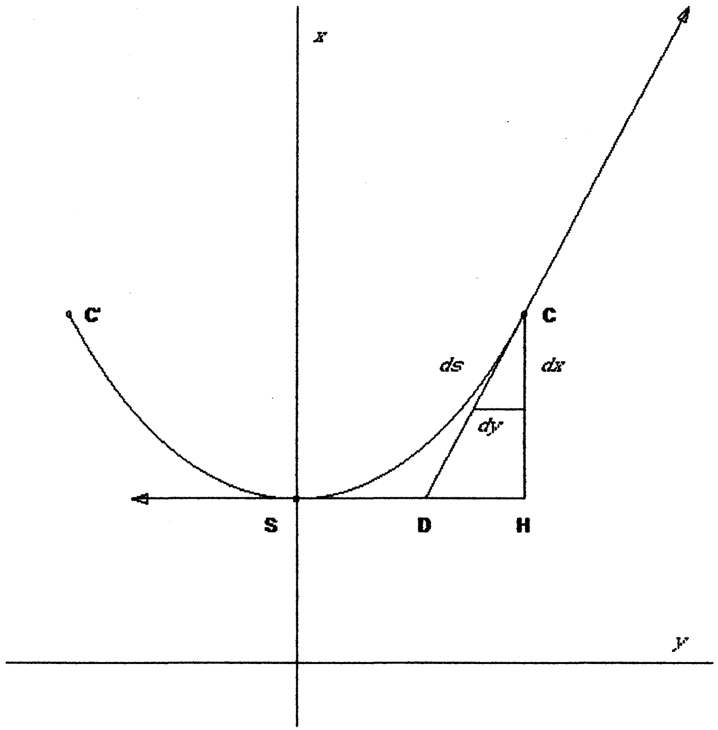
La résolution du problème de la chaînette par Leibniz

(à partir de l'analyse donnée par Jean de Bernouilli
dans " lectiones calculi intégrali ")

<u>Attention</u> : *Pour rester fidèle au texte de Leibniz, dans la figure ci-dessous, les axes sont permutés par rapport à l'usage actuel. Par contre les deux vecteurs représentant les tensions du fil sont destinés à la compréhension du problème, mais ne figurent pas dans l'original.*



1/ Le problème de statique :

La portion SC du fil est soumise à trois forces

- la tension du fil en S, d'intensité a et dirigée par la tangente en S
- la tension du fil en C, d'intensité T et dirigée par la tangente en C
- le poids du fil, d'intensité $\mu\, s$ et dirigé par verticale descendante (non représenté sur la figure, où μ est densité linéique du fil et s la longueur du fil entre S et C).

On prendra, par commodité, comme l'indique Leibniz, les unités de telle sorte que $\mu = 1$.

En projections horizontale et verticale l'équilibre se traduit par :

$$a = T \times \cos(\widehat{CDH}) \qquad \text{et} \qquad s = T \times \sin(\widehat{CDH})$$

On en déduit : $\dfrac{s}{a} = \tan(\widehat{CDH}) = \dfrac{CH}{DH}$.

2/ L'équation différentielle de la chaînette :

Leibniz tire de l'étude précédente la relation :

$$\frac{s}{a} = \frac{dx}{dy} \ (1) \quad \text{qui "traitée avec adresse" se réduit à} \quad dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \ (2).$$

Le "traitement avec adresse", que ni Leibniz, ni Bernouilli ne détaillent, est laissé à l'initiative du lecteur et devait ressembler à ceci :

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ (Pythagore appliqué au triangle rectangle curviligne infinitésimal)

$$\frac{a^2}{s^2} = \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{ds^2 - dx^2}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1 \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 + s^2}{s^2} \quad (3).$$

Il est raisonnable de ne s'intéresser qu'à la branche SC du fil, puisque l'autre branche est symétrique. Dans ces conditions la longueur s est une fonction croissante de x et la relation (3) se ramène à : $\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}$ qui par intégration donne : $x = \sqrt{a^2 + s^2}$ puis $s^2 = x^2 - a^2$, dont le report dans (1) fournit l'équation différentielle de la chaînette : $dy = \dfrac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

3/ L'équation cartésienne de la chaînette :

De la relation (5) on tire : $ds = \dfrac{2\,x\,dx}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{x\,dx}{s}$ (5')

Puis à l'aide de (1) et de (5') on a : $\dfrac{dy}{a} = \dfrac{dx}{s} = \dfrac{ds}{x} = \dfrac{d(x+s)}{x+s}$

(la dernière égalité résultant de $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \implies \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$) ce qui permet de conclure :

$$y = a \ln(x + s) + K$$

La constante K s'obtient par la condition : $y = 0$ pour $s = 0$ (qui correspond d'après (5) à $x = a$).

