Des objets à tester et à manipuler en mathématiques

François Drouin

Les lecteurs de PLOT connaissent bien François Drouin. Nous avons souhaité lui donner la parole. Il nous livre ici un regard synthétique sur les mathématiques qu'il a voulu faire vivre, dans les différents cadres de sa riche carrière, ces mathématiques « avec les mains » en lesquelles il croit de façon communicative.

François Drouin est professeur retraité et membre actif de l'APMEP.

De 1989 à 2013, les années ont été riches…

Le titre de cet article reprend celui d'un écrit auquel j'ai collaboré en 1996 et téléchargeable sur le site de l'académie de Nancy-Metz. En 1989, la Régionale APMEP de Lorraine faisait circuler l'exposition « Horizons Mathématiques ». Avec mon collègue Roland Marseille, nous y avions amené nos élèves de troisième, bien aidés par le document pédagogique d'accompagnement élaboré par la régionale de Lyon. Nos élèves étaient rentrés ravis mais déçus d'être restés trop peu de temps. L'envie nous est venue, après cette expérience, de continuer à faire des choses semblables dans notre collège de Saint-Mihiel (55).

Nous avons localement bénéficié de conditions très favorables : travailler à plusieurs est un vrai régal ; bénéficier de chutes de bois, d'isorel et de la scie de l'atelier du collège nous a facilité certaines fabrications (les CPPN maniaient encore le rabot à l'époque) ; utiliser un ancien dortoir de l'internat devenu notre « Atelier Mathématique » nous a permis d'y amener toutes nos classes une heure par semaine (heure prise sur notre quota horaire, ne rêvons pas). Le cube Soma était déjà là, ainsi que divers puzzles géométriques, des solides en carton ou en bois, une planche de Galton. Nous y avons testé divers jeux numériques, extraits de la brochure « Jeux 2 » de l'APMEP ou créés par nous-mêmes (jeux de l'oie, jeux de dominos, jeux de familles mathématiques). Claude Pagano m'a entrainé au groupe « Jeux » de l'APMEP nationale et, grâce à lui, nous avons osé utiliser les Pentaminos, les carrés de Mac Mahon, les Sphinx, etc.

CPPN = Classe Pré-Professionnelle de Niveau, ancienne classe de quatrième pré-professionnalisée ayant vécu au sein des collèges dans les années 70-80.

Notre « Atelier Mathématique » fut pendant ses années de fonctionnement un formidable laboratoire dans lequel nous avons pu expérimenter beaucoup de choses qui ont été racontées ensuite dans des brochures de l'IREM de Lorraine, des brochures « Jeux » de l'APMEP et dans l'exposition « Objets mathématiques » de notre Régionale : son prototype était présent en 1999 aux Journées Nationales de l'APMEP à Gérardmer, ses versions actuelles étaient en 2013 au « Souk des Maths » des mêmes Journées à Marseille.

J'ai eu ensuite l'occasion de travailler avec de futurs professeurs des écoles. L'intérêt de la manipulation pour ces étudiants particuliers, pour qui les mathématiques sont souvent un point délicat, s'impose de lui-même. J'en donnerai ici quelques exemples.

Le pliage d'une feuille de papier leur a fait comprendre qu'un angle droit est le quart d'un « angle plein ». Quatre angles de même mesure sont obtenus, même si un seul angle droit est codé lorsque deux droites sont perpendiculaires. Sans ce pliage de papier, l'angle droit serait resté pour eux le plus grand des angles de l'équerre, sans qu'ils se posent le problème de l'« angle étalon » qui a permis la fabrication de l'équerre. Cette démarche peut être comparée à celle justifiant qu'une règle fournit un gabarit de ligne droite : je tends une ficelle, je fais comprendre qu'un tasseau peut être accolé à ma ficelle. Ce tasseau sera un outil bien pratique pour mes tracés. Ma règle devient un gabarit de ligne droite.

Mes futurs Professeurs des Écoles devaient être préparés à enseigner, au cycle 3, la formule permettant de calculer la longueur d'un cercle. Pour leur expliquer que cette formule n'était pas due à un tour de magie de mathématicien, j'ai profité d'un module de leur formation pour reprendre ce que je faisais naguère avec mes élèves de sixième : leur faire entourer des disques avec une bande de papier graduée. Il y a eu de quoi constater que lorsque le diamètre était doublé, la longueur du pourtour du disque semblait elle aussi doublée. De plus la longueur de la bande de papier est un peu plus que trois fois le diamètre des disques. Il y avait là de quoi faire vivre une situation de proportionnalité dans toute sa richesse.

