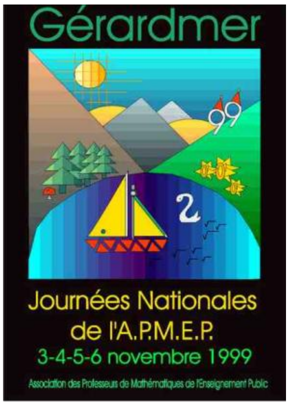


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier VA15
UNE OPTION SCIENTIFIQUE EN 2nde ET EN 1ère S… POURQUOI ?

Jean-Pierre Richeton[1]

Motivations

En proposant cet atelier, mon but était surtout de montrer (et je ne le cache pas, convaincre…) les collègues présents de la nécessité d'une telle option, actuellement défendue et soutenue au niveau national aussi bien par l'APMEP que l'UDP (**U**nion des **P**rofesseurs de **P**hysique). En effet :

Que constate-t-on post-bac..?

Dans le supérieur ''on'' reproche souvent à nos élèves de manquer d'autonomie, d'être incapables le plus souvent de résoudre un problème s'il n'est pas balisé de *a* à *z*… comme en témoignent ces réactions[2] :

- " *Ils n'ont en général pas compris ce qu'est une démarche scientifique : anticiper, expliquer et comprendre, être rigoureux et contrôler, sont des notions qui leur sont profondément étrangères* "
- " *Le rôle des problèmes comme motivations et raisons d'introduire des idées générales a été transformé en un bricolage sans objectifs et sans bilan théorique (les ''activités'')* "
- " *Il y a quasi-unanimité pour considérer qu'au lycée, l'enseignement se borne à l'apprentissage d'exercices types, ceux qui sortiront au BAC. Le but des élèves devient de ''savoir résoudre'' (et non de ''comprendre'')* ".

De même, les enquêtes annuelles menées par l'UPS (Union des Professeurs de Spéciales) montrent que la majorité des ''professeurs de prépa'' déplore régulièrement chez les élèves entrés en classe PCSI ou MPSI (étudiants issus du baccalauréat S) :

- un manque dans l'acquisition des méthodes de travail (apprendre et mémoriser un cours est chose souvent difficile et comprendre un énoncé ne va pas de soi),
- une lenteur générale des étudiants pour effectuer un travail autonome quand ce n'est pas carrément un manque d'autonomie,
- un manque de maîtrise dans le calcul, même élémentaire (simplification des expressions algébriques, calculs sur les exposants, ignorance de la plupart des formules de

[1] jpricheton.apmep@wanadoo.fr
[2] Gazette des mathématiciens n°69 - juillet 1996

trigonométrie, ce que certains attribuent au formulaire du baccalauréat contesté à la quasi-unanimité, …),
- un manque de maitrise et de rigueur dans les raisonnements.

Certains de ces collègues reconnaissent cependant qu'il est parfois difficile de respecter les contenus du programmes et qu'ils n'hésitent pas à le contourner pour avoir un cours plus " ramassé " qui ***laisse davantage de temps pour la pratique d'exercices et de problèmes…***

Pourtant… que préconisent nos programmes actuels ?

À ce stade il n'est peut-être pas inutile en effet de rappeler quelques extraits des ''**objectifs essentiels**'' communs à toutes les séries qui figurent dans les programmes actuels :

> " *Entrainer les élèves à l'**activité scientifique** et promouvoir l'**acquisition de méthodes** : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de **découverte**, **d'exploitation de situations**, de **réflexion** et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de **synthèse** dégageant clairement **quelques** idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée...* ",

Comment ne pas y souscrire et souhaiter que cela reste dans les futurs programmes ?

Plus loin, ces mêmes programmes nous apportent un autre élément de réponse à cette première question du ''*pourquoi*'' en donnant par le détail **les huit moments de l'activité mathématique**, à savoir :

> *" Formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence au regard du problème posé. "*

Mais en même temps, il faut bien reconnaitre que, dans ces même programmes, des commentaires comme : " *... des indications doivent être données sur la méthode à suivre.* " ou encore "*... toutes les indications utiles doivent être fournies.* " incitent bien souvent les professeurs à proposer aux élèves des exercices répétitifs sur des thèmes bien ciblés à l'avance... confortés en cela par les sujets du bac qui encore trop souvent *guident les élèves à l'excès*.

