# Inégalité de Jung

Nous nous proposons de prouver les deux résultats suivants :

▪ pour toute partie bornée $E$ d'un espace affine euclidien de dimension $k$, il existe parmi les boules fermées contenant $E$ une boule unique de rayon minimal, dite boule minimale de $E$, notée $\mathcal{B}(E)$ et dont le rayon $R(E)$ sera dit rayon de $E$ ;

▪ ce rayon est lié au diamètre $d(E)$ par les inégalités

$$\frac{1}{2}\ d(\mathcal{E}) \ \leq\ R(\mathcal{E}) \ \leq\ \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}\ d(\mathcal{E}) \qquad \textbf{(I)}$$

*1. On peut se limiter au cas où E est compact*

Soit $\overline{E}$ l'adhérence de $E$. Puisque $E$ est borné, $\overline{E}$ est compact. Mais $E$ et $\overline{E}$ ont même diamètre ; en effet, la fonction $(m, p) \to mp$ de $\overline{E} \times \overline{E}$ dans $\mathbf{R}$, continue sur le compact $\overline{E} \times \overline{E}$, y a un maximum, atteint pour $(M, P)$. Mais $M$ et $P$ peuvent être approchés à $\varepsilon$ près par des points $M'$ et $P'$ de $E$, ce qui prouve que $d(\overline{E}) \leq d(E) + 2\,\varepsilon$ et finalement que $d(\overline{E}) \leq d(E)$. L'inégalité en sens inverse découle trivialement de $E \subset \overline{E}$.

D'autre part, toute boule fermée contenant $\overline{E}$ contient évidemment $E$ ; mais une boule fermée contenant $E$ contient son adhérence $\overline{E}$. Donc $E$ et $\overline{E}$ ont même boule minimale et même rayon… sous réserve de leur existence.

On peut donc sans scrupule remplacer $E$ par $\overline{E}$ dans notre étude, autrement dit nous limiter aux compacts, ce que nous ferons désormais.

*2. existence et unicité d'une boule de rayon minimal contenant E*

Étant donné un compact $E$, à tout point $M$ de l'espace on associe $r(M)$, borne supérieure de la distance $MP$ lorsque $P$ décrit $E$.

La fonction $r$ est continue : pour tout couple de points $A, B$ de l'espace, on a en effet $|r(A) - r(B)| \leq AB$.

Montrons-le. De $PA \leq PB + AB$ on tire $PA \leq r(B) + AB$, puis en faisant varier $P$ dans $E$ et en passant au sup, $r(A) \leq r(B) + AB$ ; en intervertissant les rôles de $A$ et $B$, on a aussi $r(B) \leq r(A) + AB$, d'où le résultat annoncé.

La fonction continue $r$ tend vers l'infini à l'infini ; elle a donc un minimum $R$, atteint au moins une fois, ce qui prouve l'existence d'une boule minimale.

Supposons que ce minimum soit atteint deux fois, en $A$ et $B$. Soit $P$ un point de $E$ ; si $I$ est le milieu de $AB$, de $PA^2 + PB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2\,PI^2$ on tire $2\,R^2 \geq \frac{1}{2}AB^2 + 2\,PI^2$, d'où $(\forall P \in E)\quad PI^2 < R^2 - \frac{1}{2}AB^2$ et finalement $r(I) < R$, ce qui est contradictoire.

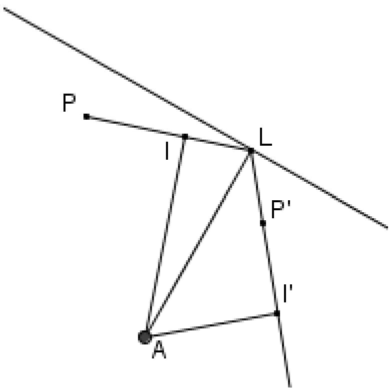
Le centre de la boule minimale $\mathcal{B}(E)$ sera dit centre de $E$, la sphère $\mathcal{S}(E)$ qui la limite sera dite sphère minimale de $E$. Observons que $\mathcal{S}(E) \cap E$ est non vide, sinon $\mathcal{B}(E)$ ne serait pas minimale.

*3. Le centre de $E$ appartient à l'enveloppe convexe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{S}(E) \cap E$*

L'enveloppe convexe d'un compact étant un compact, $\mathcal{K}$ est compact.

