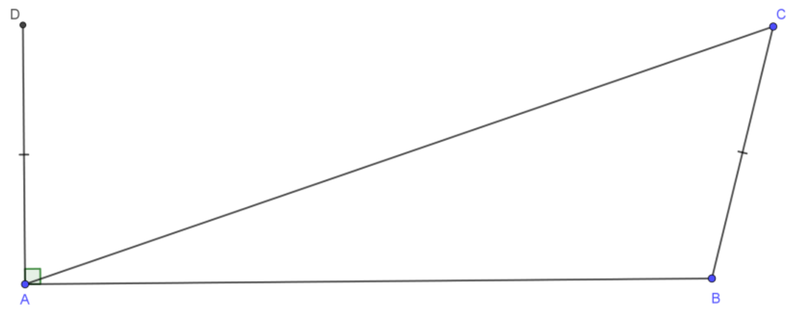
Georg Cantor : *« Je le vois, mais je ne le crois pas. »*[1]

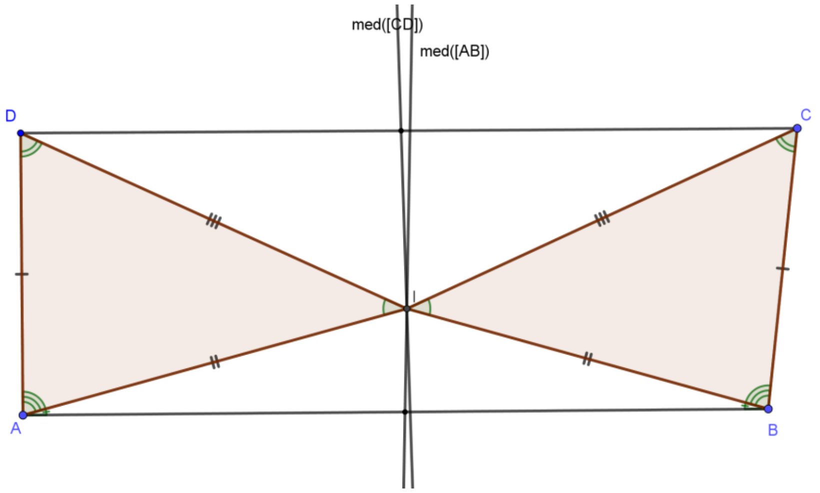
[1] Il écrit cela à Dedekind, lorsqu'il découvre à sa grande surprise que l'on peut mettre en bijection la droite et le plan (il y « autant » de points dans un segment que dans un carré)

Tout triangle est rectangle.

Construction.
ABC est un triangle quelconque
D est un point de la droite perpendiculaire à (AB) passant par A, tel que AD = BC



1^{er} cas. Les médiatrices de [AB] et de [CD] sont sécantes en un point I



• IA = IB et IC = ID car I est équidistant de A et de B et I est équidistant de C et de D
De plus AD = BC

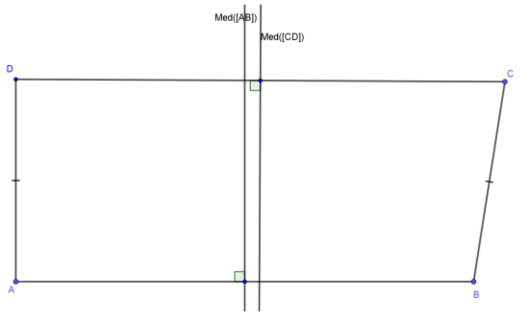
• Les triangles IAD et IBC ont des côtes égaux deux à deux donc sont isométriques, alors leurs angles aux sommets sont égaux deux à deux, en particulier $\widehat{\mathrm{DAI}} = \widehat{\mathrm{IBC}}$

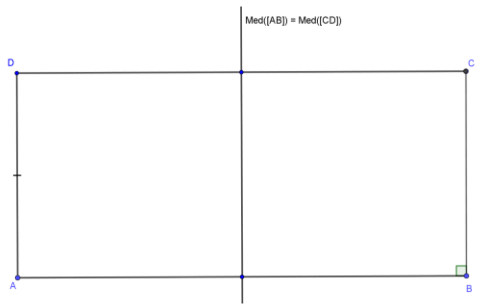
• IAB est isocèle et a pour sommet principal I, donc $\widehat{\mathrm{IAB}} = \widehat{\mathrm{ABI}}$