On peut certes comprendre que les élèves bénéficient d'indications leur permettant de ne pas rester ''*bloqués*'' ou leur permettant de pallier une erreur éventuelle aux répercussions disproportionnées un jour d'examen, mais comment cependant ne pas regretter la formulation de certains sujets, qui contiennent la réponse à certaines questions ainsi que ***la*** (?) méthode à utiliser... de tels énoncés d'examens peuvent être ressentis par une partie de nos élèves comme une véritable ''*insulte à leur intelligence*''... tandis que d'autres, ''*escrocs malgré eux*'', seront tentés de ''*bricoler*'' de vagues raisonnements en paraphrasant des énoncés où figure le résultat cherché... Il suffit pour s'en persuader d'ouvrir au hasard des annales de bac…

Alors, il faut bien se poser la question : " où est la formation à ''*la capacité à mettre en œuvre une démarche*'' ? et est-ce là la formation du citoyen tant prônée ? "

Afin de tenter de répondre aux critiques amont et aval du baccalauréat, dans et hors de l'institution, et dans l'espoir de voir effectivement évoluer les pratiques dans le sens souhaité par les objectifs de nos programmes, une commission baccalauréat de mathématiques, présidée par le Doyen de l'Inspection Générale de mathématiques Paul Attali, s'est certes mise ne place. Mais en attendant que ses travaux produisent les effets escomptés, et en complément il nous a semblé indispensable d'aller au-delà… Est-il en effet acceptable que d'un côté les élèves se voient proposer des enseignements complémentaires de détermination vers à peu près toutes les voies de formation (littéraire, artistique, technologique…) alors que de l’autre, les élèves ayant un projet scientifique n’ont aucune possibilité de l’affiner par une option spécifique, et que par ailleurs ceux qui ne sont pas encore complètement déterminés n’ont aucun enseignement scientifique de détermination leur permettant un choix raisonné ?

D’où l’idée en mai 1997, au lycée Jean Monnet de Strasbourg, de créer une ‘‘*option scientifique*’’, encouragés et imités depuis par quelques uns dans d’autres académies.

S’appuyant sur cette expérience, l’APMEP a depuis demandé au Ministre de l’Éducation nationale que, dans tous les établissements, s’ouvre aux élèves intéressés par les sciences une “ ***option Sciences*** ” en Seconde incluant mathématiques et sciences expérimentales et qui aurait comme but d’aider les élèves à se déterminer face aux sciences, de favoriser une bonne insertion en classe de premières scientifiques (ES, S, STI, STL...), tout en développant une ouverture plus large au monde scientifique.

L'option scientifique au lycée Jean Monnet de Strasbourg

Historique et projet de départ : voir annexe A.

Mise en place en 1997/1998 : voir annexe B.

Que sont-ils devenus ?

Sur les 30 élèves inscrits en 2nde en ''*option scientifique*'' en 1997/1998 :

- 6 élèves ont abandonné l'option à la fin de la 2nde (20%). Aujourd'hui, ils sont tous les 6 en Terminale :
  - 1 en T S spécialité math
  - 1 en T ES spécialité math
  - 3 en T L spécialité math
  - 1 en T STT compta-gestion
- 1 élève a redoublé sa 2nde mais a continué l'option scientifique. Il est maintenant en 1ère S et suit toujours cette option (c'est donc sa 3ème année) et, notamment en mathématiques, cela lui a beaucoup apporté (il ''venait de loin'' et se trouvait perdu pratiquement devant chaque énoncé la première année…).
- 23 élèves ont poursuivi l'option en 1ère S et sont maintenant en T S dont 10 en spécialité math.

