E. Les *Éléments* d'EUCLIDE : une table des matières

Henry PLANE

Quelques questions préalables.

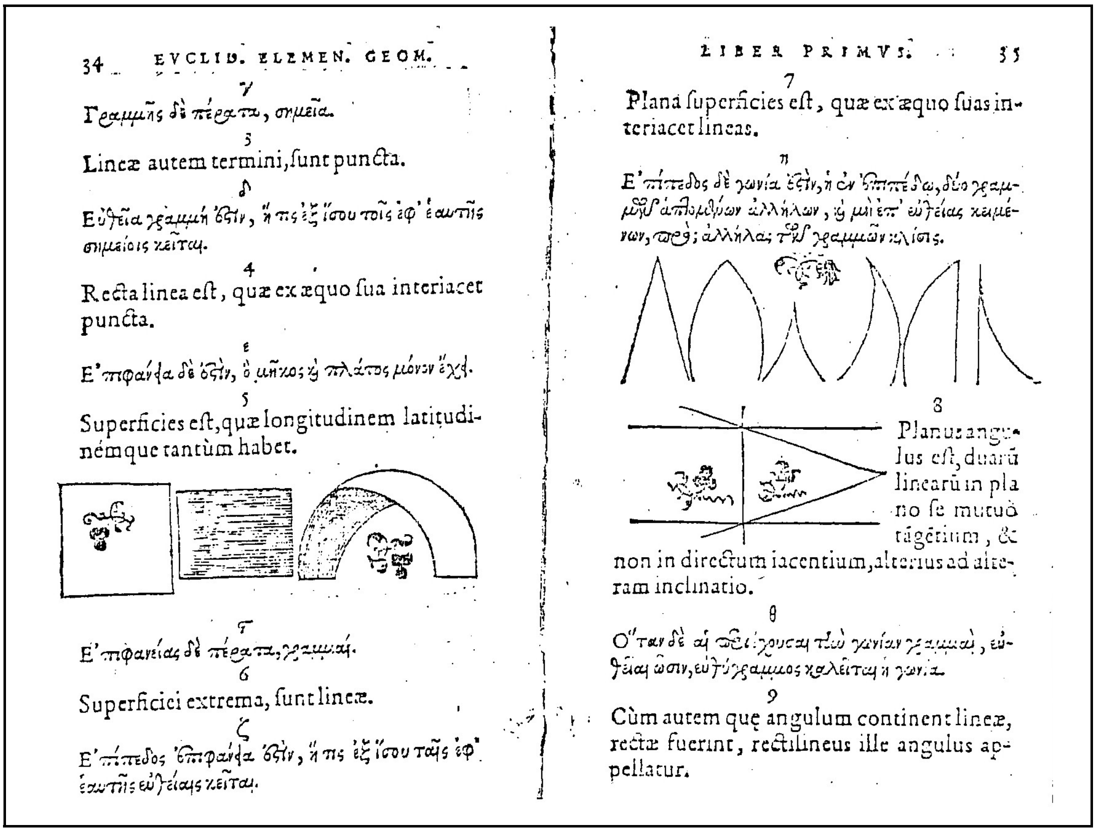
EUCLIDE a-t-il existé ?

Est-ce le nom d'une école ?

Toujours est-il que fut rédigé, dans le cadre du « Musée », centre de recherches sur divers domaines de connaissances, à Alexandrie, au 3e siècle avant J.-C., un ensemble de textes appelés « *Éléments* ». Ils sont le fruit d'un enseignement fondé sur la déduction et la démonstration.

Comment nous sont-ils parvenus ?

Uniquement par des copies successives et des traductions, de grec en latin et en arabe puis dans les langues modernes – copies souvent partielles, textuelles ou commentées. L'arrivée de l'imprimerie a accru leur importance. – Première édition : RATDOLT, Venise 1482, en latin. Actuellement on trouve des *Éléments* à peu près dans toutes les langues. En français, les premières éditions HENRION, LE MARDELE sont des années 1615-1625. Les deux traductions de PEYRARD (1804 et 1814-18) à partir de nouveaux documents, ont joué un rôle important. Actuellement fait autorité l'ouvrage de VITRAC (P.U.F. 1990-1994).



