Annexe : “La copie de Jean-Christophe”

[élève ayant suivi l’option Sciences en 2nde et en 1èreS au lycée Jean Monnet de 1998 à 2000]

Les nombres de Fermat sont définis pour $n \in \mathbf{N}$ par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

1° Donner une estimation du nombre de chiffres de F_{10}.

2° Déterminer F_0 , F_1 , F_2 , F_3 et F_4 .

3° Fermat croyait, à tort, que les nombres F_n étaient tous des nombres premiers (un nombre premier un nombre entier admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui même). Mais Euler montra en 1732 que F_5 était divisible par 641 en utilisant le fait que 16 est égal à 641 moins une puissance de 5 et la décomposition de 640 en un produit de facteurs premiers…

Essayer de retrouver la démonstration d’Euler (à l’époque il ne disposait pas de calculatrice !).

OPTION MATHEMATIQUES.

Les nombres de Fermat.

1. Pour $m \in \mathbb{N}$ $\quad F_m = 2^{(2^m)} + 1$

donc $F_{10} = 2^{(2^{10})} + 1$

$2^{10} = 1024$ donc $F_{10} = 2^{1024} + 1$

Ce qui va déterminer le nombre de chiffres présent dans F_{10} est 2^{1024} car 2^{1024} est forcément paire donc il finira forcément par 0, 2, 4, 6 ou 8 or si l'on ajoute 1 on obtient : 1, 3, 5, 7 ou 9 ce qui ne rajoute pas un chiffre au résultat.

$$
\begin{aligned}
2^{1024} &= 2^{1000} \times 2^{24} \quad \text{car } a^p \times a^m = a^{p+m} \\
&= (2^{100})^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^4 \quad \text{car } (a^p)^m = a^{p\times m} \\
&= [(2^{10})^{10}]^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^4
\end{aligned}
$$

Comme $2^{10} = 1024$ soit 4 chiffres

et $2^4 = 16$ soit 2 chiffres

$2^{1024} \Rightarrow [(4\text{ chiffres})^{10}]^{10} \times 4\text{ chiffres} \times 4\text{ chiffres} \times 2\text{ chiffres}$

si l'on pose la multiplication cela donne :

Annexe : “La copie de Jean-Christophe”

[élève ayant suivi l’option Sciences en 2^{nde} et en $1^{\text{ère}}$S au lycée Jean Monnet de 1998 à 2000]

$$\begin{array}{r}
1\,0\,2\,4 \\
\times\ 1\,0\,2\,4 \\
\hline
4\,0\,9\,6 \\
2\,0\,4\,8 \\
0\,0\,0\,0 \\
+\ 1\,0\,2\,4 \\
\hline
1\,0\,4\,8\,5\,7\,6
\end{array}$$

si l'on multiplie 4 chiffres par 4 chiffres on en obtient 7.

Car on a multiplier chaque chiffre apprés l'autre par les 4 chiffres du dessus en mettant les resultats l'un en dessous de l'autre et en le décalant d'une case à chaque fois on a donc décalé de trois cases par rapport au 4 premiers chiffres on obtient donc bien un nombre de 7 chiffres.

Comme notre nombre commence par 1 et puis 0 on peut les multiplier par n'importe quel chiffre sans que cela ne rajoute un chiffre au resultat on peut donc dire que le nombre de chiffre du resultat d'une multiplication par a et b (deux nombres non nuls) est égale à $\underline{a + b - 1}$ en donnant pour valeur à a et b *

Donc pour $1024 \times 1024 \Rightarrow 7$ chiffres

en effet 1024 a 4 chiffres et $a + b - 1$

donc $a = b = 4$

$= 4 + 4 - 1$

$= 7$.

* le nombre de chiffre présent dans le nombre.

<u>1.</u> Donc $2^{1024} \Rightarrow \left[\left[(4)^{10} \right]^{10} \times 4 \times 4 \times 2 \right]$ chiffres
c = chiffres.

$4c \times 4c \times 2c \Leftrightarrow (4c \times 4c) \times 2c$
$\Rightarrow (4+4-1)c \times 2c$
$\Rightarrow 7c \times 2c$
$\Rightarrow (7+2-1)c$
$\Rightarrow 8c.$

Ce qui revient à dire que si l'on multiplie 4 chiffres par 4 chiffres par 2 chiffres on obtient au minimum <u>8 chiffres</u>.

$2^{1024} \Rightarrow \left(\left[(4)^{10} \right]^{10} \times 8 \right)$ chiffres.

