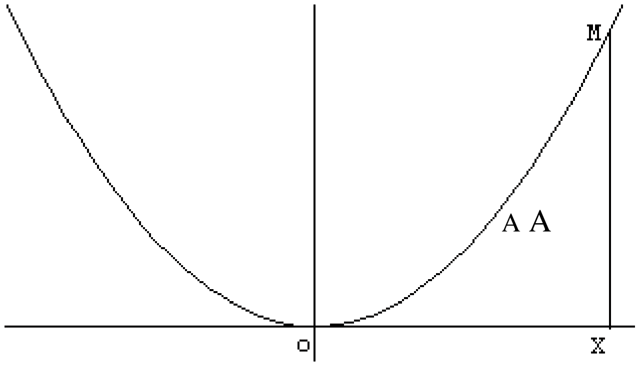
La quadrature de la parabole



Problème : on considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$, et on appelle Π la parabole qui la représente dans un repère orthonormé.
x étant un réel quelconque, quelle est l'aire A du domaine limité par la courbe Π, l'axe des abscisses et la droite verticale d'abscisse x. ?

1°) Méthode d'Archimède (2e siècle avant JC) : la géométrie

En utilisant les propriétés géométriques de la parabole, Archimède a démontré le théorème suivant :

le secteur de parabole compris entre deux points M et N a pour aire les $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle MON,

O désignant le point de la parabole où la tangente est parallèle à (MN).

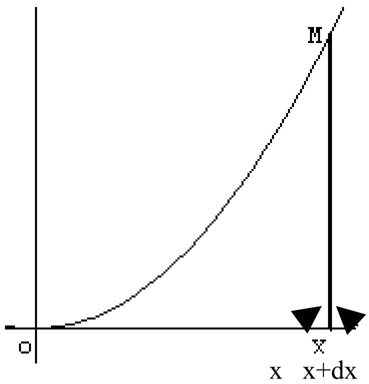
•Quelle réponse peut-on en déduire pour le problème posé ?
(on pourra appeler N le point symétrique de M par rapport à Oy)
Méthode très ingénieuse, mais qui n'est pas généralisable à d'autres fonctions.

2°) Méthode de Leibniz (fin du 17e siècle) : le calcul infinitésimal

Leibniz, reprenant une idée de Pascal, découpe le domaine en tranches verticales d'épaisseur *infinitésimale*. La tranche située à l'abscisse x a pour épaisseur dx et pour hauteur f(x), donc pour aire le produit f(x)dx. L'aire cherchée A s'obtient en faisant *intégralement* la *somme* de toutes ces aires, ce que Leibniz écrit

$$A = \int f(x)dx \cdot$$

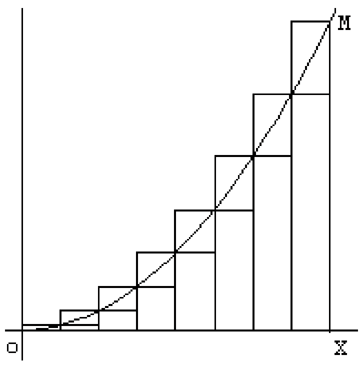
Mais comment calculer cette *somme intégrale*, qui comporte une infinité de termes infiniment petits ?
Leibniz remarque que si x augmente d'un accroissement infinitésimal dx, l'aire A augmente de $dA = f(x)dx$.
Autrement dit, $\frac{dA}{dx} = f(x)$.



•En notant A = F(x), traduire en écriture moderne la propriété ci-dessus.
•En remarquant que F(0) est connu, en déduire l'expression de F(x).
Méthode très puissante car généralisable à d'autres fonctions, mais qui pose une difficulté logique : qu'est-ce qu'une quantité infinitésimale ?

3°) Méthode de Riemann (19 e siècle) : le passage à la limite

Riemann reprend l'idée de découpage en tranches verticales, mais refuse la notion de quantités infiniment petites. Il découpe le domaine en un nombre *fini* n de tranches verticales.
Chaque tranche a une aire comprise entre l'aire de deux rectangles : un rectangle intérieur et un rectangle extérieur. Donc l'aire A est comprise entre l'aire totale S_n des rectangles intérieurs, et l'aire totale S'_n des rectangles extérieurs.
Pour calculer A, il suffit alors de faire tendre n vers l'infini : les deux suites (S_n) et (S'_n) doivent tendre toutes les deux vers A.



•Calculer S_n et S'_n (on rappelle que $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

•En déduire A.
Méthode que Riemann généralise à d'autres fonctions, permettant non seulement une justification théorique de la méthode de Leibniz, mais aussi une définition précise de l'aire d'un domaine curviligne.