Nous utiliserons un théorème de « séparation » : *Si un point $A$ est situé hors d'un compact convexe $\mathcal{K}$, il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{K}$ soit tout entier dans un des deux demi-espaces fermés définis par $\mathcal{H}$ et $A$ dans son complémentaire.*

Démontrons-le. Quand un point $M$ décrit $\mathcal{K}$, la distance $AM$, fonction continue, présente un minimum en un point $L$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan orthogonal en $L$ à $[AL]$ ; supposons qu'un point $P$ de $\mathcal{K}$ soit dans le demi-espace ouvert contenant $A$.




Raisonnons dans le plan $ALP$ (ou un plan contenant $A$, $L$ et $P$ si les trois points sont alignés) en désignant par $I$ la projection orthogonale de $A$ sur la droite $(LP)$. L'angle $\widehat{PLA}$ étant aigu, $I$ est situé sur la demi-droite [LP). Deux cas sont possibles, selon que $I$ est ou non entre $L$ et $P$ (voir figure).

Dans le premier cas, $I$ étant sur le segment $[LP]$ joignant deux points de $\mathcal{K}$, il est dans $\mathcal{K}$, mais il est plus proche de $A$ que $L$, ce qui est contraire à la définition de $L$. Dans le second cas, $P$ est entre $L$ et $I$, donc il est plus proche de $A$ que $L$, ce qui est là encore contraire à la définition de $L$.

Si maintenant on appelle $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $[AH]$ orienté de $A$ vers $H$, il en résulte immédiatement que pour tout point $M$ de $\mathcal{K}$ on a $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} > 0$.

Prenons maintenant pour $\mathcal{K}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}(E) \cap E$, et fixons un point $A$ hors de $\mathcal{K}$. Il existe d'après ce qui précède un vecteur unitaire tel que pour tout point $M$ de $\mathcal{K}$ on ait $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} > 0$.

*Nous allons montrer que, si l'on prend $\lambda$ positif assez petit, le point $B = A + \lambda\,\vec{u}$ vérifiera $r(B) < r(A)$, ce qui prouvera que $A$ n'est pas le centre de $E$.*

Fixons un point $M$ dans $E$. On a :

$$BM^2 - r^2(A) = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})^2 - r^2(A) = \lambda^2 - 2\,\lambda\,\vec{u}.\overrightarrow{AM} + AM^2 - r^2(A).$$

Considérons cette expression comme un trinôme en $\lambda$ :

- ou le terme constant est nul (ce qui correspond à $M \in \mathcal{S} \cap E$) et, comme alors $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} > 0$, la racine non nulle $2\,\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM}$ est strictement positive.
- ou le terme constant est strictement négatif ($M$ est dans $E$, mais pas dans $\mathcal{S} \cap E$) et le trinôme a deux racines non nulles de signe contraire.

La plus grande racine, $\xi(M) = \vec{u}.\overrightarrow{AM} + \sqrt{(\vec{u}.\overrightarrow{AM})^2 + r^2(A) - AM^2}$, est donc dans les deux cas strictement positive. $\xi(M)$ est, d'après son écriture même, une fonction continue strictement positive de $M$ sur le compact $E$. Elle a par suite sur $E$ un minimum $\mu$ strictement positif.

Si donc nous choisissons un $\lambda$ tel que $0 < \lambda < \mu$, le trinôme ci-dessus est strictement négatif pour tout $M$ de $E$.

Pour le point $B$ correspondant, on a ainsi, pour tout $M$ de $E$, $BM^2 - r^2(A) < 0$. De $BM < r(A)$ pour tout $M$ de $E$, on tire, par passage au maximum sur le compact $E$, $r(B) < r(A)$.

Ainsi aucun point situé hors de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S} \cap E$ n'est le centre de $E$.

## 4. *Inégalité de Jung*

L'inégalité $R(E) \geq d(E)/2$ est triviale. Reste à chercher une inégalité en sens inverse.

Nous utiliserons le théorème de Caratheodory (voir démonstration en annexe) : en dimension $k$, l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{P}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $k+1$ points de $\mathcal{P}$ (distincts ou non).

