D. La numération écrite

Henry PLANE

Si l'arrivée de la démocratie dans la cité d'Athènes entraîna la création et le développement d'écoles pour beaucoup, l'aristocratie conserva pour les siens une sorte d'éducation complémentaire prenant ensuite une forme supérieure plus intellectuelle. La science a ses exigences.

Dès le deuxième millénaire avant Jésus-Christ, la Mésopotamie a connu un système de numération de position assez proche du nôtre. Si les Grecs, au cours de leurs navigations commerciales recueillirent les connaissances des peuples visités, égyptiens, phéniciens, carthaginois, juifs… pourquoi n'en fut-il pas de même pour le système babylonien de numération ?

Les Pythagoriciens ne surent-ils pas l'assimiler ? Cherchèrent-ils à garder du pouvoir sur les masses grâce au secret ?

L'aristocratique philosophie de la secte considéra que le calcul de dénombrement était indigne du citoyen distingué. Les techniques opératoires furent délaissées au profit de l'étude des propriétés des nombres et de la justification des résultats.

Dans l'éducation au niveau aristocratique le rôle dévolu au calcul était autre que celui de ses moyens. Platon recommandait l'étude des mathématiques par tous les enfants dès le début de la formation, quelque rude que fût cette étude.

« La racine est amère, les fruits sont doux », disait-on en parlant de l'éducation.

Platon donc distingue **deux parties dans les mathématiques : λογιστική** – nous dirons la logistique – et **αριθμητική** – arithmétique.

La logistique est la pratique des exercices de calcul voire de géométrie élémentaire. C'est une introduction. « Elle prépare la conversion de l'âme ; par elle l'âme s'éveille à la contemplation de la réalité elle-même et non à l'ombre des "objets" ». Platon recommandait des exercices pratiques à faire exécuter aux enfants en leur donnant de petits objets. Sans doute exista-t-il des recueils de ces exercices, nous n'en possédons pas.

Après ce temps d'introduction pendant lequel ont pu être sélectionnés les meilleurs, le disciple débouche sur l'arithmétique plus abstraite. On raisonne désormais plus qu'on ne compte. Il semble même que la logistique fut un art méprisé de maints savants grecs.

Alors, comme on compte peu, il suffit dans le discours d'écrire au besoin les nombres prononcés en toutes lettres, ce qui se fit le plus souvent.

C'est donc sur ces bases que va se développer le système de numération alphabétique connu sous le nom de système ionique.

Dans un premier temps est apparu sur les bords de la mer Egée, d'aucuns précisent en Ionie, un simple numérotage alphabétique permettant de repérer des objets à l'aide des vingt-quatre lettres dans l'ordre conventionnel hérité des Phéniciens de A pour le premier à Ω pour le vingt-quatrième. On retrouve ce principe ailleurs, par exemple dans les psaumes dits alphabétiques de la Bible où chaque verset est précédé d'une lettre hébraïque.

Une numération limitée à 24 a dû se révéler assez tôt insuffisante.

Vers la fin du 4e siècle avant Jésus-Christ un nouveau système, non plus fondé sur le principe additif comme celui de l'Attique mais, peut-être, inspiré par celui des Hébreux, prévaut en Ionie puis dans toute la Grèce.

Sont d'abord utilisées les lettres majuscules (inscriptions gravées) puis ce sont les minuscules (écriture) vers le 3e siècle avant Jésus-Christ.

On a ainsi trois groupes de 9 lettres. Ce sont, avec leur signification :

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**	**F**	**Ζ**	**Η**	**Θ**
α	**β**	**γ**	**δ**	**ε**	**ς**	**ζ**	**η**	**θ**
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ι	**Κ**	**Λ**	**Μ**	**Ν**	**Ξ**	**Ο**	**Π**	Ϙ
ι	**κ**	**λ**	**μ**	**ν**	**ξ**	**ο**	**π**	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Ρ	**Σ**	**Τ**	**Υ**	**Φ**	**Χ**	**Ψ**	**Ω**	Ϡ
ρ	**σ**	**τ**	**υ**	**φ**	**χ**	**ψ**	**ω**	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

S'il y a doute une barre au dessus (ou un accent en haut à droite pour l'écriture) précise qu'il s'agit de nombres.

