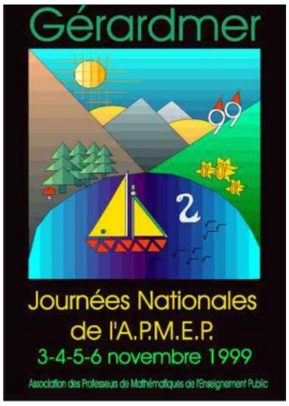

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier VA29
CALCULATRICE ET CALCUL FORMEL

Bernard PARISSE[1]

Dans cet atelier, on a fait manipuler des calculatrices HP49G aux participants. Dans un premier temps, les participants ont été familiarisés avec l'éditeur d'équations (touche `EQW`) puis ils ont pu tester l'utilisation de la calculatrice pour faire les calculs de l'exercice 1 du bac 99, extrait du livre " Calcul formel et mathématiques avec la HP49 ", de Renée de Graeve.

C'est ce que nous présentons dans ce compte-rendu.

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe Γ décrite par *M* d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$, lorsque *m* d'affixe *z* décrit le cercle *C* de centre O et de rayon 1.

Soit *t* un réel de [-π ; π] et *m* le point de C d'affixe $z = e^{i.t}$.

1. Calcul des coordonnées de *M* :

On entre tout d'abord l'expression $\frac{1}{2}z^2 - z$ à l'aide de `EQW`.

On tape : `EQW alpha Z` y^x `2 ▷ ÷ 2 ▷ - alpha Z ENTER`

L'expression est alors dans la ligne de commande et on la stocke dans la variable M :

`STO ▷ M`

Puisque $z = e^{i.t}$ on tape : `SUBST(M,Z = EXP(i×t))`

La réponse est : $\dfrac{\mathrm{EXP}(i.t)^2 - 2.\mathrm{EXP}(i.t)}{2}$

On linéarise ensuite l'expression, on utilise l'historique pour recopier l'expression précédente :

---

[1] bernard.parisse@ujf-grenoble.fr

LIN(HIST ENTER) ENTER

La réponse est : $\frac{1}{2}$.EXP(2.i.t) + − 1.EXP(i.t)

A noter, qu'en recopiant l'expression, on la simplifie : △ ENTER ENTER

donne : $\dfrac{\text{EXP}(2.i.t) - 2.\text{EXP}(i.t)}{2}$

On cherche maintenant la partie réelle de cette expression : RE(HIST ENTER) ENTER

la réponse est : $\dfrac{\cos(t.2) - 2.\cos(t)}{2}$

On définit alors la fonction $x(t)$, on tape :

DEFINE (X(t) = HIST ENTER) ENTER

On cherche ensuite la partie imaginaire (il faut remonter dans l'historique pour retrouver l'expression $\dfrac{\text{EXP}(2.i.t) - 2.\text{EXP}(i.t)}{2}$)

on tape : IM(HIST △ △ △ △ ENTER) ENTER

la réponse est : $\dfrac{\text{SIN}(t.2) - 2.\text{SIN}(t)}{2}$

On définit alors la fonction $y(t)$, on tape :

DEFINE(Y(t) = HIST ENTER)ENTER

2. On cherche un axe de symétrie de Γ , pour cela on calcule $x(-t)$ et $y(-t)$ en tapant :

X(-t) ENTER

la réponse est : $\dfrac{\text{COS}(t.2) - 2.\text{COS}(t)}{2}$

On a donc : $x(-t) = x(t)$

puis : Y(-t) ENTER

la réponse est : $\dfrac{-\text{SIN}(t.2) + 2.\text{SIN}(t)}{2}$

On a donc : $y(-t) = -y(t)$

Si $M_1(x(t), y(t))$ est sur Γ , $M_2(x(-t), y(-t))$ est aussi sur Γ .

On vient de monter que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à Ox, donc on en déduit que l'axe Ox est un axe de symétrie de Γ.