Suite à ces années d'expérimentation, je suis persuadé que la manipulation d'objets est une aide à la compréhension. Il faut d'abord que l'œil voie ce qui va être représenté ou animé. Manipuler facilite la création d'images mentales qui pourront être remobilisées devant des figures géométriques immobiles ou dynamiques. Parmi les objets à manipuler, je n'oublie pas la règle, l'équerre, le rapporteur, la paire de ciseaux : ils font eux aussi travailler les correspondances entre la main, l'œil et les objets mathématiques représentés. Leur usage ne perturbera pas l'usage des outils informatiques mis actuellement à disposition des enseignants dont ils sont complémentaires.

Après 2013, la vie continue et reste passionnante. Libéré d'obligations professionnelles, j'ai maintenant du temps pour couper du bois et du plastique, coller du carton, plier du papier, transformer des bouchons en pions de jeux, continuer à donner des objets à manipuler et des pistes d'utilisation aux copains et copines de ma Régionale et du groupe Jeux.

Rien ne vaut de bons exemples

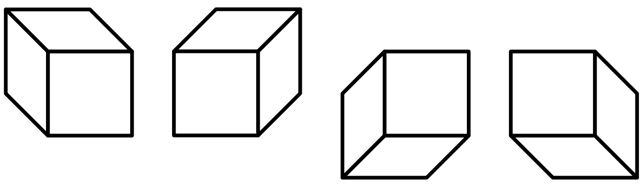
L'équipe PLOT m'a sollicité pour écrire des éléments de bilan de mes années d'expérience en classe et en formation. Sans être nostalgique, j'ai envie de présenter quelques « Objets à manipuler » qui m'ont paru bien utiles dans mon enseignement des mathématiques.

Dans le numéro 35 de PLOT, Renée Vanderstraeten présentait son instrumentarium et Valérie Larose nous expliquait comment passer « de la simple réserve au labo de maths », suggérant une nouvelle rubrique « Du matériel dans nos classes », devenue la rubrique « Bricomaths » dans laquelle j'ai eu plusieurs fois l'occasion de m'exprimer. Ici, c'est à partir de quelques-uns des matériaux de base de mon « fond de commerce » et la description de leur utilisation *in-situ* que je voudrais vous faire partager ma conviction que les mathématiques se laissent manipuler avec profit.

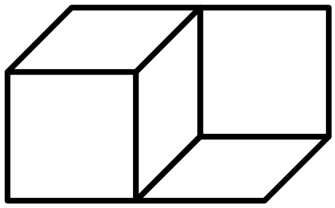
Des carrés et des parallélogrammes

Des carrés et des parallélogrammes en carton, en plastique, en bois, permettent la construction de cubes en vue de leur représentation :

Un cube dans la main, l'élève peut pren-

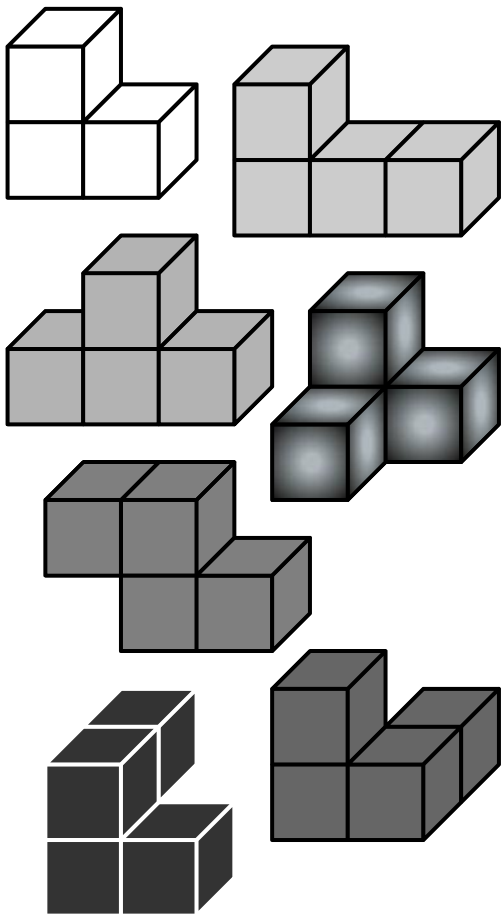


dre conscience des correspondances entre ce que l'œil voit et ce qui est dessiné et vivre les placements possibles de l'observateur. Je proposais cette activité à mes élèves de sixième, j'ai incité mes étudiants de l'IUFM à la proposer en classe et j'ai beaucoup regretté que bien des élèves n'aient pas bénéficié de temps d'apprentissage à propos de la vision des solides. En poursuivant la recherche avec les dessins possibles d'assemblages de deux cubes accolés par une face entière, la proposition suivante d'assemblage apparaissait, même en formation d'adultes :



Cet assemblage quelque peu surprenant offre une ouverture vers le domaine « Maths et Arts » en particulier certaines œuvres de Vasarely : certaines d'entre elles nous semblent représenter des assemblages de cubes, leur analyse peut faire prendre conscience aux élèves que l'artiste a tout fait pour perturber notre point de vue.

