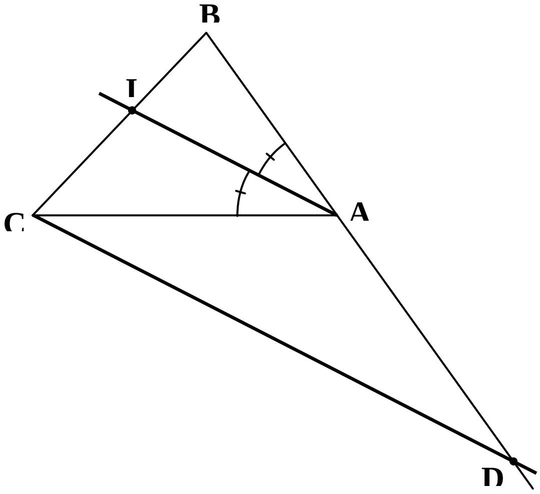
Annexe 1 : changer de scénario…

Lors du congrès de Thunder Bay (21ème congrès du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques, tenu à l'université Lakehead de Thunder Bay (Ontario), au bord du lac Supérieur, du 23 au 27 mai 1997), Peter Taylor, Professeur à l'université de Kingston en Ontario, a introduit sa conférence « **Apprendre des mathématiques en résolvant des problèmes (très) consistants »** par les remarques suivantes : *« Les manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire se concentrent de façon restreinte sur des habiletés techniques et reflètent bien peu la vitalité de la recherche. Je reproche aux universités leur manque d'imagination pour rendre vivantes les mathématiques du secondaire ».*

Peter Taylor revendique la même liberté de choix qu'un enseignant de Français : **les textes sur lesquels il fait travailler les élèves peuvent varier sans nuire à la qualité et au contenu final de son enseignement.** Il insiste sur la composante artistique de l'enseignement des mathématiques : faire ressentir aux élèves la beauté, l'élégance de certains résultats n'est pas un aspect négligeable de l'acte d'enseigner.

Annexe 1 : changer de scénario…



Extrait d'un manuel de seconde…

ABC est un triangle. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment [BC] en I. Par C on trace la parallèle à (AI). Elle coupe (AB) en D.

1° Démontrez que $\dfrac{BC}{BI} = \dfrac{BD}{BA}$ puis que $\dfrac{BI}{IC} = \dfrac{BA}{AD}$.

2° Démontrez que le triangle ADC est isocèle, et déduisez-en que $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Énoncez en une phrase le résultat trouvé.

<u>*Durée probable*</u> : *20 à 30min (la deuxième égalité de la question 1° n'étant pas aussi ''immédiate'' que la première si aucun coup de pouce n'est donné…)*

Pour tester ce qu'il est possible d'attendre de nos élèves face à un exercice sans "micro-ascenseurs" intégrés…, voici l'énoncé qui leur a été proposé dès leur première heure d'option scientifique (en 1997, en classe de seconde au lycée Jean Monnet de Strasbourg) :

> Dans de « vieux » livres de géométrie, on peut trouver le **théorème** suivant :
>
> On considère un triangle non aplati ABC. Soit M un point de la droite (BC). Le point M appartient à l'une des bissectrices des droites (AB) et (AC) si et seulement si l'on a : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}$.
>
> **Démontrer ce théorème.**

Ce fut une séance très vivante, où le ***scénario***[1] à quelques détails près a été le suivant :

➢ À partir d'un triangle quelconque ABC, les élèves tracent la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et appellent M son point d'intersection avec le côté opposé [BC]. Mais, n'ayant jamais été confrontés à des énoncés aussi peu guidés, ils sont d'abord désemparés et comme c'est leur première heure, une petite aide leur a été apportée par la question suivante :

« *Il est question de démontrer une égalité de deux rapports de longueurs… qu'est-ce que cela évoque pour vous de votre ''passé'' de collégien ?* »

Alors tout va s'enchaîner très vite :

➢ Thalès

➢ Donc il nous faut des parallèles ➢ essais de parallèles plus ou moins pertinentes…

Ici par contre, il faut les laisser ''sécher" un peu, la tentation étant grande de leur donner "le" coup de pouce qui convient…

➢ S'ensuit, par exemple, le tracé de la parallèle à (AC) passant par B qui permet d'obtenir la configuration de "Thalès-triangle croisée" faisant intervenir le rapport $\dfrac{IB}{IC}$ (parallèle, en outre, certainement bien plus pertinente que celle proposée dans l'exercice ci-dessus).