• $\widehat{\mathrm{DAI}} + \widehat{\mathrm{IAB}} = \widehat{\mathrm{IBC}} + \widehat{\mathrm{ABI}}$ donc $\widehat{\mathrm{DAB}} = \widehat{\mathrm{ABC}}$, ce qui prouve que $\widehat{\mathrm{ABC}} = 90°$

ABC est rectangle en B

$2^{ème}$ cas. Les médiatrices de [AB] et de [CD] sont parallèles





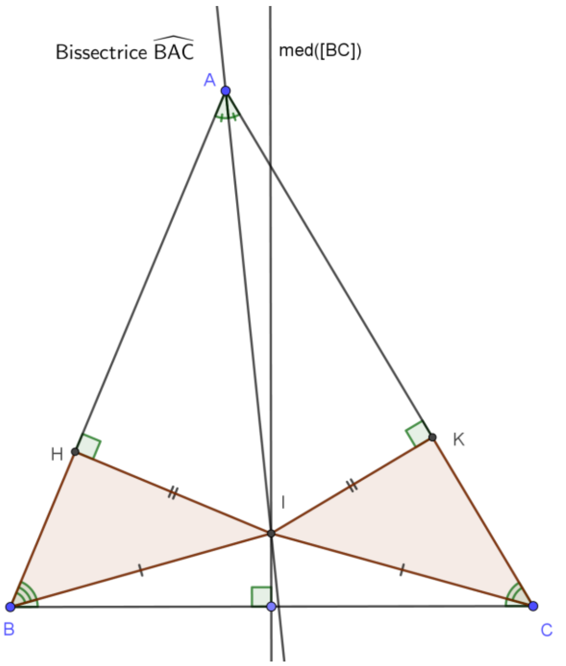
• Alors (AB) // (CD)
• ABCD est un trapèze rectangle en A et en D et isocèle puisque AD = BC
• Ceci n'est possible que si ABCD est un rectangle, donc **ABC est rectangle en B**

Tout triangle est isocèle.

Construction.

ABC est un triangle quelconque

1er cas. La bissectrice issue de A et la médiatrice de [BC] sont sécantes en un point I.

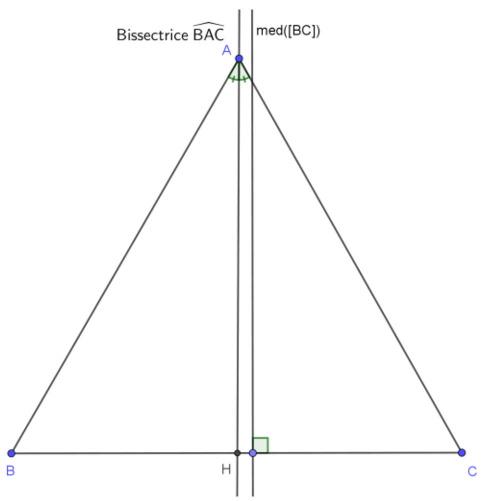


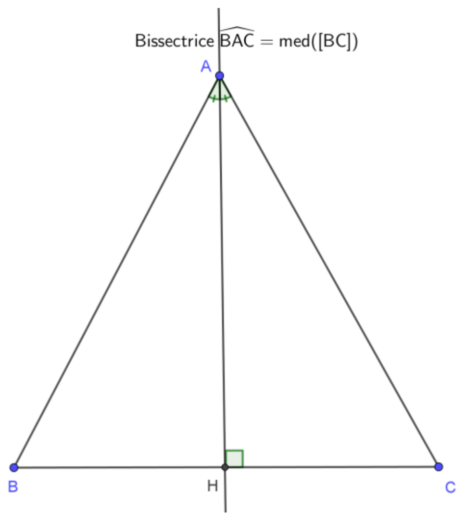
H est le projeté orthogonal de I sur (AB) et J est le projeté orthogonal de I sur (AC)

- IH = IK car I appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$
- IB = IC car I appartient à la médiatrice de [BC]
- IHB et IHK sont deux triangles rectangles ayant deux côtes égaux deux à deux, donc ils sont isométriques alors leurs angles aux sommets sont égaux deux à deux, en particulier $\widehat{HBI} = \widehat{KCI}$
- IBC est isocèle et a pour sommet principal I, donc $\widehat{IBC} = \widehat{ICB}$
- $\widehat{HBI} + \widehat{IBC} = \widehat{KCI} + \widehat{ICB}$ donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, ce qui prouve que :

ABC est un triangle isocèle

2ème cas. La bissectrice issue de A et la médiatrice de [BC] sont parallèles.