Le cube Soma



Les sept pièces représentées ici m'ont permis de continuer à faire des liens entre ce que l'œil voit, ce qui est touché et ce qui est représenté. Des exemples d'utilisations se trouvent dans la brochure « Jeux 5 » de l'APMEP et la documentation de notre exposition « Objets mathématiques ». Elles sont également appréciées en dehors de la classe, lors de journées portes ouvertes d'établissements et de fêtes de la Science.

Les sept pièces du cube Soma, ainsi que les Combis (Jeux 5) et les Carrés de Mac Mahon font partie des jeux à manipuler avec lesquels mes élèves ont le plus facilement accepté de chercher sans trouver. Une compétence importante (le paradoxe n'est qu'apparent) pour la résolution de problèmes !

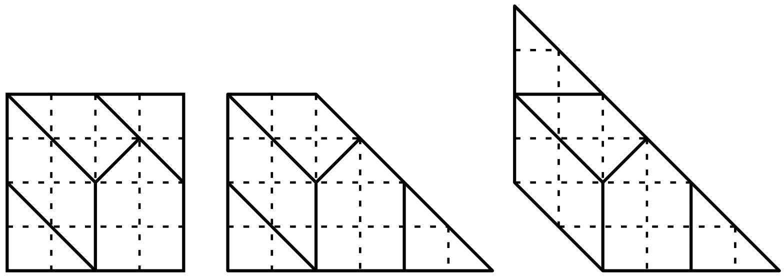
Des étudiants chercheurs lors d'une fête de la Science à l'IUFM de Montigny-les-Metz

La multitude des puzzles géométriques

Ils sont faciles à faire construire en carton par les élèves et je me suis rapidement passé de mes beaux exemplaires en bois ou en plastique. Il a fallu très rapidement utiliser autre chose que le Tangram : « m'sieur, on l'a fait à l'école ». Le puzzle à trois pièces créé par Gilbert Gribonval, le puzzle de Sarrelouis travaillé à l'IREM de Lorraine, le puzzle apporté en classe de sixième par Marine et repris dans la brochure « Jeux 9 » ont été parmi ceux que j'ai le plus utilisés.

Des parents qui osent manipuler lors d'une journée « Portes Ouvertes » au collège de Montmédy

Le but premier était de faire vivre corporellement les transformations mises en œuvre pour passer d'une configuration à une autre. La main tenant la pièce pivote, se retourne, glisse. Voici un exemple avec le Puzzle de Sarrelouis choisi ici car moins familier aux lecteurs de PLOT.



Le triangle rectangle a pivoté autour du milieu d'un coté du carré (symétrie centrale ou rotation de 180°). J'ai obtenu un trapèze rectangle. L'autre triangle rectangle a glissé « verticalement » (translation). J'obtiens maintenant un trapèze isocèle.

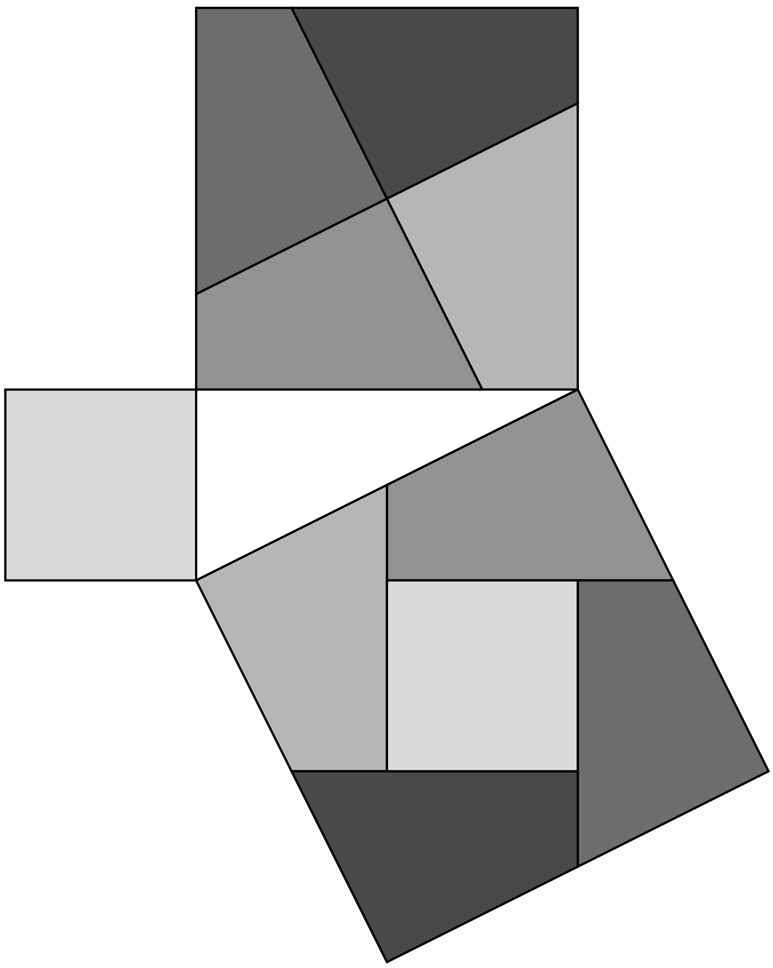
Le but second est d'amener ensuite les élèves à pouvoir répondre à des questions comme « Pourquoi suis-je sûr d'avoir obtenu un trapèze rectangle ? », « Pourquoi suis-je sûr d'avoir obtenu un trapèze isocèle ? » et les faire entrer dans des moments de géométrie déductive. En échangeant avec des utilisateurs de puzzles géométriques, j'ai remarqué que ce temps était parfois négligé.

