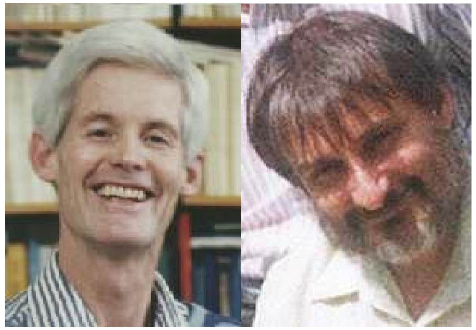
Les sept problèmes du millénaire

La fondation « The Clay Mathematics Institute of Cambridge » a créé un prix en l'an 2000, année mondiale des mathématiques, afin de définir les grands problèmes qui animent les mathématiques modernes. Ce prix propose 7 problèmes tous dotés d'une récompense d'un million de dollars. Il s'inscrit dans la lignée des 30 problèmes ouverts dont Hilbert avait dressé la liste il y a 100 ans et qui ont rythmé la vie des mathématiques du 20^{e} siècle.

Le *P* problème et le *NP* problème

Imaginez que vous deviez organiser le logement d'un ensemble de 400 étudiants. Vous ne disposez que d'une seule résidence comprenant exactement 100 chambres, aussi vous êtes amené à ne retenir qu'une partie de ces étudiants. Pour compliquer l'affaire, le doyen de votre université vous impose une liste de paires d'étudiants à ne pas faire habiter ensemble. Le nombre de possibilités pour un tel arrangement dépasse le nombre d'atomes dans l'univers et on ne pourra jamais construire un ordinateur capable de produire au moyen de sa seule force de calcul une liste convenable. Le problème, qui est un des plus importants actuellement en mathématiques appliquées à l'informatique, est bien entendu de savoir si il existe un procédé permettant de calculer la liste voulue en un temps limité. A l'opposé, si on vous donne une liste de 100 étudiants, il est facile de vérifier si cette liste satisfait ou non aux critères qu'on vient de fixer. On appelle *P* problème tout problème qui consiste comme ici à trouver une liste d'éléments dans un ensemble donné et ce relativement à un critère fixé à l'avance. Le *NP* problème est opposé au *P* problème. Il consiste à vérifier si une liste donnée est en adéquation avec les conditions données au préalable. Stephen Cook et Leonid Levin ont les premiers, et de manière indépendante, formulés le *P* problème et le *NP* problème en 1971.


Stephen Cook et Leonid Levin

La conjecture de Hodge

Au 20^{e}siècle, les mathématiciens ont découvert de puissants outils pour comprendre la « forme » des objets géométriques complexes. L'idée de base était de reconstituer l'objet au moyen d'un recollement d'une suite d'objets de dimension croissante. Cette technique s'est avérée si efficace qu'elle a été généralisée de plusieurs façons différentes et a permis de mettre au point de puissants outils pour la classification des objets géométriques complexes. Malheureusement les origines géométriques du procédé se sont obscurcis dans cette généralisation. En un certain sens, il est indispensable de faire intervenir des objets (appelés cycles de Hodge) qui n'ont pas d'interprétation géométrique. La conjecture de Hodge affirme que pour une classe d'espace suffisamment « sympathique » : les variétés algébriques projectives, ces cycles de Hodge sont des combinaisons linéaires rationnelles d'objets ayant une réelle nature algébrique : les cycles algébriques.


William Hodge

La conjecture de Poincaré

Henri Poincaré

Imaginez un fil élastique que l'on peut contracter ou étirer à l'infini. On noue ce fil afin d'en faire une boucle qu'on place à la surface d'un ballon (sphère). On peut déformer cette boucle sans la déchirer et sans la faire quitter la surface du ballon jusqu'à la réduire à un point. La même manipulation à la surface d'une chambre à air (tore) est impossible à réaliser. Un objet géométrique qui possède cette propriété est dit simplement connexe. Henri Poincaré, mathématicien français du début du 20^{e} siècle a démontré que la sphère était caractérisée par cette propriété. Il a conjecturé qu'il en était de même pour la sphère de l'espace de dimension 4. Cette question est en fait d'une difficulté extraordinaire et les mathématiciens cherchent à y répondre depuis 1 siècle.