Comme vous pouvez le voir, cette classe de 2nde ''*option scientifique*'', crée en 97/98, ne peut donc être taxée d'élitiste : tous n'ont pas rallié la soi-disant " voie royale " (la série S) sans compter qu'en 1ère S le choix de la spécialité s'est fait en meilleure connaissance de cause. Enfin cette année encore un redoublant en 2nde s'est réinscrit en option scientifique…
D'autre part chaque année on accepte que des élèves puissent suivre l'option scientifique de 1ère S sans avoir suivi l'option en 2nde. Voilà de quoi rassurer les uns et les autres : non il n'est pas nécessaire de suivre l'option pour faire 1ère S (la grande majorité de nos élèves en TS cette année n'ont pas suivi l'option scientifique), non il n'est pas nécessaire de l'avoir suivie en 2nde pour la suivre en 1ère S … et oui on accepte des redoublants lorsqu'ils sont motivés pour les sciences.
Comparez maintenant avec les sections d'élite des grands lycées où tous vont en S (même pour les littéraires, les ''très bons'' bien sûr…), dans la même classe de la 2nde à la terminale, sauf en cas de redoublement où l'on doit alors quitter cette classe d'élite, etc.…avec pour but affiché d'aller en prépa (scientifique ou littéraire) pour la quasi-totalité des élèves ! ! !

Qu'y fait-on en mathématiques ?

↳ *Pour mieux se rendre compte du type de travail effectué, les participants ont été invités à ''plancher'' sur des exercices donnés dans le cadre de cette option* (**annexe 1**) *puis à exposer le fruit de leur recherche*[3]….

↳ Pour s'en faire une petite idée, voir en **annexe 2** une productions d'un élève de 1ère (Geoffroy) et en **annexe 3** un compte rendu de recherche.

Comme en attestent ces documents, les élèves aiment chercher, inventer... à condition de **leur accorder du temps** pour les mettre dans un situation de véritable recherche… ils peuvent

[3] Voir en **annexe 4**, des solutions envoyées par courrier par l'un des collègues présent à cet atelier.

alors nous dévoiler toutes leurs qualités : initiative, créativité, imagination, etc. ce qui explique que depuis sa création, cette option rencontre effectivement un franc succès.

La ‘‘copie de Geoffroy’’ atteste également que nos élèves sont capables d'efforts et ont davantage de volonté que l'on veut bien leur accorder. Cependant ces qualités ne sont pas toujours visibles avec notre système actuel d'évaluation. Une copie vide ne signifie pas nécessairement que l'élève n'a rien fait... il a peut-être beaucoup cherché et parfois de façon très sensée mais n'a rien jugé de valide, à ses yeux, à rédiger. D'où l'intérêt précisément de **les entrainer à laisser des traces de leur recherche**… D'où l'importance aussi d'encourager un élève en valorisant ses démarches, surtout s'il ne réussit pas à résoudre complètement un problème. Le sentiment d'échec est souvent écrasant pour qui n'est jamais en situation de réussite. Ainsi, les élèves ayant pris l'habitude, voire le plaisir, de *sécher* et **d'exposer les diverses étapes de leur démarche**, un autre intérêt sera de les libérer de *la peur de la copie vide.* En effet, la partie la plus facile est sans conteste la première phase consistant à chercher, voire à sécher, puis à conjecturer… le plus difficile étant ensuite d'amener les élèves à communiquer le fruit de leur recherche.

Quels types d'exercices proposer ?

Nos sujets de bac, mais également de devoirs et d'interrogations, à l'image de la plupart des exercices proposés dans nos manuels scolaires[4], sont remplis d' ‘‘exercices à tiroirs’’… il faut bien reconnaitre en effet que l'on en reste trop souvent au stade des :

a) *Montrer que…*

b) *Montrer que…*

c) *En déduire que…*

d) *En utilisant ... conclure que…*

Sans vouloir à tout prix bannir ce type d'exercices de notre enseignement, ne doit-on pas envisager un autre ‘‘*scénario*’’ plus formateur car permettant d'apprendre à nos élèves à bâtir des stratégies de résolution de problèmes comme cela nous est officiellement demandé ?