▪ Soit $\Omega$ le centre de $E$. Nous venons de voir qu'il est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{S} \cap E$, donc il existe $k+1$ points $M_j$ de $\mathcal{S} \cap E$ et $k+1$ scalaires positifs ou nuls $\alpha_j$ tels que $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \overrightarrow{\Omega M_j} = \vec{0}$. Le diamètre $D$ de $E$ est au moins égal à la plus grande des distances $M_i M_j$. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_j}$ étant tous de norme $R$, on pose $\overrightarrow{\Omega M_j} = R\,\vec{v}_j$. On a pour tout couple $(i, j)$, avec $i \neq j$ :

$$D^2 \geq (M_i M_j)^2 = R^2 (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 = 2R^2 (1 - \vec{v}_i . \vec{v}_j) ,$$

d'où , $\beta$ désignant le plus petit des $\vec{v}_i . \vec{v}_j$ :

$$D^2 \geq 2 R^2 (1 - \beta) .$$

▪ Cherchons maintenant une majoration de $\beta$. De $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = 0$,

on tire $$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2 + 2 \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \vec{v}_i . \vec{v}_j = 0 ,$$

puis $$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2 + 2\beta \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \leq 0 ,$$

soit encore $$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2 + \beta ((\sum_{j=0}^{k} \alpha_j)^2 - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2) \leq 0$$

et enfin $$(1-\beta) \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2 + \beta (\sum_{j=0}^{k} \alpha_j)^2 \leq 0 ,$$

ce qui prouve par parenthèse que $\beta < 0$.

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $R^{k+1}$ : $(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j)^2 \leq (k+1) \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2$. Il vient $(1-\beta) + \beta (k+1) \leq 0$, soit $\beta \leq -\dfrac{1}{k}$.

▪ En reportant dans $D^2 \geq 2 R^2 (1-\beta)$, on arrive à $D^2 \geq 2 R^2 (1 + \dfrac{1}{k})$,

$$\boxed{R \leq D \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}} \qquad \text{(inégalité de Jung)}$$

**Remarque** : Si l'on prend pour $E$ un ensemble de $k+1$ points formant un simplexe régulier (c'est-à-dire en dimension $k$ l'analogue de ce qu'est le tétraèdre régulier en dimension 3), les $\alpha_j$ sont tous égaux, et les $\vec{v}_i . \vec{v}_j$ sont tous égaux. Toutes les égalités du raisonnement ci-dessus deviennent des égalités, et l'inégalité de Jung devient une égalité. Le coefficient $\sqrt{\dfrac{k}{2(k+1)}}$ ne peut donc pas être amélioré.

## *Annexe : démonstration du théorème de Caratheodory*

*Ce théorème découle aisément du fait que l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de familles de points de $\mathcal{P}$ (distincts ou non).*

Soit $M$ le barycentre de $h$ points $A_i$ de $\mathcal{P}$ : $\sum_{i=0}^{h} \gamma_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$, où l'on suppose les $\gamma_i$ strictement positifs. Si $h > k+1$, les vecteurs $\overrightarrow{MA_i}$ sont liés par au moins une autre relation : $\sum_{i=0}^{h} \mu_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$, les $\mu_i$ n'étant pas proportionnels aux $\gamma_i$. On peut supposer, au besoin en renumérotant les points et en changeant tous les signes, que l'on a $\mu_1 > 0$. Pour tout scalaire $\rho$, on a évidemment $\sum_{i=0}^{h} (\gamma_i - \rho\mu_i) \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$. La fonction $\rho \to \min_i (\gamma_i - \rho\mu_i)$ est affine par morceaux, donc continue. Elle est strictement positive pour $\rho = 0$ et tend vers $-\infty$ quand $\rho$ tend vers $+\infty$, car elle est majorée par $\gamma_1 - \rho\mu_1$. Elle s'annule donc en au moins un point $\rho_0$. La relation $\sum_{i=0}^{h} (\gamma_i - \rho_0\mu_i) \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$ est à coefficients positifs ou nuls, mais elle a au moins un coefficient nul (et tous ne sont pas nuls sinon les $\mu_i$ seraient proportionnels aux $\gamma_i$). $M$ est donc le barycentre à coefficients positifs de $h-1$ points $A_i$ de $\mathcal{P}$ au plus.

Le raisonnement peut être recommencé tant que le nombre de points $A_i$ est strictement supérieur à $k+1$, ce qui démontre le théorème.