

Perception de l'optimisation en mathématiques et en économie au fil des siècles et l'enseignement du théorème de Lagrange

Sebastian Xhonneux

Département de Mathématique, FUNDP, Namur

Journées Nationales de l'APMEP
La Rochelle - 27 octobre 2008

Plan

- 1 Introduction - Quelques mots de didactique
- 2 Qu'en est-il de l'histoire de l'optimisation...
 - dans l'Antiquité ?
 - à la Renaissance ?
 - pendant la Révolution Française ?
 - au 19^{ème} siècle ?
 - au 20^{ème} siècle ?
- 3 Le théorème de Lagrange
 - Formulation du théorème de Lagrange
 - Des preuves variées du théorème de Lagrange
- 4 Analyse des questionnaires distribués aux enseignants
 - Détails techniques de l'enquête
 - Obstacles soulevés par les enseignants
- 5 Conclusions

- 1 Introduction - Quelques mots de didactique
- 2 Qu'en est-il de l'histoire de l'optimisation...
 - dans l'Antiquité ?
 - à la Renaissance ?
 - pendant la Révolution Française ?
 - au 19^{ème} siècle ?
 - au 20^{ème} siècle ?
- 3 Le théorème de Lagrange
 - Formulation du théorème de Lagrange
 - Des preuves variées du théorème de Lagrange
- 4 Analyse des questionnaires distribués aux enseignants
 - Détails techniques de l'enquête
 - Obstacles soulevés par les enseignants
- 5 Conclusions

Didactique des mathématiques

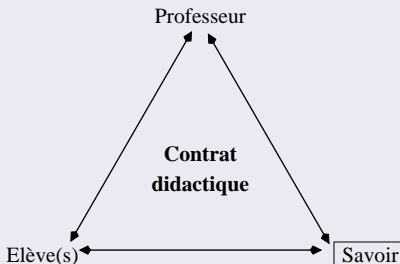
Triangle didactique

Didactique

étude des questions posées
par l'enseignement dans les
différentes disciplines scolaires

Pédagogie

méthodes et pratiques
d'enseignement et
d'éducation



Didactique des mathématiques

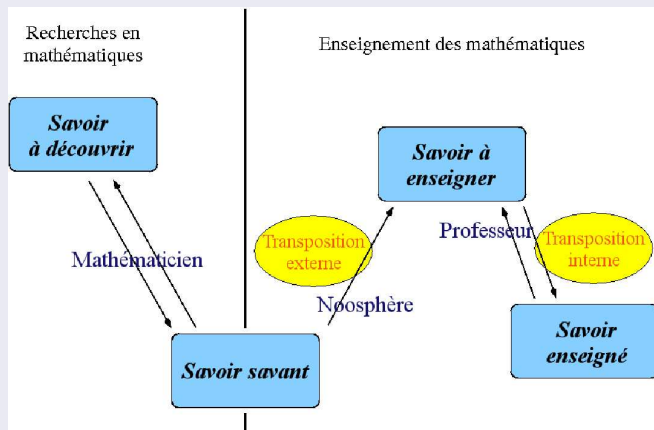
Guy Brousseau (1933-)

“Le mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés ; il les réorganise il leur donne une forme aussi générale que possible ; il fait de la “didactique pratique” qui consiste à mettre le savoir sous une forme communicable, décontextualisée, dépersonnalisée, détemporalisée.”

Théorie des situations didactiques

Didactique des mathématiques

Transposition didactique



Didactique des mathématiques

La notion d'obstacle didactique

La notion d'obstacle est fondamentale pour poser le problème de la connaissance scientifique.

Selon Gaston Bachelard (1938) :

“Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique.”

Didactique des mathématiques

Selon Brousseau, on trouve des obstacles didactiques d'origine épistémologique, d'origine didactique, d'origine ontogénique.

Obstacles épistémologiques

Liés au développement historique des connaissances.

“Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif de la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes.”

Exemple : la notion de limite

Didactique des mathématiques

Obstacles didactiques

Obstacles résultant d'une transposition didactique, qui "*semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif.*"

Exemple : équations d'une droite

Obstacles ontogéniques

Obstacles qui "*surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment donné de son développement.*"

Exemple : on ne peut espérer qu'un enfant de 6 ans comprenne les principes d'une théorie axiomatique.