Osons alors donner des exercices sans ‘‘micro-ascenseurs’’ intégrés, à l'image de ceux donnés en annexes 1, 2, 3, ou 4…

Bilan de cet atelier

Cet atelier a été l'occasion d'échanges passionnants et passionnés d'où il ressort notamment :

- qu'il est dommage que la recherche de problèmes ‘‘ouverts’’ se fasse de façon trop marginale même si l'on peut le faire parfois (en module en Seconde par exemple) mais de toute façon cela reste encore bien trop épisodique.
- que de nombreux collègues ont les mêmes préoccupations face au ‘‘bachotage’’ : former les élèves et les préparer au bac sont actuellement deux choses très différentes… pour ne pas dire antagonistes…

Des questions sont soulevées comme :

- comment vont se comporter les élèves les plus faibles dans ce type de démarche ? (ou “ chassez le naturel, il revient au galop ”, en clair, “ les % de réussite au bac pourront-ils encore être respectés avec ce type de problèmes ? ” ! !)
- les problèmes ‘‘ouverts’’ doivent-ils être évalués ?

[4] Voir **annexe 5**

Quant au risque que les élèves ne s'investissent plus que dans ce genre de ‘‘situation-problème’’, il n'est à craindre que dans une première phase. Les élèves découvrent en effet très vite l'intérêt de posséder une ‘‘*boite à outils mathématiques*’’ convenablement remplie et cela a souvent permis, bien au contraire, soit d'en motiver leur apprentissage soit d'en apporter une meilleure compréhension.

Enfin, il ne faudrait pas mésestimer non plus l'importance qu'il y a à donner à nos élèves une autre image des mathématiques que celle d'une matière où “ *on applique* ”… N'est-il pas en effet également important de faire en sorte que l'on cesse de dénaturer les mathématiques aux yeux des élèves et notamment des élèves catalogués “ non scientifiques ”... ?
Alors donnons leur la possibilité de ne pas en rester uniquement au stade de la grammaire et de l'orthographe, et permettons leur de gouter aux joies de la poésie[5]…

Quant à dire que cette option pourrait être détournée de son but pour recréer une 2^nde^ C, il faut espérer vous avoir convaincus que telle n'est pas notre intention, au lycée Jean Monnet ni à l'APMEP, et que de toute façon c'est un faux procès car cela se fait hélas déjà sans avoir besoin de cette option ! ! ! D'autre part, on ne voit pas pourquoi non plus on devrait priver nos élèves[6] de pouvoir satisfaire leur appétit des sciences sous prétexte que certains font n'importe quoi !

Nous espérons au moins que vous ne douterez plus des intentions qui nous ont poussé à lancer cette option et qui nous poussent à la défendre. Il faudrait tout de même savoir ce que l'on veut et arrêter de faire des complexes quant on défend les sciences et les mathématiques en particulier ! Et si cela amène certains élèves à mieux réussir que d'autres, ce sera tout de même mérité car ces élèves s'astreignent à 3 h de plus sans compter le travail personnel qui est souvent considérable ! Ainsi l'an dernier un élève a eu le 1er prix au rallye de mathématiques d'Alsace : nous disons tant mieux et bravo, même si ce n'est pas le but premier de cette option, mais il est presque inévitable que cela amènera des réussites à court ou à moyen terme et cela doit plutôt nous réjouir que nous complexer[7], il me semble… sans compter que ***l'option Sciences*** que nous proposons en Seconde peut sauver de l'ennui certains élèves scientifiques à leur arrivée au lycée…

---

5 Dans son texte de présentation de la voie S de janvier 2000, le nouveau GTD de mathématiques semble partager cet avis. Ainsi dans le paragraphe “ **2. Quelques objectifs généraux pour la voie S** ”, on trouve notamment : ‘‘favoriser le travail personnel des élèves et donner le gout des problèmes consistants ou non entièrement balisés (peut-on imaginer un enseignement littéraire qui s'arrêterait à l'étude des règles grammaticales ?)’’