- La bissectrice issue de A est perpendiculaire à (BC) et c'est la hauteur issue de A
- Puisque la bissectrice et la hauteur issues de A sont confondues, alors elles sont confondues avec la médiatrice de [BC] et **le triangle ABC est isocèle**

136,5 = 136

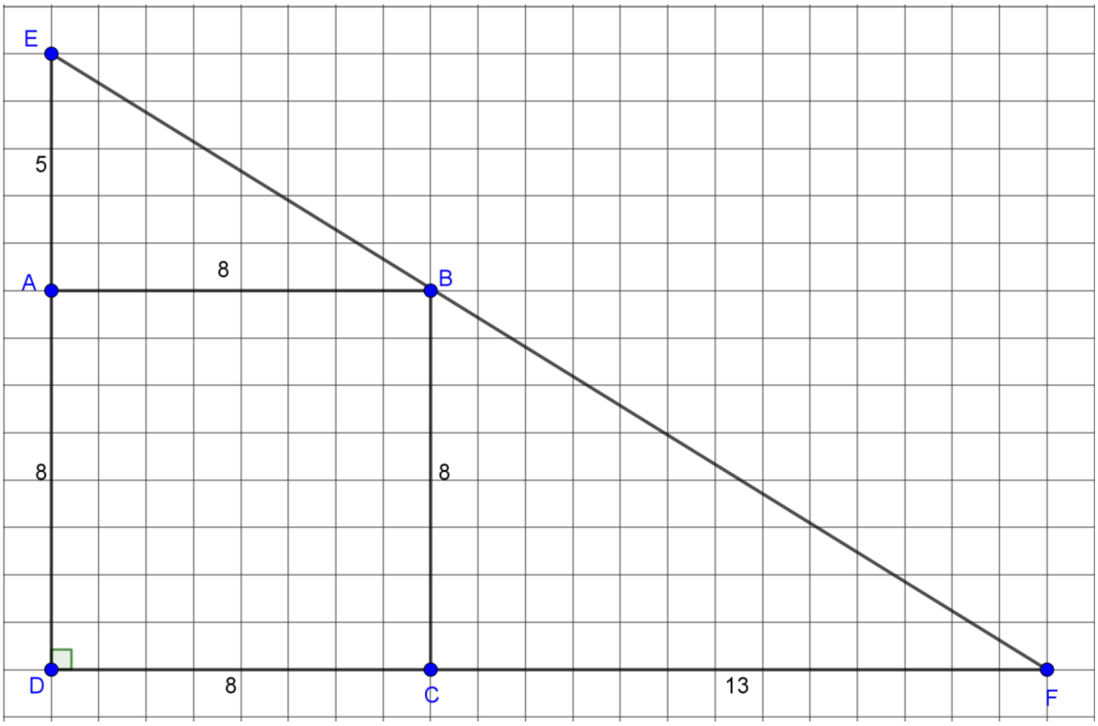
Construction.

EDF est un triangle rectangle en D tel que ED = 13 et DF = 21

A est un point du segment [ED] tel que EA = 8

C est un point du segment [DF] tel que DC = 8

ABCD est un carré



.

• L'aire du triangle EDF est : $\frac{\mathrm{ED}\times\mathrm{DF}}{2} = \frac{13\times21}{2} = \frac{273}{2} = 136{,}5$

• Ce triangle peut être décomposé en 3 morceaux : le triangle EAB, le triangle BCF et le carré ABCD

L'aire du triangle EAB est : $\frac{\mathrm{EA}\times\mathrm{AB}}{2} = \frac{5\times8}{2} = 20$

L'aire du triangle BCF est : $\frac{\mathrm{BC}\times\mathrm{CF}}{2} = \frac{8\times13}{2} = 52$