Fil conducteur

Le théorème de Lagrange dans l'enseignement des mathématiques et de l'économie

Analyse a priori

- Etude de l'épistémologie et revue historique de l'évolution des théories de l'optimisation dans les deux disciplines
- Analyse des différents manuels
- Enquête auprès des enseignants/des étudiants
- Mise en évidence d'éventuels obstacles

Expérimentation : Concevoir une *ingénierie*

- Une séquence d'apprentissage

Analyse a posteriori

- Enquête auprès des étudiants, comparaison entre les données obtenues et l'analyse a priori

Introduction

Optimisation

L'usage français du mot *optimiser* vient à l'origine du mot latin *optimum* qui signifie *le meilleur*.

- Actuellement :

La préoccupation de faire les choses de la meilleure façon qu'il soit

- Histoire de l'optimisation aussi vieille que celle de l'humanité \leadsto Historique et épistémologie de l'optimisation
- Outil mathématique important \leadsto Nécessité d'enseigner cette matière dans différentes disciplines
- Résultat particulier : théorème de Lagrange

- 1 Introduction - Quelques mots de didactique
- 2 Qu'en est-il de l'histoire de l'optimisation...
 - dans l'Antiquité ?
 - à la Renaissance ?
 - pendant la Révolution Française ?
 - au 19^{ème} siècle ?
 - au 20^{ème} siècle ?
- 3 Le théorème de Lagrange
 - Formulation du théorème de Lagrange
 - Des preuves variées du théorème de Lagrange
- 4 Analyse des questionnaires distribués aux enseignants
 - Détails techniques de l'enquête
 - Obstacles soulevés par les enseignants
- 5 Conclusions

L'école d'Alexandrie

Euclide

300 ans avant notre ère, dans *Optica* :

- Rayons lumineux incident et réfléchi dans un même plan
- Angle incident = angle réfléchi

Formulation de problèmes d'optimisation



Première trace écrite de l'optimisation



Héron d'Alexandrie

Dans *Catoptrics*, principe d'optimisation :

Le principe du plus court chemin

“Le chemin le plus court qui lie un point P à un point Q et qui contient un point d'une droite d donnée, est tel qu'au point de réflexion sur la droite d l'angle incident égale l'angle réfléchi.”

⇒ Premier problème considéré de façon scientifique

Première trace écrite de l'optimisation



Héron d'Alexandrie

Dans *Catoptrics*, principe d'optimisation :

Le principe du plus court chemin

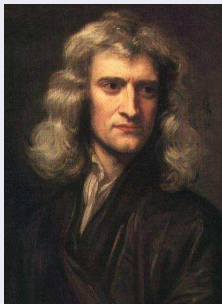
“Le chemin le plus court qui lie un point P à un point Q et qui contient un point d'une droite d donnée, est tel qu'au point de réflexion sur la droite d l'angle incident égale l'angle réfléchi.”

⇒ Premier problème considéré de façon scientifique

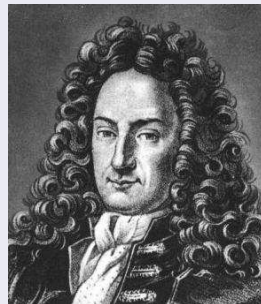
L'aube de l'analyse moderne

Naissance du calcul différentiel

- Isaac Newton versus Gottfried Wilhelm Leibniz
- Résolution des mêmes problèmes



versus



L'aube de l'analyse moderne

Isaac Newton (1642-1727)

- Conception d'une courbe comme trajectoire d'un point
- Variations infinitésimales de quantités *fluents* x et y
- Introduction du temps en tant que variable universelle
- Notation : \dot{x} et \dot{y} (*fluxions*)

L'aube de l'analyse moderne

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

En 1684, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (*Acta Eruditorum*) :

$$d(xy) = xdy + ydx, \quad d(x/y) = (ydx - xdy)/y^2, \quad dx^n = nx^{n-1}.$$

⇒ **Recherche de tangentes, de minima et de maxima**

Sa notion de dérivée : (*differentia* (*différence*))

Un premier résultat

Condition nécessaire du premier ordre

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point intérieur a de I .

Si a est un extremum local de f , alors

$$f'(a) = 0.$$

Le prince des amateurs



Pierre de Fermat (1601-1665)

Règle de Fermat :

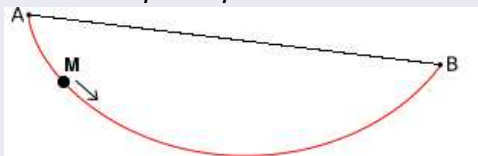
“Lorsqu’une grandeur, par exemple l’ordonnée d’une courbe, est parvenue à son maximum ou son minimum, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle.”