Cela donne : $\overline{\text{ΡΟΗ}}$ et ρ′ο′η′ pour 178

Ou bien : $\overline{\text{ΩΙΖ}}$ et ω′ι′ζ′ pour 817

On voit donc le principe séparant unités, dizaines, centaines.

De 1 000 à 9 999 on reprend la première série de lettres mais précédées d'une barre / (ou accentuées en bas à gauche)

/Γ$\overline{\text{ΤΛΓ}}$ et ͵γτ′λ′γ′ pour 3 333

/F$\overline{\text{ΟΑ}}$ et ͵ςο′α′ pour 6 071

Avec trente-six symboles, on va donc jusqu'à 10 000 (la myriade). Au-delà, on indique le nombre de myriades, on écrit M (trace de la notation attique), puis la partie du nombre inférieure à la myriade.

λ′β′Μα′χ′υ′δ′ pour 321 654

Par la suite, on se contente parfois d'un point au lieu de M :

α · πε pour 10 085

Archimède (mort en 212) et Apollonius de Perga (2e siècle avant Jésus-Christ), ayant besoin d'utiliser des nombres plus importants, perfectionnèrent le système chacun avec leur écriture. En fait, comme nous rompons l'écriture des grands nombres en classes de mille, par exemple 98 765 123, ils groupaient les symboles quatre par quatre, c'est-à-dire en myriades, myriades de myriades, etc.

αα′ · π′η′ · ρ′θ′ signifierait : 1001 (10 000 x 10 000) + 88 (10 000) + 109, soit 100 100 880 109

C'est ainsi qu'on a pu dégager de leur œuvre la connaissance de la règle que nous écrivons : $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ qu'ils appliquaient aux myriades.

Il est à noter que beaucoup de variantes ont été relevées au fur et à mesure que de nouveaux documents ont été étudiés par rapport au schéma théorique que nous avons présenté et qui se trouve surtout dans les ouvrages des érudits de la Renaissance.

Mais les opérations, si on veut en discuter, comment se faisaient-elles ?

On peut penser qu'on avait recours au boulier ou à la table (après passage dans l'autre système) voire à un calculateur – il y avait des esclaves entraînés à ces fins –, calculateur qui usait sans doute de l'autre système. Chaque époque n'a-t-elle pas son outil, sa machine à calculer ?

En ce qui concerne l'addition – πρόθεσις (*prothésis*) – et sa sœur la soustraction – ἀφαίρεσις (*aphaïrésis*) – il est légitime d'estimer que le nombre était décomposé, les additions se faisant par ordre puis le résultat était regroupé ! Expliquons-nous sur un exemple :

TΠZ plus PNH (387 + 158) se traite comme :

(T + Π + Z) + (P + N + H)

et il vient :

(T + P) + (Π + N) + (Z + H)

Sont alors nécessaires trois tables d'addition.

Celle des unités :	Z + H donne IF	7 + 8 donne 10 + 5,
Celle des dizaines :	Π + N donne PΛ	80 + 50 donne 100 + 30
Celle des centaines :	T + P donne Y	100 + 300 donne 400

On obtient :

(Y + P) + (Λ + I) + F

et de là, similairement :

φ + M + F

La somme de TNZ et de PNH s'écrit φMF (545).

Le mot qui désigne la somme c'est κεφάλαιον (*céphalaion*), en effet cette somme s'écrivait non pas en dessous mais au dessus, en tête des colonnes de nombres à additionner.

Pour la multiplication – πολλαπλασιασμός (*pollaplasiasmos*) – c'est la même idée qui va être exploitée. Nous suivrons celle-ci sur un rare exemple pris dans la littérature de l'époque. Démosthène le fournit dans l'argument de son plaidoyer contre un certain Androtion (vers 365 avant Jésus-Christ). Il s'agit de la multiplication de 12 par 29. Démosthène écrit les noms de nombre en entier, mais le principe est le même : 12 c'est dix plus deux, 29 vingt plus neuf.