Travailler avec de futurs Professeurs des Écoles m'a convaincu de l'intérêt de travailler avec des pièces sur lesquelles un quadrillage est visible, comme pour le puzzle de Sarrelouis montré ci-dessus. Les jeux du commerce ne sont pas quadrillés. Il faut soit construire des jeux pour lesquels le quadrillage est visible sur les deux faces, soit utiliser un puzzle dont toutes les pièces admettent un axe de symétrie. C'est cette deuxième possibilité que j'ai choisie récemment pour le « carré de Metz » présenté dans le numéro 42 de PLOT. On y perd le geste du retournement de la pièce pour une symétrie orthogonale, on gagne des jeux plus faciles à réaliser, des configurations obtenues plus faciles à reproduire et de quoi faire travailler dès le CM1 sur les mesures d'aire (ou de périmètre plus tard au collège).

Des puzzles de Pythagore

J'ai beaucoup travaillé avec le puzzle ci-dessous pour une visualisation du théorème de Pythagore, mais aussi pour la compréhension par le geste (et pas seulement par la vision) de translations fournissant une solution possible.

Ce puzzle a été créé en 1873 par Périgal et nous l'avons choisi pour un des stands de notre exposition régionale. Il est formé de quatre pièces identiques et d'un carré, sa construction se fait aisément.



En classe de quatrième, cette visualisation n'est pas suffisante et nous prenons soin d'amener les élèves à comprendre une démonstration du théorème de Pythagore.

Hors cadre scolaire aussi, ce puzzle a pu provoquer des révélations. Ainsi, le dernier jour de la manifestation des « Jardins des Enfants de la Science » organisée chaque année sur le campus de Metz-Bridoux, les élèves sont invités à revenir avec leurs parents ou grands-parents. Présenter le puzzle ci-dessus à des enfants de CM2 se fait aisément : un triangle rectangle est entouré par trois carrés. L'aire du « grand » carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés. J'ai entendu maintes fois des accompagnants dire « Ah, si on m'avait expliqué comme cela le théorème de Pythagore, je l'aurais compris ! ». J'ai senti des adultes contents de donner du sens à ce qu'ils avaient réduit à une formule mais je n'ai pas senti de besoin d'aller plus loin dans des justifications. La manipulation et la visualisation réconcilient avec le contenu mathématique abordé, mais je n'ai aucune garantie qu'il sera plus tard mobilisable dans une résolution de problème. Je ne suis pas sûr qu'avoir manipulé incite au besoin ultérieur de justification : « *J'ai construit, je vois que ce que j'ai construit correspond à quelque chose que je peux interpréter, je n'éprouve pas le besoin de chercher des justifications* ». Cet état d'esprit est visible en classe lors de l'utilisation de puzzles géométriques comme le Tangram et ne disparaît pas chez les adultes, même enseignants de mathématiques : je n'en connais pas qui, après avoir manipulé les sept pièces du cube Soma, se posent la question de savoir si le solide obtenu est réellement un cube. Le souci de preuves ne devrait-il pourtant pas être présent à tout âge ?

Des mathématiques intergénérationnelles au Jardin des Enfants de la Science à Metz-Bridoux

Sitographie

Les liens permettant d'accéder aux articles ci-dessous sont donnés sur le site de l'APMEP, rubrique PLOT.

Des objets à toucher et manipuler en Mathématiques

L'exposition « Objets Mathématiques »

Un travail réalisé par la Régionale de Toulouse à propos du cube SOMA

Des puzzles géométriques pour l'École primaire accessibles dans un dossier spécifique

Des puzzles de Pythagore originaux : les puzzles « croix de Lorraine » créés pour les Journées Nationales de Metz