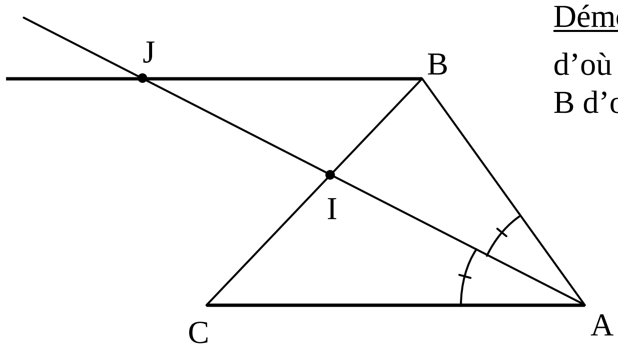
➢ Recherche d'indices pertinents dans l'énoncé pour "se lancer" dans une démonstration…

Il est question de bissectrice donc d'angles, et le fait de vouloir faire intervenir des parallèles nous met sur la voie d'une configuration de référence au collège : celle des angles alternes-internes, correspondants, etc.

[1] scérario repris depuis par certains auteurs de manuels scolaires de 2^{nde} pour la rentrée 2000…

Annexe 1 : changer de scénario…

Cela a permis de rédiger la démonstration (“collective” pour cette 1ère séance) qui suit :



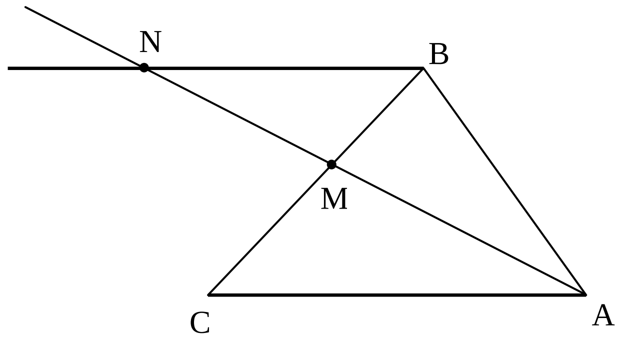
Démonstration : $\widehat{BJA} = \widehat{JAC}$ comme alternes-internes d’où $\widehat{BJA} = \widehat{BAJ}$ et donc le triangle BJA est isocèle en B d’où BJ = AB.

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles IBJ et ICA on obtient :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{IJ}{IA} = \frac{BJ}{CA} \text{ d'où } \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$

Réciproque :

Soit M $\in$ [AB] tel que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$. De même que précédemment, on introduit le point N intersection de (AM) avec la parallèle à (AC) passant par B. On a donc $\frac{MB}{MC} = \frac{MN}{MA} = \frac{BN}{AC}$ d’où $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{AC}$ et finalement AB = BN.



Ce qui démontre que le triangle BNA est isocèle et que $\widehat{BNA} = \widehat{BAM}$; or $\widehat{BNA} = \widehat{MAC}$ comme alternes-internes, d’où $\widehat{MAC} = \widehat{BAM}$ et donc [AM] est la bissectrice intérieure de l’angle $\hat{A}$.

Durée : une bonne heure sans compter la rédaction faite à la maison.

“Dans la foulée”, les élèves se sont vu proposer la fiche qui suit - à l’époque ce n’était que la 2ème séance pour ces élèves, c’est pourquoi il leur est fourni encore quelques indications à la fois pour leur apprendre à chercher tout en veillant à ne pas les décourager en attendant qu’ils soient devenus plus autonomes :

OH LE BEAU TRIANGLE… !*

Notations : Étant donné un triangle ABC et une unité de mesure étant choisie, on note AB = c, BC = a et CA = b.

1° Constructions :

a) Construire un triangle ACD de votre choix qui soit rectangle en C.

b) Placer le point B sur [AD] tel que DB = b.

c) Dans le triangle ABC :
- tracer la hauteur issue de B et noter H le pied de cette hauteur
- tracer la médiane issue de C et noter K son point d’intersection avec (BH).

d) Tracer la bissectrice intérieure de l’angle $\hat{A}$.