34 EVCLID. ELEMEN. GEOM.

γ

Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

3

Lineæ autem termini, sunt puncta.

δ

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

4

Recta linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

ε

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

5

Superficies est, quæ longitudinem latitudinemque tantùm habet.

ϛ

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

6

Superficiei extrema, sunt lineæ.

ζ

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

LIBER PRIMVS. 35

7

Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

η

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

8

Planus angulus est, duarũ linearũ in plano se mutuò tãgẽtium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

θ

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

9

Cùm autem quę angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

Dans une édition en latin et en grec de 1573 à Paris

Si les problèmes concernant la transmission ne sont pas tous résolus, nous estimons disposer à peu près du texte original.

Comment est constituée cette œuvre ?

Elle ne constitue pas une axiomatique au sens où nous l'entendons bien qu'y figurent des axiomes. C'est une construction faite à partir d'hypothèses, de bases précises. Si toutes les exigences qu'imposerait la logique y sont parfois défaillantes, on se doit d'accorder à cette œuvre tout le mérite d'une méthode féconde pour les sciences. D'autant qu'elle nous précède de vingt trois siècles…

L'ouvrage comporte 13 livres. Deux à trois autres sont des additions tardives (-2^{e} siècle et 5^{e} siècle) et qui furent commentés avec les autres.

*

– Livre I

Il est précédé de définitions dans lesquelles on peut plus ou moins déceler un appel à des réalités physiques, au moins intuitivement. Souvent demandes ou postulats, axiomes ou notions communes ont des frontières mal définies qui ont varié à travers les âges et les éditions. Du reste, les auteurs d'« *Éléments de géométrie* » inspirés de ceux d'EUCLIDE, ne manquèrent pas, selon leurs besoins, au cours des siècles, d'en varier et augmenter le nombre.

Il est à noter que les »notions communes » s'appliquent à toutes les sciences et pas seulement à la géométrie. – « *Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles* » –. Si elles ne peuvent être démontrées elles sont nécessaires alors que les « postulats » peuvent apparaître comme des hypothèses.

Le 5° postulat est celui des parallèles que plusieurs grands géomètres voulurent démontrer avant que de s'apercevoir que des géométries tout aussi rigoureuses sur le plan logique peuvent être construites sans y avoir recours.

Le livre I proprement dit comporte 48 propositions – peut-on, au sens actuel, dire théorèmes ? –Certains sont plutôt des problèmes de construction à l'aide de droites (entendons : segments de droites) et de cercles. Ces propositions peuvent se regrouper en trois groupes.

· De 1 à 6, propositions relatives aux triangles. Comment reconnaître si deux triangles sont égaux, d'autres diront congrus. Elles ont donné naissance aux « cas d'égalité » ». Mais sont-ils trois ou quatre ?

· De 27 à 33, on pourrait parler de réciproque au 5^{e} postulat. La somme des angles d'un triangle est la proposition 32.

· De 34 à 46 ce sont les propriétés des aires, rectangles et triangles, qui servent d'outils de démonstration pour arriver au 47 avec notre « théorème de Pythagore » et 48 sa réciproque.

*

– Livre II

Est d'abord définie et étudiée la figure du « gnomon ». Ensuite, la notion d'aire trouve toute sa puissance fondamentale en géométrie des Grecs. Les Arabo-Persans puisèrent dans ce live II la base de leur « *al-gabr* » et une justification de leur mode de résolution des équations de degrés un et deux. Mais il ne faut pas s'y tromper, ici, ce ne sont pas des nombres mais des segments de droite qui entrent en jeu. Le produit de deux d'entre eux est l'aire d'un rectangle.

· Les propositions 12 et 13 correspondent à une généralisation du théorème de Pythagore pour un angle aigu ou obtus. Il faudra attendre dix-sept siècles pour que AL-KASHI lui donne une forme trigonométrique.

· Une construction de la moyenne proportionnelle constitue la proposition 14.

· La proposition 11 correspond au problème, jadis fameux, du partage en « *moyenne et extrême raison* », savoir : déterminer sur un segment AB le point C tel que, selon notre écriture : $AB\square AC = BC^2$; déterminer voulant dire construire.