Leibniz suggère de prendre $a = 1$, donc la constante K est nulle, ce qui donne, pour les points de la courbe SC la relation : $y = \ln(x + s)$ que l'on peut encore écrire : $x + s = e^y$.

Comme $(x-s)(x+s) = x^2 + s^2 = a^2 = 1$, on a :

$$-y = -\ln(x+s) = \ln\left(\frac{1}{x+s}\right) = \ln(x-s), \qquad \text{donc} \qquad x - s = e^{-y}.$$

Ainsi, la courbe donnant le profil de la portion SC du fil a pour équation : $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$.

4/ La construction de la chaînette :

Une fois construite la "logarithmique" (terme employé par Leibniz pour désigner notre exponentielle) la chaînette s'obtient par la construction suivante :

"pour obtenir le point d'abscisse y de la chaînette, projeter sur l'axe vertical les deux points d'abscisses y et $-y$ de la logarithmique, puis prendre le milieu du segment de ces deux points ; son ordonnée x est l'ordonnée du point de la chaînette d'abscisse y.

Pour le tracé de la logarithmique, Leibniz se donne un nombre $k > 1$, et construit les points $S(0,1)$, $A(1,k)$, $A'\left(-1, \frac{1}{k}\right)$, puis pour $p \leq n$ les points $A_p(p, k^p)$ et $A'_p(-p, \frac{1}{k^p})$.

Pour avoir un tracé plus précis, on peut intercaler entre S et A un point $B(\frac{1}{2}, \sqrt{k})$ et le point $B'(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{k}})$ entre S et A' et compléter par $B_p(\frac{p}{2}, \sqrt{k}^{\,p})$ et $B'_p(-\frac{p}{2}, \frac{1}{\sqrt{k}^{\,p}})$.

Le Problème de la *Courbe Funiculaire* ou *Chaînette* présente un double intérêt, premièrement celui d'étendre l'art d'inventer, autrement dit l'Analyse [20], jusqu'à présent incapable d'aborder convenablement de telles questions, deuxièmement celui de faire progresser la technique des constructions. Je me suis aperçu en effet que la fécondité de cette courbe n'a d'égale que la facilité de sa réalisation, ce qui la met en tête de toutes les Transcendantes. De fait, nous pouvons l'obtenir et la tracer à peu de frais, par une *construction de type physique*, en laissant pendre un fil ou mieux une *chaînette* (de longueur invariable). Et dès que nous disposons, grâce à elle, de son tracé, nous pouvons faire apparaître toutes les moyennes proportionnelles et tous les Logarithmes que nous pouvons souhaiter, ainsi que la Quadrature de l'Hyperbole. *Galilée* fut le premier à y réfléchir, mais sans parvenir à en découvrir la nature : contrairement à ses conjectures, il ne s'agit pas en effet de la *Parabole*. *Joachim Jung*, éminent Philosophe et Mathématicien de ce siècle qui, bien avant *Descartes* avait eu de nombreuses et lumineuses idées pour la réforme des sciences, se lança dans les calculs, fit des expériences, et disqualifia la parabole, mais sans lui substituer la véritable courbe [21]. Depuis lors beaucoup s'étaient attaqués à cette question, mais personne ne l'avait résolue, jusqu'à ce que récemment un Mathématicien très savant me donne l'occasion de la traiter. En effet le célèbre *Bernoulli*, après avoir dans différents problèmes employé avec succès cette Analyse des infinis, s'exprimant par le calcul différentiel, que j'ai contribué à introduire, m'a demandé publiquement dans les Acta de Mai de l'année dernière, p. 218 et suivantes, d'examiner, en en faisant l'épreuve, si notre calcul pouvait s'étendre à un problème comme celui de la détermination de la Chaînette. Ayant tenté l'expérience pour lui faire plaisir, non seulement je parvins au résultat en étant, si je ne m'abuse, le premier à résoudre ce célèbre problème, mais je notai de surcroît les remarquables applications de la courbe ; voilà pourquoi, à l'exemple entre autres de *Blaise Pascal*, j'ai convié les Mathématiciens à le chercher à leur tour, dans un délai convenu, pour mettre leurs Méthodes à l'épreuve, et voir à quoi aboutiraient ceux qui éventuellement en emploieraient d'autres que celle dont *Bernoulli* et moi-même usons. Deux seulement firent savoir dans les délais qu'ils avaient réussi, *Christian Huygens*, il est inutile d'insister sur ses grands mérites envers la République des Lettres, et *Bernoulli* lui-même, en collaboration avec son jeune frère, dont l'intelligence n'a d'égale que l'érudition ; la contribution de Bernoulli fait apparaître qu'il n'est aucune brillante trouvaille qu'on ne puisse encore attendre de lui. Je juge donc qu'il a de facto prouvé, comme je l'avais annoncé, que notre méthode de calcul s'étend bien jusque là et ouvre désormais la voie aux problèmes réputés autrefois les plus redoutables. Mais il m'appartient d'exposer mes propres résultats ; on verra à quoi ont abouti les autres en se reportant à leurs solutions.