3. Calcul de $x'(t)$:

On tape : `DERIV(X(t),t)`

la réponse est : $\frac{2.(-2.\mathrm{SIN}(t.2)) - 2.(-\mathrm{SIN}(t))}{4}$

$$\frac{2.(-2.\mathrm{SIN}(t.2)) - 2.(-\mathrm{SIN}(t))}{4}$$

après simplification (△ ENTER ENTER): `-(SIN(t.2) - SIN(t))`

On développe l'expression (transformation de `SIN(2.t)`), on tape :

`TEXPAND(HIST ENTER) ENTER`

la réponse est : `-(SIN(t).2.COS(t)- SIN(t))`

puis on factorise : `FACTOR(HIST ENTER) ENTER`

la réponse est : `-SIN(t).(2.COS(t)- 1)`

On peut alors définir la fonction $x'(t)$, on tape :

`DEFINE(X1(t) = HIST ENTER) ENTER`

4. Calcul de $y'(t)$:

On tape : `DERIV(Y(t),t)`

la réponse est : $\frac{2.(2.\mathrm{COS}(t.2)) - 2.\mathrm{COS}(t)}{4}$

après simplification (△ ENTER ENTER): `COS(t.2) - COS(t)`

On développe l'expression (transformation de `COS(2.t)`), on tape :

`TEXPAND( HIST ENTER) ENTER`

la réponse est : `2.(COS(t))`^{2} `- 1 - COS(t)`

puis on factorise : `FACTOR( HIST ENTER) ENTER`

la réponse est : `(COS(t - 1).(2.COS(t) + 1)`

On peut alors défiir la fonction $y'(t)$, on tape :

`DEFINE(Y1(t) = HIST ENTER) ENTER`

5. Variations de $x(t)$ et de $y(t)$

Pour cela on trace sur le même graphique $x(t)$ et $y(t)$, on tape :

`shift-bleu F4 (2D/3D(` : la fenêtre `PLOT SETUP` s'ouvre.

On choisit comme type `function` à l'aide de `choos` du bandeau.

Puis on entre : `{X(t),Y(t)}`

comme équation `EQ`, puis `t` comme paramètre indépendant, puis `ENTER`.

Ensuite on tape : `shift-bleu F2 (WIN(` , pour régler les paramètres de la fenêtre.

6. Tracé de la courbe Γ :

Valeurs de $x(t)$ et de $y(t)$.

On trouve les valeurs de $x(t)$ et de $y(t)$ pour $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ en tapant successivement :

`X(0) ENTER` (réponse $\frac{-1}{2}$)

`X(π /3) ENTER` (réponse $\frac{-3}{4}$)

`X(2xπ /3) ENTER` (réponse $\frac{1}{4}$)

`X(π ) ENTER` (réponse $\frac{3}{2}$)

`Y(0)` `ENTER` (réponse 0)

`Y(π /3)` `ENTER` (réponse $\frac{-\sqrt{3}}{4}$)

`Y(2xπ /3)` `ENTER` (réponse $\frac{-3.\sqrt{3}}{4}$)

`Y(π)` `ENTER` (réponse 0)

Pente des tangentes ($m = \frac{y'(t)}{x'(t)}$)

On trouve les valeurs de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ pour $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ en tapant successivement :

`LIMIT(Y1(t)/X1(t),t=0)` `ENTER` (réponse : 0)

`LIMIT(Y1(t)/X1(t),t=π /3)` `ENTER` (réponse : ∞)

`LIMIT(Y1(t)/X1(t),t=2xπ /3)` `ENTER` (réponse : 0)

`LIMIT(Y1(t)/X1(t),t=π )` `ENTER` (réponse : ∞)

Voici les variations de $x(t)$ et de $y(t)$:

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	-	0	+	?	+	0
$x(t)$	$\frac{-1}{2}$	↘	$\frac{-3}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	0	↘	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{-3.\sqrt{3}}{4}$	↗	0
$y'(t)$	0	-	?	-	0	+	?
m	0		∞		0		∞

Courbe Γ :

On fait ensuite le tracé de la courbe en paramétrique.

On tape :

`shift-bleu F4 (2D/3D(` et la fenêtre `PLOT SETUP` s'ouvre.

On choisit comme type `parametric`, à l'aide de `choos` du bandeau.

Puis on entre `X(t) + iXY(t)`

comme équation `EQ` , puis `t` comme paramètre `independant`, puis `ENTER`.

Ensuite on tape `shift-bleu F2 (WIN(` pour régler les paramètres de la fenêtre

Les participants ont tous testé l'exercice (au moins en partie) sur les HP49 fournies. On peut donc conclure qu'une bonne heure suffit à se familiariser avec les principales commandes d'une calculatrice formelle.