$4c^{10} \Leftrightarrow (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)$ chiffres.
$\Leftrightarrow [(4 \times 4)(4 \times 4)(4 \times 4)(4 \times 4)(4 \times 4)]$ chiffres.
$\Rightarrow [(4+4-1)(4+4-1)(4+4-1)(4+4-1)(4+4-1)]$ chiffres
$\Rightarrow (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7)$ chiffres.
$\Rightarrow [(7 \times 7)(7 \times 7) \times 7]$ chiffres

$\Rightarrow [(7+7-1)(7+7-1) \times 7]$ chiffres
$\Rightarrow (13 \times 13 \times 7)$ chiffres.
$\Rightarrow [(13 \times 13) \times 7]$ chiffres
$\Rightarrow [(13+13-1) \times 7]$ chiffres
$\Rightarrow (25 \times 7)$ chiffres
$\Rightarrow (25+7-1)$ chiffres
$\Rightarrow 31$ chiffres.

Pour 4 chiffres à la puissance de 10 on obtient au minimum <u>31 chiffres</u>.

Annexe : "La copie de Jean-Christophe"

[élève ayant suivi l'option Sciences en 2nde et en 1èreS au lycée Jean Monnet de 1998 à 2000]

$2^{1024} \Rightarrow [(31)^{10} \times 8]$ chiffres.

$$31c^{10} \Leftrightarrow (31 \times 31 \times 31 \times 31 \times 31 \times 31 \times 31 \times 31 \times 31 \times 31)c$$

$$\Leftrightarrow [(31 \times 31)(31 \times 31)(31 \times 31)(31 \times 31)(31 \times 31)] \text{ chiffres}$$

$$= [(31+31-1)(31+31-1)(31+31-1)(31+31-1)(31+31-1)]c$$

$$= (61 \times 61 \times 61 \times 61 \times 61) \text{ chiffres.}$$

$$= [(61 \times 61)(61 \times 61) \times 61] \text{ chiffres.}$$

$$= [(61+61-1)(61+61-1) \times 61] \text{ chiffres}$$

$$= (121 \times 121 \times 61) \text{ chiffres.}$$

$$= ((121 \times 121) \times 61) \text{ chiffres}$$

$$= ((121+121-1) \times 61) \text{ chiffres}$$

$$= (241 \times 61) \text{ chiffres}$$

$$= (241+61-1) \text{ chiffres}$$

$$= 301 \text{ chiffres}$$

Pour 31 chiffres à la puissance de 10 on obtient au mimimum 301 chiffres

Donc $2^{1024} \Rightarrow (301 \times 8)$ chiffres

$\Rightarrow (301+8-1)$ chiffres

$\Rightarrow 308$ chiffres.

F_{10} a environ 308 chiffres.

2. $F_0 = 2^{(2^0)}+1$ 2^0 par convention $= 1$

donc $2^{(2^0)} = 2^1$ or $2^1 = 2$

donc $F_0 = 2+1$

$= 3.$

$F_0 = 3$

Annexe : “La copie de Jean-Christophe”

[élève ayant suivi l’option Sciences en 2^{nde} et en $1^{ère}$S au lycée Jean Monnet de 1998 à 2000]

2\. $F_1 = 2^{(2^1)} + 1$

$2^1 = 2$ donc $2^{(2^1)} = 2^2$

or $2^2 = 4$

donc $F_1 = 4 + 1$

$= 5$

$\underline{F_1 = 5}$

$F_2 = 2^{(2^2)} + 1$

$2^2 = 4$ donc $2^{(2^2)} = 2^4$

or $2^4 = 2^2 \times 2^2$

$= 4 \times 4$

$= 4^2 = 16.$

donc $F_2 = 16 + 1$

$= 17.$

$\underline{F_2 = 17}$

$F_3 = 2^{(2^3)} + 1$

$2^3 = 8$ donc $2^{(2^3)} = 2^8$

or $2^8 = 2^4 \times 2^4$

$= 16 \times 16$

$= 256$

donc $F_3 = 256 + 1$ $\quad\quad \underline{F_3 = 257.}$

$= 257$

Annexe : "La copie de Jean-Christophe"

[élève ayant suivi l'option Sciences en 2nde et en 1èreS au lycée Jean Monnet de 1998 à 2000]

$F_4 = 2^{(2^4)} + 1$

$2^4 = 16$ donc $2^{(2^4)} = 2^{16}$

or $2^{16} = 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4$

$= (2^4)^4$

$= 65536.$

donc $F_4 = 65536 + 1$

$= 65537$

$\underline{F_4 = 65537}$

3. $640 = 64 \times 10$

$= 64 \times 2 \times 5$

64 est le carré remarquable de 8 donc

$640 = 8^2 \times 2 \times 5$

or $8 = 2^3$

donc $640 = (2^3)^2 \times 2 \times 5$

$= 2^6 \times 2 \times 5$ car $(a^p)^n = a^{p \times n}$

$= 2^7 \times 5$ car $a^p \times a^n = a^{p+n}$ et que $2 = 2^1$

$\underline{640 = 2^7 \times 5}$

Il sait que dans le nombre de Fermat il y a $2^{(2^n)}$ pour F_n son 2^7 est donc assuré. Il faut qu'il arrive a introduire le 5 pour avoir 640.