Le problème brachistochrone

En 1696, Johann Bernoulli (1667-1748) pose le problème suivant :

Le problème brachistochrone

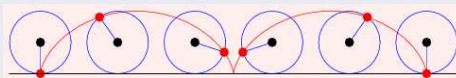
Déterminer, parmi toutes les courbes joignant deux points donnés A et B dans un plan vertical, la courbe AMB que doit suivre un point matériel M placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale pour qu'il présente un temps de parcours minimal entre A et B .



Le problème brachistochrone

Solution

Solution : la cycloïde



Jakob Bernoulli (1654-1705)

- Décomposition du problème initial

- Solution : $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{k^2-x}}$

Naissance du calcul des variations

Leonhard Euler (1707-1783)

Problème du calcul variationnel :

Quelle(s) fonction(s) $y(x)$, parmi une certaine classe donnée, minimise(nt) ou maximise(nt) une *fonctionnelle* ?

(*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744)



Un deuxième résultat

Equation d'Euler-Lagrange

Soit le problème variationnel défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad I(y) = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y, y') \, dx \\ \text{SC} \quad y(x_A) = y_A, \\ \quad \quad y(x_B) = y_B, \\ \quad \quad x_A < x_B. \end{array} \right.$$

Une condition nécessaire pour que I soit stationnaire est que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

La notion de fonction

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

“On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.”
(Théorie des Fonctions Analytiques, 1797)



Théorème de Lagrange

Généralisation

Généralisation de la condition nécessaire d'optimalité de Leibniz, *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797) :

“On peut les réduire à ce principe général. Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être un maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions, qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et de chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes; les équations que l'on trouvera combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues.”

Un troisième résultat

Théorème de Lagrange

Soit $x^* \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}$ un point régulier solution du problème

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{sc} & g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Alors il existe nécessairement $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^* \in \mathbb{R}$ uniques vérifiant

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

Les composantes du vecteur λ^* sont appelées **multiplicateurs de Lagrange**.

Guère de nouveaux résultats en mathématiques

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

- Formulations des concepts mathématiques en terme de ϵ et δ
- *Méthode du gradient*



MAIS les méthodes mathématiques font leur percée en économie au 19^{ème} siècle !

Guère de nouveaux résultats en mathématiques

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

- Formulations des concepts mathématiques en terme de ϵ et δ
- *Méthode du gradient*



MAIS les méthodes mathématiques font leur percée en économie au 19^{ème} siècle !

Les économistes commencent à s'intéresser...

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877)

- En 1838 : *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*
- Idées mathématiques ↔ théories de l'économie politique



Exemple : De la loi du débit (Chapitre 4)

“Admettons donc que le débit ou la demande annuelle D est, pour chaque denrée, une fonction particulière $F(p)$ du prix p de cette denrée.

[...]

Donc, puisque la fonction $pF(p)$ va d'abord en croissant avec p , puis finalement en décroissant, il y a une valeur de p qui la rend un maximum, et qui est donnée par l'équation

$$F(p) + pF'(p) = 0."$$

Westergaard et les multiplicateurs

En économie : Problèmes économiques \rightsquigarrow problèmes d'optimisation sous contraintes

\Rightarrow Application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange



Harald Ludvig Westergaard (1853-1936)

En 1876, problème "le plus grand bonheur du plus grand nombre" (Utilitarisme)

$$\begin{cases} \max & U = \sum \varphi(x_r) \\ \text{sc} & \sum x_r = M \end{cases}$$

Un an plus tard

Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926)

- En 1877, *New and Old Methods of Ethics*
- En 1881, *Mathematical Psychics*

Hermann Amstein

En 1877, lettre envoyée à Leon Walras

Seules quelques années furent nécessaires pour mettre la théorie de l'optimisation au service de l'économie...

Un an plus tard

Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926)

- En 1877, *New and Old Methods of Ethics*
- En 1881, *Mathematical Psychics*

Hermann Amstein

En 1877, lettre envoyée à Leon Walras

Seules quelques années furent nécessaires pour mettre la théorie de l'optimisation au service de l'économie...

