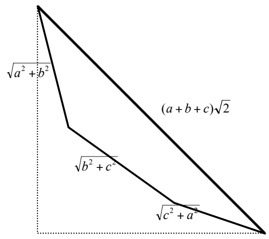
Annexe 3'

DES RACINES BIEN CARRÉES… (compte rendu de recherche)

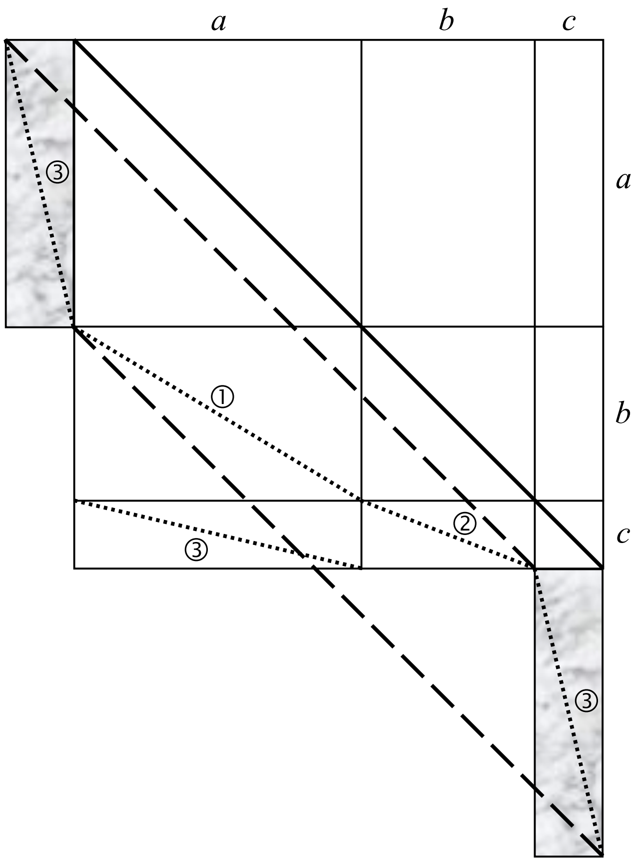
Étant donné trois nombres positifs a, b et c, démontrer que :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

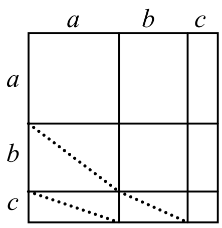
Après un temps de recherche individuelle, les élèves mettent en commun le fruit de leur recherche, en binôme pour la plupart, à trois plus rarement. Au départ, tous se sont lancé dans des calculs algébriques, essayant de façon souvent pertinente de faire intervenir des identités remarquables de façon à avoir des carrés (genre $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$), etc. ; puis un binôme a pensé à traduire la multiplication par $\sqrt{2}$ comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté $(a + b + c)$… après ce « petit coup de génie » (selon leurs camarades…), l'un de ces deux élèves a rajouté sur sa copie le dessin d'un triangle rectangle de côté a et b et d'hypoténuse $\sqrt{a^2+b^2}$ puis ils ont "séché" ensuite pendant le reste de l'heure… rejoignant leurs autres camarades embarqués eux dans des calculs inextricables (genre élévations au carré successives…).



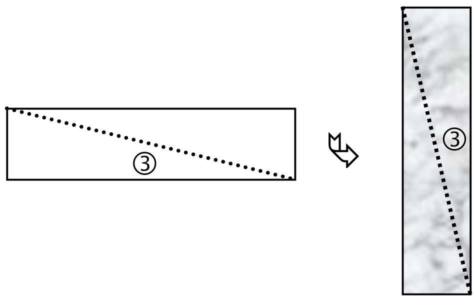
L'heure suivante, ce duo dessine alors ce qui les arrangerait bien à savoir : ➯



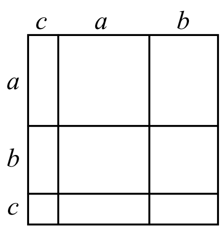
Puis bloque sur la figure ci-contre… ➯

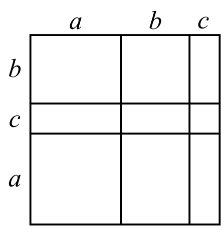


jusqu'au moment où ils pensent à réorganiser ce ''puzzle'' comme dans un jeu du taquin… avec comme stratégie de partir des segments ① et ② et de tenter de rajouter à l'extrémité du ① ou du ② le segment ③ de façon à joindre les extrémités d'un segment de longueur $(a+b+c)\sqrt{2}$ … mais la position du segment ③ ne permet pas d'aboutir directement, il faut encore penser à changer son orientation en faisant passer le rectangle, dont il est une diagonale, de la position ''horizontale'' à la position ''verticale''...



ce qui les amène à proposer les deux solutions (voir ci-dessus sur la figure de gauche) que l'on peut schématiser ainsi… :





Autre solution niveau Seconde :

Dans ce genre de calcul qui s'écrivent par permutations circulaires sur les nombres en présence, une stratégie parmi d'autre qui soit réinvestissable[1] peut consister par commencer à regarder ce que cela donnerait pour deux réels positifs au lieu de trois[2]…

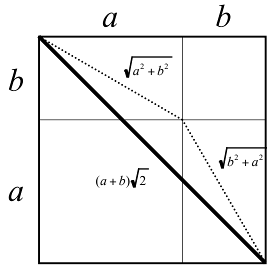
Ici, pour deux réels positifs a et b, l'inégalité à démontrer deviendrait :

$(a+b)\sqrt{2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+a^2}$ c'est à dire : $(a+b)\sqrt{2} \le 2\sqrt{a^2+b^2}$ (*)

comme tous les nombres sont positifs, ceci est équivalent à démontrer :

$$2(a+b)^2 \le 4(a^2+b^2)$$

que l'on ramène sans problème à : $2ab \le a^2+b^2$ et finalement à $(a-b)^2 \ge 0$, ce qui est toujours vrai…



On écrit le résultat (*), pour a et b, pour a et c ainsi que pour b et c.

En ajoutant membre à membre les trois inégalités ainsi obtenues, et en divisant par 2, on obtient le résultat demandé.

À noter que lors d'un atelier tenu durant l'université d'été de Marseille en juillet 1999 où j'ai présenté ce compte rendu de recherche, il n'y a eu une réaction du genre : *« pour moi ce n'est pas une démonstration mais tout au plus une conjecture et j'exigerais qu'après cela ils fassent une démonstration rigoureuse »*…

Cela a permis un débat très riche sur la représentation que les uns et les autres se font des mathématiques et de leur enseignement…

[1] Sinon, aux yeux de nos élèves, cela resterait une ''astuce'' de plus de professeurs de math ou d'initiés… (si ce n'est **pour** professeurs de math ou **pour** initiés…)

[2] Suivant le degré d'autonomie atteint par nos élèves, on peut leur donner cette indication puis les laisser poursuivre leur recherche sans autres indications.