6 De banlieue en ce qui concerne le lycée Jean Monnet, nous tenons à le préciser puisque ‘‘certains’’ étaient persuadés que c'était une option d'un lycée ‘‘prestigieux’’ de Strasbourg…

7 Si non, en caricaturant à peine, nous avons parfois l'impression que les ‘‘réticents’’ seraient prêts à concéder cette option à condition qu'elle ne serve pas… Un comble non ? ! !

ANNEXE A

L'OPTION SCIENTIFIQUE AU LYCÉE JEAN MONNET de Strasbourg

Petit historique...

Depuis sa création en 1960, le lycée Jean MONNET, situé dans le quartier du Neudorf dans la banlieue sud de Strasbourg, a une image plutôt négative dans la conscience populaire. C'est pourquoi il nous faut déployer, projet après projet, des trésors d'imagination pour le rendre plus attractif

Ainsi, à la rentrée 1990, deux classes européennes dites « classes Jean MONNET » ont été crées au niveau de la seconde. Elles regroupent 70 élèves ayant satisfaits à des tests en langue vivante I et langue vivante II. Tous les élèves des « classes Jean MONNET » bénéficient, en Seconde puis en Première (quelque soit la série suivie par l'élève), de trois semaines de scolarité, prises dans l'année scolaire, dans un lycée britannique, allemand, autrichien, italien ou espagnol. En contre partie, ils doivent recevoir à leur tour pendant trois semaines un correspondant étranger, toujours durant l'année scolaire. Très vite, il s'est avéré que certains élèves confrontés à une telle scolarité, perturbée pour le moins, avaient du mal à suivre et risquaient d'hypothéquer leur année. Un examen plus attentif du livret scolaire fut alors décidé pour ne prendre que les élèves jugés aptes à suivre dans toutes les matières le rythme imposé dans de telles classes si l'on veut boucler le programme malgré toutes ces absences.

Parallèlement à cela, nos élèves de Seconde ont également la possibilité d'opter pour l'une des classes à « excellence » en allemand, pour la classe « Humaniste » (initiation à la philosophie et aux langues anciennes) ou encore pour la classe « Orientale ».

Et dans tout cela, nous direz-vous, pas le moindre projet pour un élève au profil scientifique ?

Pas tout à fait, car les premières années, les deux classes de seconde « Jean MONNET » ont permis de constituer une classe entière de 1^{e} S de très bon niveau, révélant par la même le détournement qui en était fait en masquant un recrutement d'élèves à vocation scientifique...

Mais depuis trois ans une baisse du recrutement s'est amorcée et comme de plus il n'est pas rare que des élèves des classes « Jean MONNET » se voient parfois reprocher leur peu de motivation pour les langues et les matières littéraires alors que leurs résultats dans les matières scientifiques sont très satisfaisants... quelques uns d'entre-nous ont pensé qu'il était important, pour ne pas dire urgent, de pouvoir offrir la possibilité d'une vraie classe scientifique ("non déguisée" sous le label « Jean MONNET » ...) dans notre Lycée...

Cependant, devant la forte opposition à la création d'une classe scientifique et sensibles aux craintes formulées par nos collègues de langues vivantes, moteurs du projet européen, conscients que nos recrutements respectifs se feraient sur le "même public", nous nous sommes finalement mis d'accord en juin 1997 pour la création d'une "option scientifique", ouverte à tous les élèves de seconde de notre Lycée. Cela allait tout à fait dans le sens que nous étions quelques uns à souhaiter à savoir :

- ne pas laisser en reste les voies scientifiques dans notre Lycée, jusque là fortement marqué par le développement des langues,
- renforcer l'enseignement des trois disciplines scientifiques Biologie, Mathématique et Physique en mettant l'accent sur l'éveil à une culture scientifique.

Appuyé par un collègue de Physique et par une collègue de Biologie, prêts à s'investir pour que cette option démarre dès la rentrée 1997, nous avons pu alors obtenir sans grande difficulté le feu vert de notre administration sur le projet qui suit.