L'hypothèse de Riemann

Bernhard Riemann

Certains nombres entiers ont la propriété remarquable de ne pas s'écrire comme le produit de deux nombres entiers plus petits (et différents de 1). Ces nombres sont appelés les nombres premiers. Ils jouent un rôle tout à fait privilégié en mathématiques. La distribution de ces nombres dans l'ensemble des entiers ne semblait répondre à aucune règle précise jusqu'à ce que le mathématicien allemand Georg Riemann (1826-1846) observe que la fréquence d'apparition de ces nombres dans l'ensemble des entiers était reliée de très près au comportement de la fonction ζ appelée fonction zêta de Riemann. L'hypothèse de Riemann affirme que les zéros « intéressants » de l'équation $\zeta(s)=0$ se situent le long d'une ligne droite. Cette hypothèse a été vérifiée pour les 1 500 000 000 premières solutions de cette équation. Démontrer cette hypothèse pour tous les zéros de l'équation permettrait de lever le mystère attenant à la distribution des nombres premiers parmi les autres nombres.

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills

Les lois de la mécanique quantique cherchent à expliquer l'infiniment petit, de la même façon que les lois de Newton s'appliquent au monde macroscopique. Il y a un demi siècle, Yang et Mills ont construits un modèle basé sur des théories géométriques pour décrire les particules élémentaires. Les prédictions qu'ils firent alors ont été testées dans de nombreux laboratoires et furent toujours vérifiées. Le fondement mathématiques de leur modèle reste cependant peu satisfaisant. Pour décrire l'interaction forte des particules élémentaires (c'est une des 4 forces fondamentales), la théorie de Yang-Mills fait intervenir une subtile propriété appartenant au monde de la mécanique quantique: en anglais *mass gap* : certaines particules quantiques ont une masse positive alors que l'onde associée voyage à la vitesse de la lumière. Cette propriété a été découverte par les physiciens de manière expérimentale et a été vérifiée par des simulations informatiques. Elle n'est par contre pas comprise d'un point de vue théorique. Les progrès relatifs à la théorie de Yang-Mills et à la propriété du gap d'énergie vont dépendrent de la capacité des physiciens et des mathématiciens à introduire des points de vue nouveaux et fondamentaux à la fois en physique et en mathématiques.

Les équations de Navier-Stokes

Stokes et Navier

Lorsque au moyen d'un bateau on serpente à la surface de l'eau, on remarque que les vagues produites vont suivre le déplacement du bateau. De la même façon, les turbulences de l'air vont suivre l'avion lors de son vol. Les mathématiciens et les physiciens pensent que la compréhension de ce phénomène passe par la compréhension des solutions des équations de Navier-Stokes. Bien que ces dernières aient été découvertes au 19e siècle, les scientifiques ont peu progressé dans leur étude. Un des défis des décennies à venir sera de faire progresser les théories mathématiques liées à ces équations et ce afin qu'elles livrent tous leurs difficiles secrets.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Birch et Swinnerton-Dyer

De tous temps les mathématiciens ont été fascinés par les problèmes liés à la description des solutions d'une équation algébrique. Euclide a par exemple décrit en son temps l'ensemble des solutions en nombre entier de la fameuse équation $x^2+y^2=z^2$. Mais cela est extrêmement difficile pour des équations plus compliquées. En 1970, Yu. V. Matiyasevich a prouvé que le 10e problème de Hilbert était insoluble. Cela signifie qu'il n'existe pas de méthode générale permettant de déterminer quand des équations algébriques possèdent ou pas des solutions en nombre entier. Dans des cas particuliers les mathématiciens pensent tout de même pouvoir affirmer des choses. Quand les solutions sont situées sur une variété abélienne, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer avance que la taille du groupe des solutions rationnels est reliée au comportement de la fonction zeta $\zeta(s)$ associée au voisinage de s=1. Cette conjecture étonnante affirme que si $\zeta(1)=0$ alors il y a une infinité de solutions rationnelles et réciproquement, si $\zeta(1)\neq 0$, il y a seulement un nombre fini de solutions rationnels.

Ces articles ont été extraits du site Internet http://www.les-mathematiques.net/p/p/a/node9.php3
Ils sont une traduction faites par Emmanuel Vieillard-Baron des présentations des problèmes du site de la fondation Clay : http://www.claymath.org/prizeproblems/.