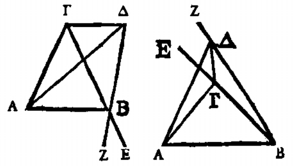
*

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION VII.

Sur une même droite, et à deux points différents placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

Car, si cela est possible, sur une même droite AB, et à deux points différents Γ et Δ, placés du même côté, construisons les deux droites AΔ, ΔB égales à deux autres droites AΓ, ΓB, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités A, B; de manière que la droite ΓA soit égale à la droite ΔA, et ait la même extrémité A que celle-ci, et que la droite ΓB soit égale à la droite ΔB, et ait la même extrémité B que celle-ci; et joignons ΓΔ. (Prolongeons BΓ, BA vers les points EZ.)



Puisque AΓ est égal à AΔ, l'angle AΓΔ est égal à l'angle AΔΓ (5); donc l'angle AΔΓ est plus grand que l'angle ΔΓE; donc l'angle ΓΔZ est beaucoup plus grand que l'angle ΔΓE. De plus, puisque ΓB est égal à ΔB, l'angle ΓΔZ est égal à l'angle ΔΓE; mais on a démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

PROPOSITION XXVI.

Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

Dans l'édition Peyrard (1814)

Livres III et IV. Ils sont consacrés au cercle.

– Le livre **III** étudie les liens entre arcs, cordes et angles inscrits dans un cercle, ainsi que la position relative d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles. La tangente advient, parmi les droites orthogonales à un diamètre du cercle, comme limite entre celles qui coupent ce cercle en deux points et celles qui lui sont extérieures. Les premiers traducteurs parlent de « touchante ».

Ce livre s'achève, 36^{e} et 37^{e} propositions, sur ce qui, une vingtaine de siècles plus tard, sera étudié comme la puissance d'un point par rapport à un cercle.

– Le livre **IV** s'intéresse aux figures à la fois « *équiangles et équilatères* » inscrites dans un cercle et « autour » d'un cercle.

On y trouve une construction des polygones à 4, 5, 6 et 15 côtés. Celle du pentagone ne parle pas du « nombre d'or ».

*

Livres V et VI. Ils sont consacrés à la proportionnalité.

– Dans le livre **V** est exposée une théorie des rapports de deux grandeurs. EUCLIDE cherche à y dépasser la notion pythagoricienne de comparaison de collections d'unités ou de rapport de mesure entière. (Notion ébranlée par le rapport de la diagonale du carré au côté de celui-ci).

Cette partie des *Éléments* est d'étude pénible. Elle a été, au cours des siècles, l'objet de maints commentaires selon les traducteurs. Faute de symbolisme les démonstrations sont lourdes et les résultats se détachent mal. Il faut se rappeler ici combien, pendant des siècles, la manipulation des proportions (égalité de deux rapports) fut un outil-clef du calcul. On l'oublie trop souvent.

– C'est le livre **VI** qui recueille les résultats en les appliquant aux grandeurs de la géométrie plane.

Apparaissent alors les figures « équiangles » dont on a fait les figures semblables avec, pour les triangles, les critères de similitude.

La notion de rapport est maintenant appliquée également aux aires. Ainsi la 1ère proposition : « *Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases* »

· C'est à partir de la proposition 8 « *Dans un triangle rectangle, les triangles placés autour de la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base sont semblables entre eux et au triangle total* » que ROBERVAL trouve la démonstration du théorème de Pythagore la plus usitée maintenant.

· La proposition 33 donne une autre construction de la moyenne et extrême raison.

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels ; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homologues.

PROPOSITION V.

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entr'eux.

PROPOSITION VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Dans l'édition Peyrard (1814)

Les livres suivants sont consacrés à l'arithmétique. La théorie des proportions est maintenant appliquée aux nombres.

– Dans le livre **VII**, des définitions :

· *« L'unité est selon laquelle une chacune des choses qui sont, est appelée une* » traduisait HENRION vers 1620… ou encore

· « *Nombre parfait est celui qui est égal à toutes ses parties aliquotes* ».