MENSIS JUNII A. M DC XCI. 277

DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos. Autore G. G. L.

PRoblema *Lineæ Catenariæ vel Funicularis* duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione fili vel potius *catenulæ* (quæ extensionem non mutat) nullo negotio parari & describi potest, *physico* quodam *construction is genere*. Et ope ejus ubi semel descripta est, exhiberi possunt quotcunq; mediæ proportionales, & Logarithmi, & Quadratura Hyperbolæ. Primus *Galilæus* de ea cogitavit, sed naturam ejus assecutus non est: neq; enim Parabola est, ut ipse erat suspicatus, *Joachimus Jungius*, eximius nostri seculi Philosophus & Mathematicus, qui multa ante *Cartesium* præclara cogitata habue-

Leibniz, extraits de Acta Eruditorum - 1961

Voici une *construction Géométrique de la courbe*, sans l'aide d'aucun fil ni d'aucune chaînette, et sans présupposer aucune quadrature, construction qu'on doit à mon sens juger la plus parfaite qu'on puisse obtenir pour les Transcendantes et la plus conforme à l'Analyse. Soient deux segments quelconques ayant entre eux un rapport déterminé invariable, représenté ici par D et K, dès qu'on connaît le rapport de ces deux segments tout le reste en découle par simple application de la Géométrie ordinaire.

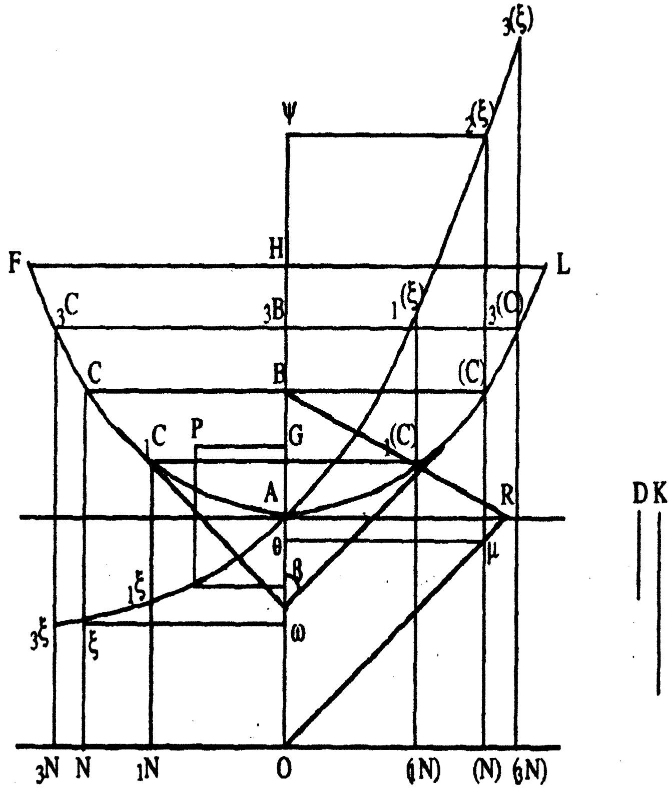


figure 26

Figure extraite de la traduction française de l'article paru dans Acta Eruditorum en 1691

On pourra observer que, sur la figure ci-dessus, le nombre k est donné par la proportion entre les deux segments notés D et K.