Δεκάκις γὰρ εἴκοσι διακόσια, δὶς εἴκοσι τεσσαράκοντα,
δεκάκις ἐννέα ἐνενήκοντα, δὶς ἐννέα δεκαοκτώ,

« *10 fois 20 font 200, 2 fois 20 font 40*
10 fois 9 font 90, 2 fois 9 font 18 »

Le discours a pour but de montrer que 12 mois lunaires de 29 jours ½ font 354 jours. Au calcul précédent Démosthène ajoute :

καὶ τὸ ἥμισυ τῶν δώδεκα ἕξ.

« *...et la moitié de douze est six.* »

Le total est alors :

τριακοσίας πεντήκοντα τέσσαρας.

« *trois cent cinquante quatre* ».

On suit le raisonnement. Mais, pour un emploi régulier ce serait tout un jeu de tables de multiplication qui serait nécessaire : unités par unités, unités par dizaines, dizaines par dizaines, unités par centaines, etc.

Écrivons ce même calcul avec les symboles.

Soit (ιβ) · (κθ) ou en utilisant une écriture "polynôme" : (ι + β) · (κ + θ).

ι · κ = σ ; βκ = μ ; ι · θ = ϙ ; βθ = ιη, donc :

(ιβ) · (κθ) = σ + (μ + ϙ + ι) + η
= σ + (ρ + μ) + η
= (σ + ρ) + μ + η
= τ + μ + η = τμη

Dans le même document cité, Démosthène effectue une autre opération intéressante car elle utilise des fractions (fractions de l'unité). Il s'agit de montrer que l'année ayant, selon le cours du soleil, 365 jours, le mois devrait comporter (365 divisé par 12) jours, c'est-à-dire :

τριάκοντα καὶ τρίτον καὶ δωδέκατον

« *trente et un "troisième" et un "douzième"* »

Démosthène écrit :

Δεκάκις γὰρ τριάκοντα τριακόσια, δὶς τριάκοντα ἑξήκοντα· λοιπὰ πέντε. Τὸ τρίτον τῶν δώδεκα τέσσαρα· λοιπὴ μία. Δωδέκατον δὲ ἡ μία τῶν δώδεκά ἐστι.

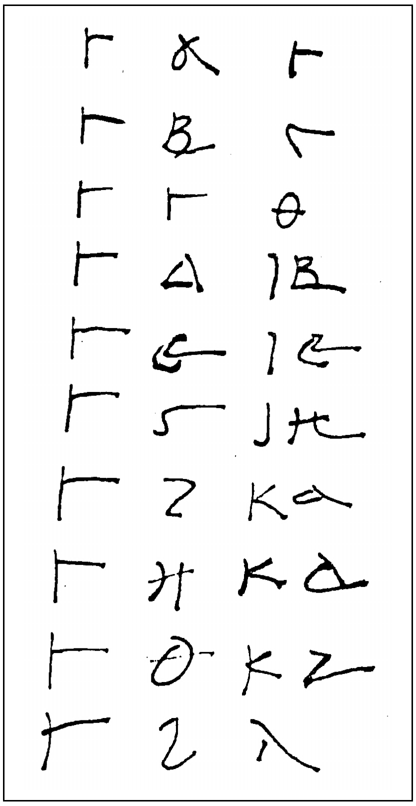
« *10 fois 30 font 300, 2 fois 30 font 60, reste 5.*
Le tiers de 12 est 4, reste 1. Le douzième de 12 est 1. »

Mais cela apparaît plus comme une preuve que comme une division.

Pour être ainsi exposée lors d'une plaidoirie, il est légitime de penser qu'une telle opération ne devrait pas être d'usage courant. On imagine mal, de nos jours, une des gloires du Palais, éprouvant le besoin de détailler une multiplication dans le prétoire !

Les tables d'opérations que nous avons évoquées, étaient-elles apprises par cœur ou figuraient-elles sur des tablettes ? Nous disposons de peu de témoignages.