Avant la Deuxième Guerre mondiale



Leonid Kantorovich (1912-1986)

- En 1939, découverte de la technique de la programmation linéaire
- Résultats inaperçus

La Deuxième Guerre mondiale

“Real world problems”

Problème : Allocation des ressources

Solution : Etablissement de *plans d'interventions* (*program of actions*)

George Dantzig (1914-2005)

- En 1947, formulation générale des problèmes de programmation linéaire
- Méthode du simplexe



La Deuxième Guerre mondiale

Recherche Opérationnelle

Recherche Opérationnelle (RO) = Aide à la décision

- En 1940, implantation optimale de radars
- "Opérationnelle" = opérations militaires
- Aujourd'hui : en ingénierie, en sciences économiques, en théorie des jeux, en informatique, ...
- 3 caractéristiques : orientation vers systèmes, application de méthodes scientifiques et interdisciplinarité

Deuxième moitié du 20^{ème} siècle

Généralisation de la méthode du simplexe

Fonctions non-linéaires : possibilité d'avoir des extrema locaux à l'intérieur du domaine admissible

Harold W. Kuhn (1925-) et Albert W. Tucker (1905-1995)

- En 1951, extension de la programmation linéaire
- Utilisation du terme "Programmation non-linéaire"
- Contraintes d'inégalités non-linéaires

Deuxième moitié du 20^{ème} siècle

William Karush (1917-1997)

- En 1939, démonstration du théorème de Kuhn-Tucker
- Calcul des variations
- Conditions de régularité (“qualifications de contraintes”)
- Reconnaissance en 1975

Un quatrième résultat

Théorème de Karush-Kuhn-Tucker

Soit x^* une solution du problème

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{sc} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x \in X, \end{cases}$$

où $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et f, g_1, \dots, g_m sont des fonctions différentiables.

Supposons que les gradients $\nabla g_i(x^*)$ sont linéairement indépendants pour $i \in I = \{i | g_i(x^*) = 0\}$. Alors il existe $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ vérifiant

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) &= 0, \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \lambda_i^* &\geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Et depuis ?

L'optimisation, une discipline multibranches

Programmation mathématique = branche très active des mathématiques appliquées de nos jours :

- Programmation linéaire,
- Programmation non-linéaire,
- Programmation convexe,
- Programmation combinatoire,
- Programmation stochastique,
- Programmation entière,
- Programmation dynamique,
- ...

- 1 Introduction - Quelques mots de didactique
- 2 Qu'en est-il de l'histoire de l'optimisation...
 - dans l'Antiquité ?
 - à la Renaissance ?
 - pendant la Révolution Française ?
 - au 19^{ème} siècle ?
 - au 20^{ème} siècle ?
- 3 **Le théorème de Lagrange**
 - **Formulation du théorème de Lagrange**
 - **Des preuves variées du théorème de Lagrange**
- 4 Analyse des questionnaires distribués aux enseignants
 - Détails techniques de l'enquête
 - Obstacles soulevés par les enseignants
- 5 Conclusions

Théorème de Lagrange

- $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$
- $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ ($n \geq p$)
- x^* minimum (ou maximum) local du problème

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{cases}$$

- $\{\nabla g_i\}$ linéairement indépendants au point x^*

Alors $\exists \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

Les composantes du vecteur λ^* sont appelées *multiplicateurs de Lagrange*.

Une première preuve

Une illustration géométrique

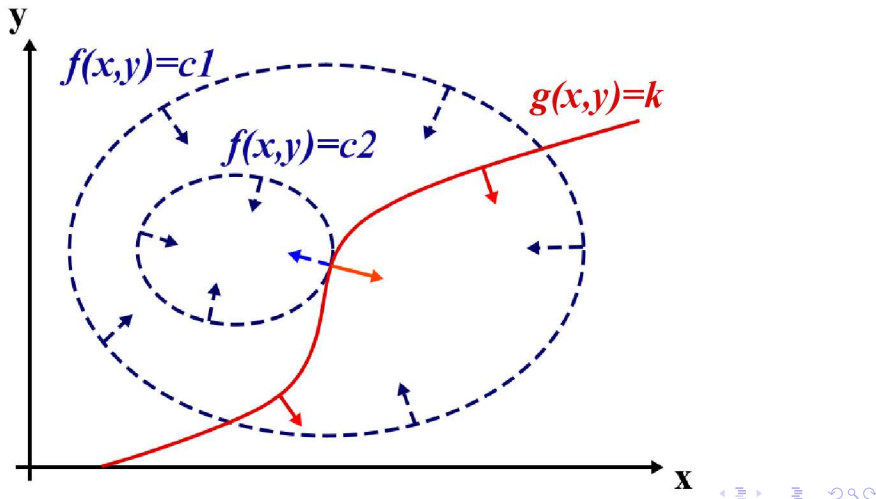
Deux variables : preuve non-formelle basée sur les courbes de niveau illustrées sur un graphique

