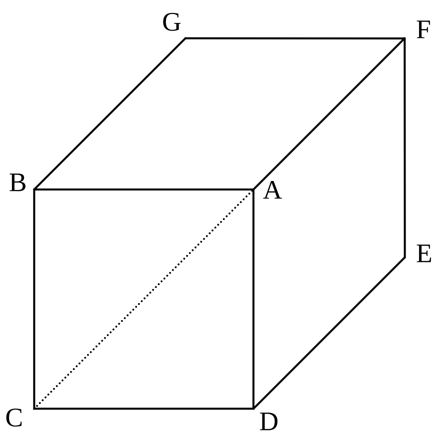
<u>Données</u> : Rayon du Soleil ≈ 696 000 *km*
Rayon de la Lune ≈ 1 740 *km*

Le 11 août 1999, distance Terre – Lune :TL ≈ 373 000 *km*
distance Terre – Soleil : TS ≈ 151 630 000 *km*

1° Si l'on représente la Lune par un disque de rayon 6 cm, quel sera, le 11 août 1999, le rayon du Soleil à la même échelle ?

2° Le 11 août 1999, calculer la grandeur de l'éclipse de Soleil lorsque :

1° $\frac{BC}{d\,S} = 0{,}5$ **2°** $\frac{BC}{d\,S} = 0{,}8$ **3°** $\frac{BC}{d\,S} = 0{,}2$



CONSTRUCTION DE FIGURE

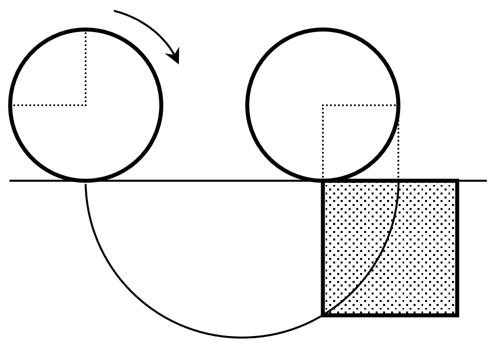
Sur la figure ci-contre :
- ABCD est un carré,
- ABGF et ADEF sont des losanges,
- les points C, A et F sont alignés.

Trouver une construction exacte de cette figure de telle sorte que CF = 12 cm.

Voir Annexe 3, exemple 3

« PROOFS WITHOUT WORDS »

Voici ce que l'on peut découvrir page 10 du livre « Proofs without Words » de Roger B. Nelsen :



Que peut-elle bien signifier ?

(Cette preuve géométrique est attribuée à Thomas Elsner)

UN FROMAGE, DEUX FROMAGES, TROIS FROMAGES…

Pour récompenser ses deux fils qui lui donnent régulièrement un coup de main, un berger leur propose d'aller au marché vendre *un certain nombre* de ses fromages fabriqués à partir du lait de ses brebis et de se partager la recette. Ils vendent chacun des fromages à un prix égal, en francs, au nombre total de fromages qu'ils ont emmenés pour les vendre.

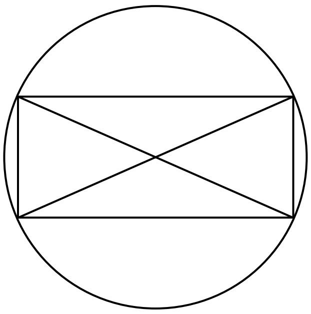
Rentrés chez eux, l'aîné partage la recette, composée exclusivement de pièces de 10 F et de pièces de 1 F, de la façon suivante :

- il prend une pièce de 10 F, il en donne une à son frère,
- il en reprend une ... etc ...
- il reste alors une dernière pièce de 10 F qu'il prend ...
- puis il donne toutes les pièces de 1 F au cadet.

Le cadet proteste car il a moins d'argent que l'aîné. Ce dernier décide alors de compenser la différence en lui donnant des pièces de 1 F qu'il cherche dans sa tirelire.

Combien l'aîné doit-il donner de pièces de 1 F à son frère ?

PROBLÈMES D'OPTIMISATION...



On dispose d'une bille de bois dans laquelle on veut débiter une poutre de section rectangulaire ayant la plus grande aire possible ...

Comment faire ?

