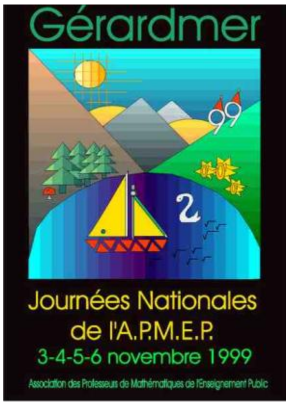

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier VA24
VOIR AVEC CABRI II
LES POINTS CYCLIQUES ET LES DROITES ISOTROPES

Roger CUPPENS[1]

1. Étude classique.

Dans l'enseignement actuel de la géométrie où le “ tout analytique ” sévit, on peut introduire les points cycliques de la manière suivante :
Soit *c* un cercle de centre O. Dans un système orthonormé d'origine O, l'équation de c est

$$x^2 + y^2 = r^2$$

En “ homogénéisant ”, on a

$$x^2 + y^2 = r^2t^2$$

et en faisant t = 0, on obtient l’équation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

On en déduit que les points d’intersection du cercle *c* et de la droite de l’infini sont les points d’intersection de la droite de l’infini avec les deux droites d’équation $x = iy$ et $x = -iy$ appelées droites isotropes du point O. Les points ainsi obtenus sont les points cycliques.

Tout ceci est formellement parfait, mais laisse en suspens (au moins) deux questions :
1) peut-on donner du sens à ce calcul ?
2) quelles sont les propriétés de ces nouveaux objets ?
Une seule vient immédiatement à l'esprit : puisque i2 = -1, on peut dire qu’une droite isotrope est orthogonales à elle-même. Mais quelle sens donner à cette propriété : l'angle d'une droite avec elle-même peut-il être à la fois droit et nul ?

2. Les idées de Chasles

Nous avons montré dans une brochure de l'APMEP comment l'utilisation de Cabri et un retour aux idées de Poncelet et de Chasles permettrait un renouvèlement de l'enseignement de la géométrie analogue à celui obtenu par ces illustres mathématiciens dans la recherche en “ géométrie pure ”. Nous résumons ici ce qui concerne les points cycliques et les droites isotropes.

En particulier, Chasles a remarqué que, dans une conception constructive de la géométrie, les éléments imaginaires ne s'introduisent que pour les problèmes de l'intersection d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles (ce dernier se ramenant au précédent).
Si *d* est une droite et *c* un cercle de centre O, les points d'intersection A et B de *d* et de *c* ont pour milieu la projection H du point O sur la droite *d* et vérifient

$$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = p_c(H)$$

[1] roger.cuppens@wanadoo.fr

p(H) étant la puissance du point H par rapport au cercle c. Lorsque H est à l'extérieur du cercle c, ceci définit deux points imaginaires conjugués A et B que nous représentons par le segment [A′B′] de milieu H et tel que

$$\overline{HA'} \cdot \overline{HB'} = -p_c(H).$$

En ce qui concerne les points cycliques et les droites isotropes, si A et B sont les points d'intersection de la droite de l'infini avec un cercle c et si S est un point du cercle c, les droites (SA) et (SB) sont les droites fixes dans une rotation de centre S et d'angle quelconque α. On en déduit immédiatement que les points A et B ne dépendent pas du cercle c, ce qui permet de définir les points cycliques.
Si $\alpha = \pi/2$, on retrouve le fait que les droites isotropes sont orthogonales avec elles-mêmes, mais il est tout aussi exacte de dire qu'elle font un angle quelconque avec elles-mêmes !

On obtient de plus facilement la caractérisation suivante : si A et B sont deux points imaginaires conjugués d'une droite d représentés par le segment [A′B′] et si S est un point en dehors de la droite d, alors les droites (SA) et (SB) sont les droites isotropes du point S si et seulement si le triangle SA′B′ est rectangle isocèle en S.

3. Homologues d'un cercle

On peut aussi vérifier cette dernière propriété en utilisant une transformation appelée homologie :
Soient S un point et u une droite ne passant pas par le point S. Une application f du plan (projectif) dans lui-même est une homologie de centre S et d'axe u si elle vérifie les conditions suivantes :
a) l'image par f d'une droite est une droite,
b) la droite joignant un point M à son image M′ = f(M) passe par le point S,
c) le point d'intersection d'une droite d et de son image d′ = f(d) se trouve sur la droite u.
On peut montrer que ces conditions sont équivalentes à la condition b) et au fait que le birapport (S,m,M,M′) est indépendant du point M, m étant le point d'intersection de la droite (SM) avec la droite u.

La droite de l'infini est donc l'homologue d'une droite i parallèle à la droite u et appelée droite focale source et a pour homologue une droite j¢ parallèle à la droite u et appelée droite focale image.

Puisqu'une homologie conserve le birapport de quatre points alignés et le degré des courbes algébriques, l'homologue d'un cercle est une conique. Nous nous intéressons ici au cas où le centre de l'homologie est le centre du cercle.
Pour ceci, soient c un cercle de centre S, u une droite ne passant pas par le point S, R l'un des points d'intersection du cercle c avec la droite x passant par le point S et perpendiculaire à la droite u et R′ un autre point de la droite x. Notons γ le transformé du cercle c dans l'homologie de centre S, d'axe u et qui transforme R en R′. Si P et Q sont les points d'intersection (imaginaires) de la conique et de la droite focale image j', ces points sont représentés par un segment [P′Q′], on vérifie que le triangle SP′Q′ est rectangle isocèle.
En effet, les points P et Q sont les homologues des points cycliques et les droites (SP) et (SQ) sont globalement invariantes dans l'homologie.

On peut aller plus loin en montrant que la conique a pour foyer le point S et pour directrice associée la droite focale j', l'excentricité étant égale au rapport r/d du rayon r du cercle c à la distance d du point S à la droite focale source.

Puisque la directrice est la polaire du foyer par rapport à la conique et puisque les droites (réelles ou imaginaires) joignant un point aux points d'intersection de sa polaire avec la conique sont les tangentes issues de ce point, on obtient que les tangentes à la conique γ issues du foyer S sont les droites isotropes passant par le point S.

On peut rattacher ce résultat à la notion de droites conjuguées par rapport à une conique et plus simplement au résultat classique suivant :
Si γ est une conique de foyer S et de directrice d et si T est le point d'intersection de la tangente à la conique γ en un point P avec la directrice, les droites (SP) et (ST) sont perpendiculaires.

En conclusion, cette étude (dont on peut trouver un exposé beaucoup plus complet dans le dernier numéro de la revue de l'IREM et de la Régionale APMEP de Toulouse, Le fil d'Ariane) montre toute la richesse des idées de Chasles pour comprendre la géométrie projective et toute la puissance de Cabri pour trouver les propriétés d’une figure.