Pour résoudre

$$\begin{cases} \min & f(x, y) \\ \text{sc} & g(x, y) = k. \end{cases}$$

il faut rechercher la plus grande valeur de c telle que la courbe d'équation " $f(x, y) = c$ " coupe la courbe d'équation " $g(x, y) = k$ ".

Une première preuve



Une première preuve

Une illustration géométrique

Solution : Les vecteurs normaux sont parallèles en (x^*, y^*) .

Trouver des points optimaux qui satisfont la contrainte = chercher des points qui vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} g(x^*, y^*) = 0 \\ \nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*) \end{cases}$$

Une deuxième preuve

Corollaire du théorème des fonctions implicites

Preuve analytique dans le cas de n variables.

Deux variables :

- Théorème des fonctions implicites à $g(x, y) = k$. Pourquoi? *Condition de régularité*
- Minimiser $f(x, \rho(x))$, où $y = \rho(x)$
- Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre + "dérivation en chaîne" : $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \rho' = 0$

$$\bullet \quad \rho'(x^*) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*)} = \mu$$

Une deuxième preuve

Corollaire du théorème des fonctions implicites

- Système de deux équations à trois inconnues (x, y, λ) , où $\lambda = -\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$$

- Disposer d'une équation supplémentaire $\Rightarrow g(x, y) = k$

Les équations de Lagrange

Une troisième preuve

La théorie de la dualité

n variables, p contraintes :

- Caractériser le plan tangent en x^* par l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^n \mid J_g(x^*)y = 0\}$
- Lemme : $\forall y \in \mathbb{R}^n : J_g(x^*)y = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*)^T y = 0$
- Problème d'optimisation "linéarisé"

$$\begin{cases} \max & \nabla f(x^*)^T y \\ \text{sc} & J_g(x^*)y = 0 \end{cases}$$

Valeur optimale = 0

Conclusion obtenue par le *théorème de dualité* pour la programmation linéaire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla f(x^*) + J_g(x^*)^T \lambda = 0$

Une quatrième preuve

Le lien avec la mécanique

Preuve se référant au cadre du travail original de Lagrange

n variables, p contraintes :

- Caractériser le vecteur vitesse initial d'un chemin différentiable passant par x^* d'optimisation.
- Montrer que $T_{x^*}(S) = \text{Ker} J_g(x^*)$, où $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g_i(y) = 0, i = 1, \dots, p\}$
- Nécessité de trouver une solution $x(t)$ du système différentiel :

$$\begin{cases} A(x)y' = -B(x)c, & y(0) = y_0, & x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \\ z' = c, & z(0) = z_0 \end{cases}$$

→ théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano

Une quatrième preuve

Le lien avec la mécanique

Preuve :

- $v_0 \in T_{x^*}(S)$, $\alpha(t) \in S$ tel que $\alpha(0) = x^*$ et $\alpha'(0) = v_0$
- $\psi(t) = f(\alpha(t))$ admet un extremum local en $t = 0$
- Dérivation en chaîne :

$$0 = \psi'(0) = \nabla f(x^*)v_0$$

- $\nabla f(x^*) \perp T_{x^*}(S) \Rightarrow \nabla f(x^*) \in \text{Im}J_g(x^*)$

Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\nabla f(x^*) = \lambda^T J_g(x^*)$$

Quelle preuve choisiriez-vous ?

