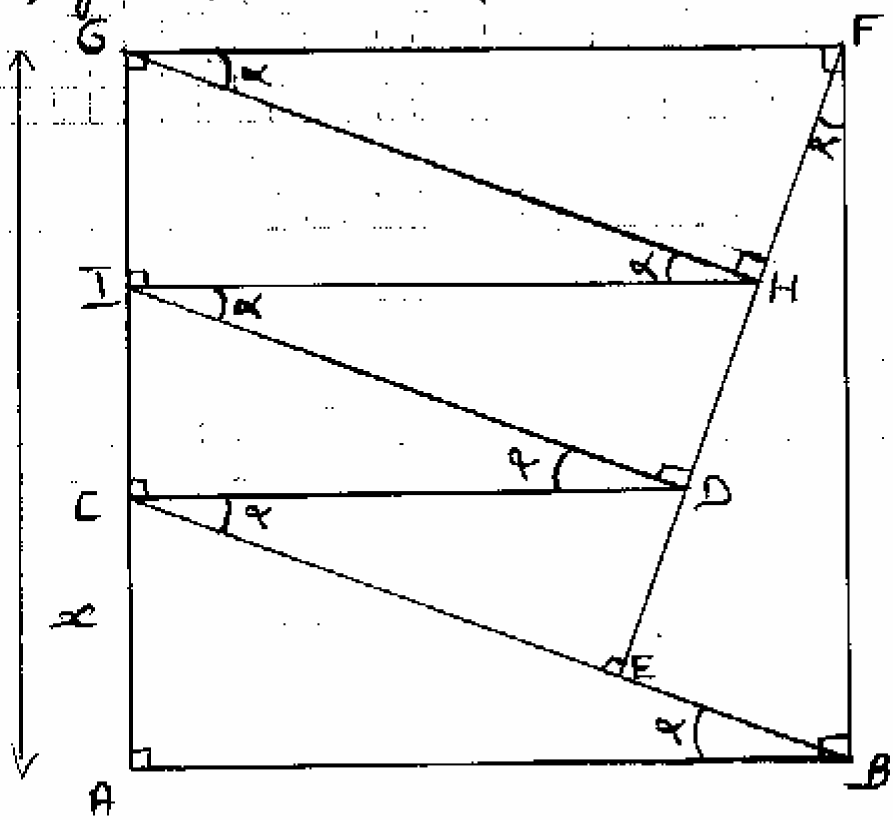
Annexe : "La copie de Geoffroy"

[élève ayant suivi l'option Sciences en 2nde et en 1èreS au lycée Jean Monnet de 1997 à 1999]

Mathématiques option

Commençons par, de l'avis de bien des élèves, un des plus durs : votre fameux CARRÉ BIEN TRIANGULÉ... (musique sinistre)

Petit dessin, afin de placer les suspects,



Procédons d'abord par éliminations. Notre inconnu, x, a laissé quelques indices quant à sa valeur.

Tout d'abord $0 \leq x$ (c'est une longueur)

$x \leq 1$ (sinon il sortirait du carré, et nous l'avons cerné : il ne peut s'échapper)

x est un réel !! Supprimons d'emblée les nombres imaginaires (ou complexes si vous préférez) car c'est une longueur.

Et maintenant, grâce à vous, il ne nous reste plus que 1001 réponses (et oui, au millième près), une broutille par rappor à l'infinité qu'on aurait dû avoir à trouver.

Maintenant, l'angle α. Les triangles étant tous semblables (dans l'énoncé), l'angle α est le même partout (c'est pour ça que vous avez beaucoup vu α). Pour preuve, appliquer le théorème des angles alternes-internes un peu partout... où la loi ne l'interdis pas bien sur.

Et l'angle $\widehat{EFB}$? Non, il n'est pas passé dans les mailles de notre filet, mais il va falloir un peu de mathématiques. La somme des angles aigus d'un triangles rectangle vaut 90°. Donc l'angle $\widehat{GFH}$ vaut $90-\alpha$. L'angle $\widehat{GFB}$ vaut 90°. Donc $\widehat{EFB} = \alpha$. Elementaire, cher Mr Richeton.

Attaquons au problème lui-même. C'est un gros morceau, lançons l'assaut par petit feu.

Les tireurs d'élites :

$$(1)\ \tan\alpha = x = \frac{FH}{GH} = \frac{GI}{HI} = \frac{HD}{ID} = \frac{IC}{DC} = \frac{DE}{CE} = \frac{BE}{FE}$$

Et maintenant... CHARGER ! !!

D'après Pythagore (un de nos meilleurs indics), dans le triangle GHF rectangle en H

$$GH^2 + HF^2 = GF^2 = 1$$

D'après (1) $GH^2 + x^2 GH^2 = 1$ (produit en croix avec (1))

D'où $\boxed{GH^2 = \frac{1}{1+x^2}}$

D'après le même Pythagore, dans le triangle GIH rectangle en I $GH^2 = GI^2 + IH^2$

D'après les ① (waah! L'humour!) $HI^2x^2 + HI^2 = \frac{1}{1+x^2}$

$$HI^2(1+x^2) = \frac{1}{1+x^2}$$

D'où $\underline{\underline{HI^2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}}}$

Mais c'est aussi, d'après ①

$$GI^2 + \frac{GI^2}{x^2} = \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)GI^2$$

D'où $GI^2 = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

Grâce à Pythagore. Encore lui... Dis donc, vous êtes sûr qu'il n'a pas de lien avec Archimède? (Archimède faisait souvent joujou avec les balances)

Bon revenons. Grâce à Pythagore, dans le triangle IDH rectangle en D

$$IH^2 = ID^2 + DH^2$$
$$= ID^2(1+x^2)$$

D'où $\underline{\underline{ID^2 = \frac{1}{(1+x^2)^3}}}$

D'après Devinez-qui? (allez, je vous le dis: Pythagore), dans le triangle ICD rectangle en C

$$ID^2 = IC^2 + CD^2$$
$$= DC^2(1+x^2)$$

D'où $DC^2 = \frac{1}{(1+x^2)^4}$ (carrément inutile : c'est un leurre pour tromper l'ennemi)

Mais aussi $IC^2 \left(\frac{x+1}{x^2}\right)$

D'où $IC^2 = \frac{x^2}{(1+x^2)^4}$

Phase finale

$AG = AC + CI + IG = 1 = x + \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{1+x^2}$

D'où $(1+x^2)^2 = x(1+x^2)^2 + x(1+x^2) + x$

soit $\boxed{x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0}$

La manière dont on a effectué l'opération doit demeuré secret. (En vérité, nous n'avons jamais appris comment resoudre une équation du cinquième degré, c'est grace à la calculatrice que j'y suis arrivé)

Après élimination des nombres qui ne correspondent pas à la description du coupable, on trouve

$x = 0{,}379$ (au millième près)

Satisfait général? L'opération s'est déroulé sans perte apparente, vous nous direz si c'est le cas au briefing!