Applications :

1. Déterminer à quelle condition le produit de deux nombres de **somme constante** est maximum.
2. Déterminer à quelle condition la somme de deux nombres positifs de **produit constant** est minimum.

Petit problème *: Un pré est bordé par une rivière. Le propriétaire veut y mettre un enclos rectangulaire dont un côté sera la rivière. Il dispose de 40 m de clôture.*

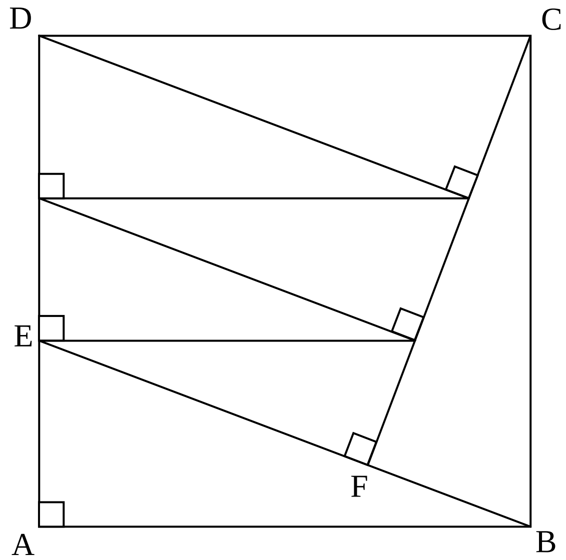
Déterminer les dimensions de l'enclos pour que son aire soit la plus grande possible.

II. Exemples de problèmes que des élèves peuvent “attaquer sans complexe” et résoudre après un an d’option :

UN CARRÉ BIEN TRIANGULÉ…

Voici comment obtenir la figure ci-contre, où ABCD est un carré de côté 1 :

- partir d’un certain point E du côté [AD] et joindre le sommet B
- du sommet C, abaisser le segment [CF] perpendiculaire à [EB],
- tracer la perpendiculaire en E à [AD],
- ‘‘repartir’’ perpendiculairement au segment [CF],
- etc. jusqu’à arriver pile sur le sommet D du carré !



Déterminer, au millième près, la position de E sur [AD].

➪ **Voir “La copie de Geoffroy”**

NOMBRES DE FERMAT…

Les nombres de Fermat sont définis pour $n \in \mathbb{N}$ par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

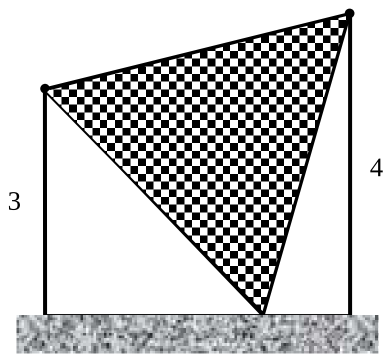
1° Donner une estimation du nombre de chiffres de F_{10}.

2° Déterminer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.

3° Fermat croyait, à tort, que les nombres F_n étaient tous des nombres premiers (un nombre premier est un nombre entier admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui même). Mais Euler montra en 1732 que F_5 était divisible par 641 en utilisant le fait que 16 est égal à 641 moins une puissance de 5 et la décomposition de 640 en un produit de facteurs premiers…

Essayer de retrouver la démonstration d’Euler (à l’époque il ne disposait pas de calculatrice !).

➪ **Voir “La copie de Jean-Christophe”**



LE DRAPEAU TRIANGULAIRE (Challenge Australien) :

Un grand drapeau de la forme d’un triangle équilatéral est suspendu par deux de ses coins au sommet de mats verticaux de 3 et 4 mètres de haut. Le troisième coin affleure exactement au sol.

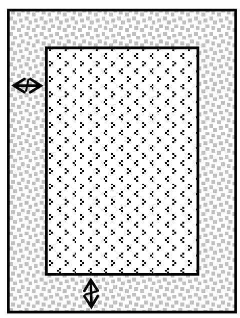
Quelle sont les dimensions exactes de ce drapeau ?

PARTAGE D’UN CHAMP

Quelle est la largeur de la bande qui permet de partager un champ rectangulaire en deux parties de même aire ?

Certains paysans avaient une solution simple, à savoir :

« *Le quart de la différence entre le raccourci pour traverser le champ et ce qui longe le champ* »...



Commenter cette solution en la comparant à votre réponse.