Il sait que $f_0 = 2^1 + 1$ il n'y a pas 2^7 dedans

que $f_1 = 2^2 + 1$ il n'y a pas 2^7 dedans

que $f_2 = 2^4 + 1$ il n'y a pas 2^7 dedans

que $f_3 = 2^8 + 1$ soit $2^7 \times \boxed{2} + 1$

que $f_4 = 2^{16} + 1$ soit $2^7 \times 2^7 \times \boxed{2^2} + 1$

et que $f_5 = 2^{32} + 1$ soit $2^7 \times 2^7 \times 2^7 \times 2^7 \times \boxed{2^4} + 1$

Pour introduire 5 ou une puissance de 5 il faut donc décomposé 2.

3. et il veut que $2 = x - 5$
étant donné que x est très proche de
640 et 5 car $5 \times 2^7 = 640$
or $x = 2 + 5 = 7$

il veut alors que $2^2 = x - 5^2$
pour les mêmes raisons (il a 2 fois 2^7
dans son expression or $2^7 \times 5 = 640$
donc il veut 5^2)
or $x = 2^2 + 5^2 = 29$

il veut alors que $2^4 = x - 5^4$
pour les mêmes raisons :
il a donc $x = 2^4 + 5^4$
$= 16 + 625$ $\quad$ $2^4 = 641 - 5^4$
$= 641$

or $641 = 640 + 1$
Donc il garde f_5 en sachant que
$f_5 = 2^7 \times 2^7 \times 2^7 \times 2^7 \times 2^4 + 1$
et que $2^4 = 641 - 5^4$

$f_5 = 2^{32} + 1$

$2^{32} = 2^{28} \times 2^4$ $\quad$ comme $2^4 = 641 - 5^4$

Annexe : "La copie de Jean-Christophe"

[élève ayant suivi l'option Sciences en 2nde et en 1èreS au lycée Jean Monnet de 1998 à 2000]

$2^{32} \Longleftrightarrow 2^{28}(641 - 5^4)$

$\Longleftrightarrow 2^{28} \times 641 - 5^4 \times 2^{28}$

or $5^4 \times 2^{28} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2^7 \times 2^7 \times 2^7 \times 2^7$

$= (5 \times 2^7) \times (5 \times 2^7) \times (5 \times 2^7) \times (5 \times 2^7)$

or $5 \times 2^7 = 640$

donc $5^4 \times 2^{28} = 640^4$

$2^{32} \Longleftrightarrow 641 \times 2^{28} - 640^4$

$640 = 641 - 1$

donc $2^{32} \Longleftrightarrow 641 \times 2^{28} - (641 - 1)^4$

$2^{32} \Longleftrightarrow 641 \times 2^{28} - [(641 - 1)^2 \times (641 - 1)^2]$

$\Longleftrightarrow 641 \times 2^{28} - [(641^2 - 2 \times 641 + 1)(641^2 - 2 \times 641 + 1)]$

$\Longleftrightarrow 641 \times 2^{28} - (641^4 - 2 \times 641^3 + 641^2 - 2 \times 641^3 + 4 \times 641^2 - 2 \times 641$

$+ 641^2 - 2 \times 641 + 1)$

$\Longleftrightarrow 641 \times 2^{28} - 641 \times 641^3 + 641 \times 2 \times 641^2 - 641 \times 641$

$+ 641 \times 2 \times 641^2 - 641 \times 4 \times 641 + 641 \times 2 - 641 \times 641 + 641 \times 2$

$- 1$

$\Longleftrightarrow 641(2^{28} - 641^3 + 2 \times 641^2 - 641 + 2 \times 641^2 - 4 \times 641 + 2$

$- 641 + 2) - 1$

$\Longleftrightarrow 641(2^{28} + 4 - 641(641^2 - 641 \times 2 + 1 - 641 \times 2 + 4 + 1)) - 1$

$\Longleftrightarrow 641[2^{28} + 4 - 641(6 + 641(641 - 4))] - 1$

2^{32} est égale à un multiple de 641 auquel on enlève 1

donc $2^{32} + 1$ est égale à un multiple de 641

$\Longleftrightarrow F_5$ divisible par 641

$\Longleftrightarrow F_5$ non premier.