Nous reproduisons, ici, un document rare sur cette question.



Reproduction d'une table de multiplication alphabétique (Table de 3 pour les unités) conservée au British Museum (Londres).

On remarquera la variété de graphie des lettres. Il s'agit d'une écriture, au stylet, de majuscules.

On connaît aussi des tables de carrés et des tables d'arcs et de cordes.

Il est enfin un autre aspect de la science des nombres ou plus exactement du langage des nombres qu'on ne peut passer sous silence car les Grecs s'y attachèrent. Il s'agissait, dirons-nous, d'esthétique.

Ainsi 6 est un nombre « parfait », car :

$6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

On respectait le « quaternaire » : $1 + 3 = 2 + 2 = 4$, car il engendrait la « décade » :

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

De même que pour Pythagore le cube est le symbole de la terre, le tétraèdre du feu, l'octaèdre de l'air, l'icosaèdre de l'eau et que le dodécaèdre est l'enveloppe de l'univers, pour plus d'un penseur grec l'unité est considérée comme la monade où réside l'intelligence.

On a reconnu les cinq polyèdres réguliers de Platon.

Le religieux peut être présent. Sept est le nombre propre à Athéna, déesse ni engendrée ni génératrice. Or dans la décade, « sept » n'est pas un produit, nombre premier, il est le seul à ne pas y avoir de multiple…

Une dernière question : lorsque la numération grecque est citée, c'est presque exclusivement le seul système alphabétique. Pourquoi ?

Une réponse assez simple vient à l'esprit qui est la suivante. L'élite scientifique ou aristocratique employait uniquement ce système. Elle seule laissa des documents écrits. Ensuite les compilateurs du Moyen-Âge connurent donc essentiellement ce système avant qu'il ne cède la place à la numération de position indo-arabe. On s'en est tenu au témoignage des compilateurs. Si le peuple de la Grèce puis de l'Empire Romain compta autrement que l'élite les traces en furent minces. Mais, se perpétuèrent dans la masse des peuples d'Occident, le calcul digital et, pour les besoins du commerce, le système romain de numération qui cacha le vieux système de l'Attique.

Le témoignage de ceux qui comptaient le plus compta le moins !

Si nous avons laissé le soin aux historiens des sociétés de rechercher la cause de la coupure, nous pouvons donner un aperçu de ses conséquences.

Au stade du simple calcul, il semble bien qu'il y ait même eu plus qu'une coupure. La question de la numération fait apparaître comme un rejet de la pratique élémentaire. En méprisant ce qui avait un caractère pratique, tels les calculs, les Grecs retardèrent certainement la naissance de l'algèbre.

On dit parfois que la violence naît de l'absence de dialogue. Pour les mathématiques il semble bien que, chez les Grecs, l'absence de dialogue entre la pratique usuelle et la réflexion théorique, entraîna une sorte de stérilité. La rigueur seule n'arrivait pas à être créatrice ; la pratique devenant mécanique s'embourbait dans le strict répétitif. Cette phrase n'est, hélas, pas à être écrite au passé. Ceci demeure au 21e siècle.

Certes la science grecque a gagné en rigueur en s'éloignant du calcul, du comput, mais, elle s'est coupée des besoins stimulants et des exigences toujours renaissantes de la pratique. Si toutefois on excepte Archimède, certainement le plus grand mathématicien grec, qui, lui, n'a cessé de maintenir le dialogue, on peut dire avec L. Brunschvicg que la science grecque « *a manqué de cela même qui nous apparaît, aujourd'hui, comme la condition du savoir : la connexion du calcul et de la physique, du calcul et de l'expérience* ».

*

Remarque. − L'écriture des grands nombres selon ce procédé a posé problème. Archimède et d'autres l'ont abordé. Pour user des myriades ils ont approché un système de position qu'ils n'ont pas voulu ou pu étendre aux petits nombres. Cela ne fut fait que bien plus tard, par d'autres et ailleurs.

SOMMAIRE