IRCM 2008, Luxembourg

17 réponses de mathématiciens :

- Preuve 1 : 0
- Preuve 2 : 10 - “The proof is natural”, “Implicit function theorem is fundamental”
- Preuve 3 : 3 - pour “linear programmists”
- Preuve 4 : 3 - pour physiciens
- Une combinaison de 1 et 2 : 5 “I want to present exact mathematics but it should be combined with geometric intuition”

- 1 Introduction - Quelques mots de didactique
- 2 Qu'en est-il de l'histoire de l'optimisation...
 - dans l'Antiquité ?
 - à la Renaissance ?
 - pendant la Révolution Française ?
 - au 19^{ème} siècle ?
 - au 20^{ème} siècle ?
- 3 Le théorème de Lagrange
 - Formulation du théorème de Lagrange
 - Des preuves variées du théorème de Lagrange
- 4 **Analyse des questionnaires distribués aux enseignants**
 - **Détails techniques de l'enquête**
 - **Obstacles soulevés par les enseignants**
- 5 Conclusions

Caractéristiques

- Questionnaire composé de 27 questions ouvertes et à choix multiples
- Questions concernant : des informations générales, la structure du cours donné, les aspects didactiques, les aspects pratiques et la perception de l'apprentissage chez les étudiants
- Distribution à 13 professeurs universitaires belges et luxembourgeois, 8 réponses revenues
- Public : Bac1, Bac2, Bac3 en mathématiques, mathématiques appliquées, économie et ingénieur de gestion

Expériences d'enseignants

Importance du théorème

- Résultat parmi d'autres pour les mathématiciens
- Résultat important pour les économistes et les ingénieurs car utile pour la suite de leurs études (surtout la microéconomie)

Définition du lagrangien

- En mathématiques : $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x)$
- En économie : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(k - g(x, y))$

La démonstration du théorème

- Deux fois sans preuve
- En économie, d'abord une illustration géométrique (*preuve 1*), puis preuve par le théorème des fonctions implicites (*preuve 2*)
- En mathématiques, application du théorème des fonctions implicites (*preuve 2*) ou de la théorie de la dualité (*preuve 3*)
- Clé de la preuve : théorème des fonctions implicites
- Introduction d'abord dans le cas d'une seule contrainte (fonctions de deux variables)
- Pas de lien avec la mécanique (*preuve 4*)

Expériences d'enseignants

Condition nécessaire

Perception du fait qu'il s'agit d'une condition nécessaire et non pas d'une condition suffisante : avis très partagés

- “Il y a peut-être un décalage professeur-étudiants”
- “Le lien est assez bien fait avec les conditions nécessaires d'optimalité pour les problèmes sans contraintes.”
- “Mais il faut fort insister au cours !”
- “La logique fait de plus en plus défaut dans la formation des étudiants.”

Expériences d'enseignants

Applications

- Applications pratiques :
 - en économie et en gestion
 - en géométrie
 - en finance
 - en statistiques
- Applications théoriques :
 - valeurs propres de matrices
- Pas d'applications

- 1 Introduction - Quelques mots de didactique
- 2 Qu'en est-il de l'histoire de l'optimisation...
 - dans l'Antiquité ?
 - à la Renaissance ?
 - pendant la Révolution Française ?
 - au 19^{ème} siècle ?
 - au 20^{ème} siècle ?
- 3 Le théorème de Lagrange
 - Formulation du théorème de Lagrange
 - Des preuves variées du théorème de Lagrange
- 4 Analyse des questionnaires distribués aux enseignants
 - Détails techniques de l'enquête
 - Obstacles soulevés par les enseignants
- 5 Conclusions

Interdépendance entre les mathématiques et l'économie

- Mathématiques \rightsquigarrow économie
- MAIS aussi : Economie \rightsquigarrow mathématiques

Exemple :

- Théorie de l'optimisation \rightarrow progrès considérables au vingtième siècle
- Recherche opérationnelle \rightarrow impact énorme sur la programmation mathématique ou encore sur les théories des jeux et des graphes

Théorème de Lagrange

Faits observés

- Applicabilité dans beaucoup de problèmes concrets
- Possibilité de démontrer via différents chemins \Rightarrow Impacts supposés sur l'apprentissage et identifications des obstacles liés à l'enseignement
- Possibilité de combiner intuition et preuve analytique et rigoureuse dans l'enseignement du théorème

Perspectives

- Continuer l'analyse de la présentation et de la démonstration du théorème de Lagrange
- Identifier des obstacles didactiques
- Analyser les différents manuels chez les mathématiciens/chez les économistes
- Exploiter l'enquête menée auprès des enseignants et concevoir un questionnaire pour obtenir les opinions des étudiants
- A partir de l'analyse des obstacles identifiés, concevoir un séquence d'apprentissage
- Analyser l'importance et la signification des multiplicateurs de Lagrange

Merci de votre attention !