CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION INITIALE POUR L'OBTENTION DES DIPLÔMES D'OFFICIER CHEF DE QUART MACHINE ET DE CHEF MECANICIEN 8000 kW

ANNÉE 2015 (Durée : 2 heures)

L'usage d'un formulaire est interdit; l'usage d'une calculatrice électronique à fonctionnement autonome, non programmable, non programmée, non imprimante, avec entrée unique par clavier est seul autorisé.

1re QUESTION **(valeur = 2)**

1. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + \frac{y}{2} = 0.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$2y' + y - 4 = 0.$$

2e QUESTION **(valeur = 1,5)**

Soit X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'un appareil. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-2}$.

1. Donner la densité de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité $P(X \leqslant 200)$ au dixième près. (On pourra considérer $\mathrm{e} \approx 3$).

3e QUESTION **(valeur = 2)**

Une personne dispose d'une pièce de monnaie. Elle souhaite savoir si sa pièce est équilibrée, c'est-à-dire si la probabilité d'obtenir « pile » est égale à $0,5$.
Pour effectuer cette vérification, elle lance successivement 100 fois la pièce. Elle obtient 20 fois « pile » et 80 fois « face ».

1. Calculer l'intervalle de confiance de p au seuil de 95 %, où p est la probabilité (inconnue) d'obtenir « pile ».
2. Peut-on conclure, avec un risque d'erreur de 5 %, que la pièce est équilibrée ?

4e QUESTION **(valeur = 4,5)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère le nombre complexe suivant : $z = -1 + \mathrm{i}$.

1. Déterminer le module $|z|$.
2. Écrire les complexes $\overline{z},\ \dfrac{1}{z},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}z^2$ et $-z$ sous forme algébrique.
3. On appelle $A,\ B$ et C les points d'affixes respectives $z,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}z^2$ et $-z$.

   Déterminer $AB^2,\ BC^2$ et AC^2.
   En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

5e QUESTION **(valeur = 7)**

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$ et par $g(x) = (\ln x)^2$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Calculer la dérivée de f et donner le tableau de variations de f.

3. Calculer $f(1)$ et $f(\text{e})$.

En déduire l'encadrement de $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$ par $\text{e} - 1$ et $\text{e} - \dfrac{1}{\text{e}}$.

4. Déterminer la dérivée de g. Exprimer f en fonction de g'.

En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.

5. On appelle D l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifiant $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \text{e} \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$

dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Calculer au dixième près l'aire, en cm^2, du domaine D. (On pourra considérer $\text{e} \approx 2,72$).