La quarantaine de propositions de ce livre expose une étude du P.G.C.D. par la méthode des divisions successives. On y trouve également les nombres premiers, la réduction d'une fraction, le P.P.M.C., les nombres premiers entre eux.

– Au livre **VIII** sont exposées les propriétés de ce que nous nommons les progressions géométriques. Sont également étudiés les rapports entre les nombres carrés et cubes.

– Une suite de propriétés se trouve dans les 36 propositions du livre **IX**.

Nous y relevons les trois plus célèbres qui sont, dans notre discours :

· Proposition 20 : La suite des nombres premiers est illimitée.

· Proposition 35 : Si a_1, a_2, … a_{n-1}, a_n est une suite géométrique,

$$\text{alors : } \frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_n - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$

$$\text{(Si on préfère : avec } a_2 = qa_1,\ \sum_{1}^{n-1} a_i = \frac{a_n - 1}{q - 1}\text{).}$$

· Proposition 36 : Si $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^{3\cdots} + 2^n = 2^{n+1} - 1$ est un nombre premier,

alors : $2^n \cdot S$ est un nombre parfait.

Au 1[er] siècle NICOMAQUE n'en connaissait que quatre : 6, 28, 496, 8128.

À combien en est-on aujourd'hui ?

– Le livre **X** est le plus long.

Sa lecture est difficile car tous les résultats sont démontrés géométriquement. Il contient une classification des grandeurs irrationnelles rendue nécessaire par les opérations sur les plus simples. Sont établis des résultats que nous écrivons :

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Tous portent sur des quantités, longueurs ou aires.

On notera que plusieurs traductions ne comportaient pas les livres V, VII, VIII, IX et X.

*

Livre **XI**, **retour à la géométrie, avec la géométrie de l'espace**.

Des postulats supplémentaires devront s'introduire mais apparaissent parfois des défauts de logique. Il en est ainsi, par exemple, pour la définition du plan. EUCLIDE ne procède pas ici de manière aussi ordonnée et complète qu'en géométrie plane. Ainsi s'il parle de parallélisme entre droites et entre plans, il n'en est pas question entre droite et plan. On peut avoir l'impression qu'il se serait contenté de réunir le matériel nécessaire aux questions évoquées et non de rédiger un traité de géométrie de l'espace.

Sont définis les angles dièdres ainsi que des polyèdres et des corps ronds. Pour ces derniers il est fait appel au mouvement : révolution d'un rectangle ou d'un triangle rectangle autour d'un côté ou d'un demi-cercle autour de son diamètre – cylindre, cône, sphère.

Les volumes des parallélépipèdes sont étudiés.

*

Dans le livre **XII** on trouvera les résultats suivants.

· Deux cercles sont entre eux comme les carrés construits sur leurs diamètres,

· Une pyramide est équivalente au tiers du prisme de même base et de même hauteur,

· Un cône est équivalent au tiers du cylindre de même base et de même hauteur,

· Deux sphères sont entre elles comme les cubes construits sur leur diamètres respectifs.

Des démonstrations nécessitent ici la méthode d'exhaustion.

Les divers solides étudiés le sont souvent avec des polyèdres associés.

*

Le livre **XIII** est consacré aux polyèdres réguliers.

Avec les Pythagoriciens et Platon, il est montré qu'il ne peut y en avoir que cinq. On trouve leur construction à partir de celle des polygones réguliers. Le calcul de la longueur de leurs arêtes en fonction du diamètre de la sphère qui leur est circonscrite est une bonne application des résultats sur les irrationnels du livre X.

Ainsi, proposition 15 :

Le diamètre de la sphère environnant le cube est triple en puissance du côté de ce cube.

Nous écririons $d = c\sqrt{3}$.

*

Il est parfois cité un livre **XIV** consacré à des relations entre polyèdres réguliers. Il semble dû à HYPSICLÈS d'Alexandrie (2^e siècle avant Jésus-Christ).

Au 5^e et 6^e siècles (après J.-C.) apparaît un livre **XV** traitant des mêmes sujets. Son auteur est inconnu.

Les premiers traducteurs ont souvent lié ces deux livres aux précédents ignorant sans doute ces origines.

SOMMAIRE