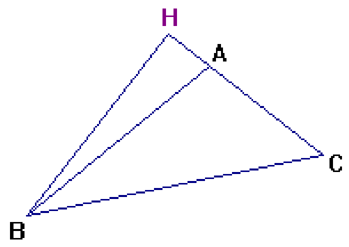
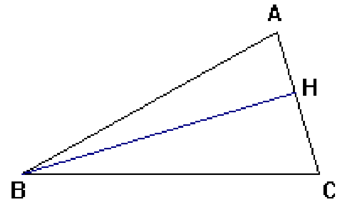
F.3. Les pérégrinations d'un résultat

Henry PLANE

Au livre II des Eléments d'EUCLIDE, on lit, Proposition 12, dans la traduction d'HENRION (1615) :



« Aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus est plus grand que les quarrés des deux autres costés, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'un des costés contenant l'angle obtus, sçavoir celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, et de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire et l'angle obtus. »



Ce que nous notons : Pour un triangle BAC avec BÂC obtus, BH orthogonale à (AC) :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \cdot AC$$

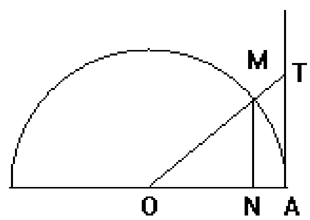
La proposition 13 s'occupe des triangles oxigones : BÂC aigu :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC$$

On peut se demander pourquoi le cas de l'angle obtus le premier ? Il faut penser qu'alors CH est, dans ce cas, obtenu par addition alors qu'une différence peut poser problème à qui n'use que de grandeurs que nous nommons positives.

Curieusement il semble que ce ne soit qu'au 16^e siècle que les traducteurs commentateurs notèrent que le produit pouvait concerner l'un ou l'autre côté ; il est vrai que DESCARTES ou MONGE et la géométrie projective étaient encore loin.

Si nous revenons au temps des arabo-persans qui, ayant eu connaissance de la trigonométrie des indous, calculèrent beaucoup et usèrent également des propositions d'EUCLIDE.



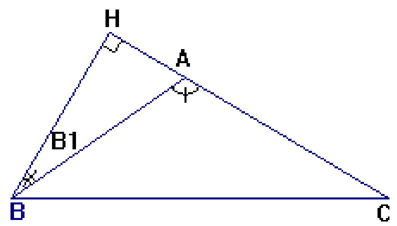
Ils usaient de trois lignes, associées à l'arc de cercle et à l'angle correspondant.

AÔM = x, Mn = sinus x, AT = tangente x, An = sinus verse.

(Ceci selon notre écriture…)

Ils disposaient de nombreuses tables des valeurs de ces lignes, ce qui facilitait les calculs.

Chez un des plus tardifs, Al KASHI (début 15^e siècle), on trouve une expression de la forme :



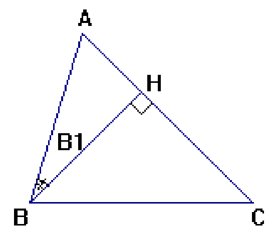
$$BC^2 = (AB \sin A)^2 + (AC + AB \sin B_1)^2$$

pour l'angle obtus qui traduit bien la relation d'EUCLIDE.

Il sait que : $\sin^2 A + \sin^2 B_1 = 1$, et que : $B_1 = A - 90°$.

Mais si Â est aigu, $B_1 = 90° - A$,

$$\text{et } BC^2 = (AB \sin A)^2 + (AC - AB \sin B_1)^2.$$



Ce n'est que lorsque, deux siècles plus tard, apparut le sinus du complément (sin-co) qui devint co-sinus avec GUNTER (1620) que l'on trouve, toujours avec deux cas :

Â obtus $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos \hat{A}$

Â aigu $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \hat{A}$.

Il faudra attendre le milieu du 19e siècle pour que la géométrie et la trigonométrie s'algébrisent encore plus et que, si A > $\frac{\pi}{2}$ alors cos A soit négatif et donc une seule écriture suffit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c \cos A,$$

ou que, segments orientés : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overline{AH}\cdot\overline{AC}$.

SOMMAIRE

*