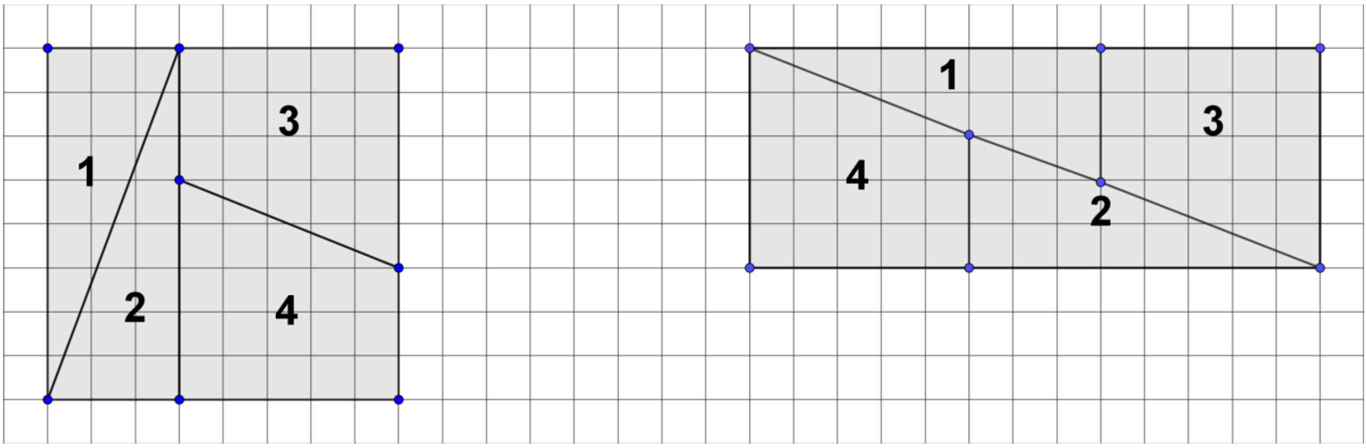
L'aire du carré ABCD est : $\mathrm{AB}\times\mathrm{AD} = 8\times8 = 64$

Le triangle EDF a donc pour aire : 20 + 52 + 64 = 136, ce qui prouve que

136,5 = 136

64 = 65

Puzzle à 4 pièces.

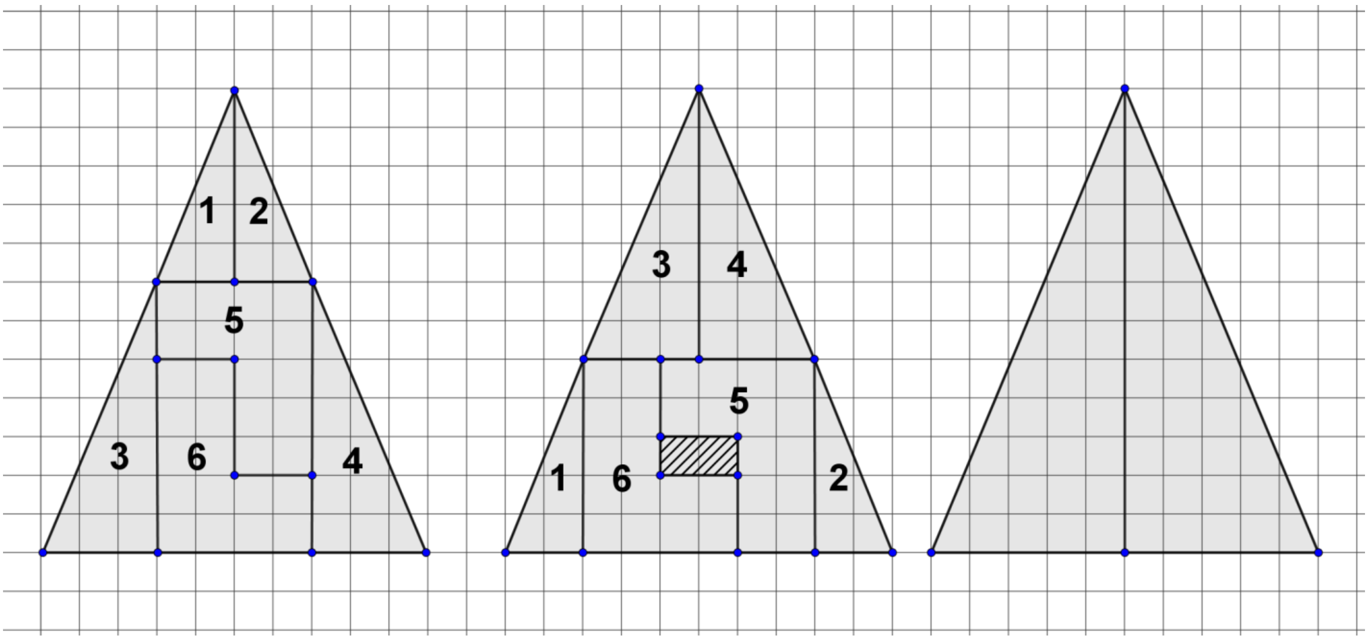


Aire : 8 × 8 = 64 Aire : 13 × 5 = 65

Il s’agit des mêmes pièces, on conclut : **64 = 65**

Triangle de Curry : 59 = 60 = 61

Puzzle à 6 pièces.