2° Conjecture :

Quelle conjecture peut-on émettre suite aux constructions précédentes ? Est-elle encore valable pour un triangle ABC quelconque ?

Annexe 1 : changer de scénario…

3° <u>Scénario pour la recherche d'indices et ''d'outils'' pertinents</u> :

On considère la figure obtenue après les constructions effectuées en **a)**, **b)** et **c)** de la question **1°**.

- Sans introduire de nouveaux points, trouver une égalité qui permettrait de conclure.
- à l'étape **c)**, on a tracé une médiane…. ↳ égalités d'aires… ↳ égalités de ''produits en croix''…
- mais également une hauteur…↳ triangles rectangles ↳ rapports de trigonométrie…

---

* Sur une idée de Jean Kuntzmann dans « *Le Petit Archimède* » n°90 (décembre 82), repris dans « *L'Ouvert* » n° 65 (bulletin APMEP-IREM de Strasbourg - 1991).

Il a fallu deux séances pour ne pas "parachuter" tous les éléments de réponse et laisser les élèves s'approprier suffisamment ce problème. Cela dit, il a fallu leur donner plusieurs ''coups de pouce'', ce qui nous fait dire que cet exercice était sans doute donné de façon prématurée en Seconde. Il est est donc recommandé de le donner en fin de Seconde ou en début de Première, quand les élèves ont une année de recherche derrière eux et qu'ils commencent à aborder ce type de problème avec davantage d'autonomie dans la prise d'initiative.

<u>Démonstration</u> :

Soit L le milieu de [AB].

Les triangles BCL et ACL ont la même hauteur issue de C et "même base" car LB = LA, donc ils ont même aire (propriété remarquable des médianes d'un triangle).

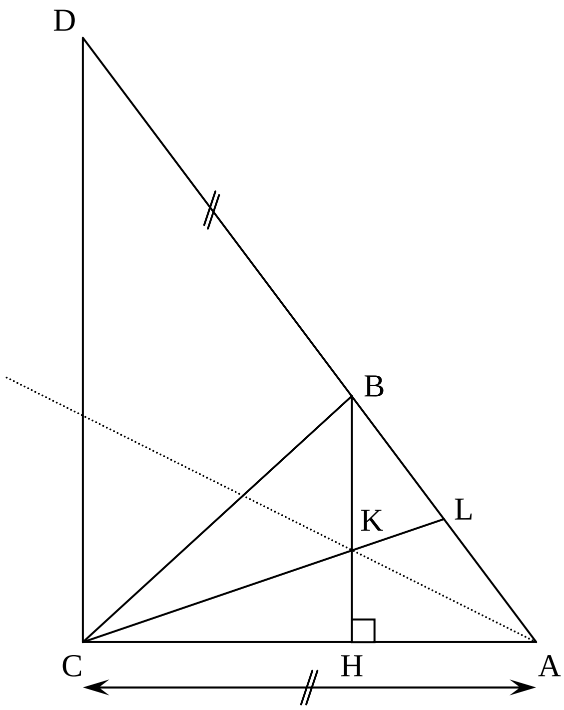
De même on a $\mathcal{A}$ (BKL) = $\mathcal{A}$ (AKL).

Par différence, on obtient : $\mathcal{A}$ (BCK) = $\mathcal{A}$ (ACK),

autrement dit : $\dfrac{\mathrm{BK}\times\mathrm{CH}}{2} = \dfrac{\mathrm{CA}\times\mathrm{KH}}{2}$

et donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KH}} = \dfrac{b}{\mathrm{CH}}}$, où b = CA = DB.

①



D'autre part : $cos\ \widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{c}$, où c =AB.

$cos\ \widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{b}{b+c}$.

D'où $\dfrac{\mathrm{AH}}{c} = \dfrac{b}{b+c}$ et donc $\mathrm{AH}\times(b+c) = bc$

$\mathrm{AH}\times b = c(b - \mathrm{AH})$

$\mathrm{AH}\times b = c\times\mathrm{CH}$, d'où $\dfrac{b}{\mathrm{CH}} = \dfrac{c}{\mathrm{AH}}$

ce qui, avec l'égalité ①, amène $\dfrac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KH}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}$, ce qui caractérise bien, dans le triangle ABH, le fait que [AK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$.