Aire = 59 **Aire = 61** **Aire = 60**

Calculs des aires.

$a_1 + a_2 = 2 \times 5 = 10$, $a_3 + a_4 = 3 \times 7 = 21$, $a_5 + a_6 = 4 \times 7 = 28$ et $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 10 + 21 + 28 = 59$

Le triangle complet a pour base 10 et pour hauteur 12 donc son aire est : $\frac{10\times 12}{2} = 60$

Il s’agit des mêmes pièces, on conclut : **59 = 60 = 61**

Paul Curry (1917-1986) était le vice président de la Blue Cross Insurance Company de New York et un célèbre magicien amateur

Pour d’autres puzzles ou énigmes, on peut consulter les dictionnaire des mathématiques récréatives : récréomath
http://www.recreomath.qc.ca/dict_curry_triangle.htm

$\boldsymbol{n\ (n \geq 2)}$ droites du plan, sécantes deux à deux sont concourantes.

Preuve par récurrence sur l'entier n.

• Initialisation. $n = 2$

Deux droites sécantes ont un unique point commun donc sont concourantes en ce point.

• Hérédité.

Soit un entier $n \geq 2$, supposons que la propriété est vraie pour tout entier k , $2 \leq k \leq n$

Considérons un ensemble de $n + 1$ droites deux à deux sécantes : $d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1}$

$d_1, d_2, \dots, d_n$ forment un ensemble de n droites deux à deux sécantes donc, par hypothèse de récurrence, sont concourantes en un point I

$d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_{n+1}$forment un ensemble de n droites deux à deux sécantes donc, par hypothèse de récurrence, sont concourantes en un point J

I et J sont des points appartenant aux droites $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ et ces droites ne peuvent pas avoir deux points communs distincts puisqu'elles ne sont pas confondues donc les points I et J sont confondus

Alors ce point I appartient aux droites $d_1, d_2, \dots, d_n$ et aux droites $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_{n+1}$ donc aux droites

$d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n, d_{n+1}$ ce qui prouve que ces $n + 1$ droites sont concourantes.

La propriété est donc vérifiée pour l'entier $n + 1$ donc pour tout entier k , $2 \leq k \leq n + 1$

• Conclusion. $\boldsymbol{n\ (n \geq 2)}$ **droites sécantes deux à deux sont concourantes.**

3 = 0

VOYONS, VOYONS NOUS EN ÉTIONS RESTÉES À RÉSOUDRE L'ÉQUATION
$x^2+x+1=0$ C'EST BIEN ÇA MADAME POUSSIN ?
OUI C'EST ÇA
JE M'SOUVIENS MAINTENANT MAM' LAMPION.
ON DIRAIT MÊME QU'EN L'ÉCRIVANT DIFFÉREMMENT C'EST L'ÉQUATION $x^2+x=-1$ HEIN ?
HÉ BEN OUI... ET COMME 0 N'EST PAS SOLUTION DE L'ÉQUATION N'EST CE PAS MAM' POUSSIN C'EST PAREIL DE LA RÉSOUDRE DANS IR*
JE NE VOUS LE FAIS PAS DIRE
TOUT EN VOUS FAISANT REMARQUER QU'À CE MOMENT LÀ C'EST AUSSI L'ÉQUATION $x^3+x^2+x=0$
C'EST JUSTE CE QUE VOUS DITES DE MÊME QUE...
COMME JE DISAIS TOUT À L'HEURE AVEC $x^2+x=-1$
ON EST RAMENÉ À RÉSOUDRE L'ÉQUATION $x^3-1=0$
MAIS DITES MOI, MAM' POUSSIN J'AI MÊME ENTENDU DIRE QUE CETTE ÉQUATION A UNE UNIQUE SOLUTION $x=1$
EXACTEMENT
DONC EN REVENANT À NOTRE ÉQUATION $x^2+x+1=0$
ÇA NOUS DONNE $1+1+1=0$ C'EST À DIRE $3=0$
OUI
3 = 0 ?!?!
VOUS SAVEZ MAM' LAMPION FAUT PLUS S'ÉTONNER DE RIEN AUJOURD'HUI. TOUT FOUT LE CAMP !
MAIS C'EST BIEN SÛR AVEC TOUT CE QU'I NOUS BALANCE DANS LE COSMOS Y'NOUS DÉTRAQUENT TOUT.