Projet initial :

Facultative, l'option scientifique est mise en place à la rentrée 1997 après en avoir averti les Collèges du secteur.
Encadré par les professeurs de mathématiques, de physique et de sciences et vie de la terre, cet enseignement s'ajoute aux deux options obligatoires.
La formation qui y est assurée n'est pas un prolongement du cours, mais veut se présenter comme une ouverture plus large sur le monde scientifique.
Elle est essentiellement destinée aux élèves motivés qui souhaitent rejoindre la série S.
Destinée à faire acquérir aux élèves une culture scientifique, cette option scientifique se fait sur la base de 3 heures hebdomadaires (une heure dans chaque discipline scientifique) avec pour principaux objectifs de viser à rendre les élèves

- plus autonomes,
- de leur apprendre à chercher, à "sécher", sur des problèmes "ouverts",
- de faire appel à leur imagination, de développer leur créativité...

<u>La réussite de cette option passe bien sûr par un scolarité bien pensée</u>

• Nous disposons pour cela de professeurs volontaires et motivés, dans chacune des trois disciplines scientifiques, prêts à accepter que l'heure d'option se fasse en fin d'après-midi et entraîne une heure creuse, voire une heure isolée, dans leur emploi du temps... et prêts à s'investir pour une heure hebdomadaire...

• Nous veillerons, pour chacune des trois matières scientifiques, à ce que le professeur assurant l'option soit, autant que possible, distinct du professeur ayant en classe entière des élèves suivant l'option, pour éviter des "dérapages" et détourner l'option de son but (qui n'est pas de devenir un "surentrainement" à l'assimilation du cours).

• Nous souhaitons :
- que les heures des trois disciplines soient accolées, par exemple un après-midi de 15 heures à 18 heures, pour permettre de la souplesse dans la gestion de cet horaire entre les professeurs concernés (afin, de temps en temps, de pouvoir donner un peu de densité au contenu de l'option, de permettre des visites de laboratoires, la venue de chercheurs, etc.)
- regrouper des élèves motivés de différentes classes en ajoutant ainsi différentes dynamiques plutôt que de faire face à une seule avec l'inertie que cela risque d'entrainer.

• L'évaluation est laissée à l'appréciation de chaque collègue selon les modalités de son choix[8].

[8] Cependant une petite réunion de concertation précède chaque conseil de classe. Nous nous sommes bien sûr posé la question de savoir s'il fallait ou non mettre des notes... Ne voulant pas aller trop vite, nous avons accepté de nous y plier mais en ne faisant figurer sur les bulletins qu'une seule note et une seule appréciation par élève. Comme il y a trois trimestres, chacun des trois professeurs prend en charge l'un des trois trimestres, remplit les bulletins et assiste au conseil de classe au nom des deux autres collègues.

ANNEXE B

Mise en place :

En 1997/98

Vu les contraintes d'emploi du temps, pour l'année de "démarrage" c'est-à-dire l'année scolaire 1997/98, tous les élèves suivant cette option étaient en fait issus d'une même classe et dans son intégralité. Nous n'avons pu que le regretter car il s'est avéré en outre qu'à 30 élèves, ils étaient trop nombreux pour ce type d'enseignement et que certains manifestement n'étaient guère motivés.

Cela dit les réactions des élèves ont été très positives : ils ont dans l'ensemble apprécié d'avoir du temps pour chercher, d'avoir davantage de liberté dans l'organisation de leur travail (méthodes non imposées, choix des exercices ...) et de pouvoir travailler à plusieurs en groupe.

Ajoutons enfin que cette classe est partie dans les Alpes une petite semaine en fin d'année pour un voyage d'étude de géologie.

En 1998/99 et 1999/2000

Vu le succès en 97/98, il y a maintenant deux classes de 2 d' qui offrent la possibilité de suivre l'option scientifique. De plus, nous avons eu gain de cause en ce qui concerne les effectifs qui ne dépassent plus 24 élèves dans chaque classe (donc nous n'avons plus la classe entière) ainsi qu'en ce qui concerne les heures accolées ce qui a déjà permis des échanges d'horaire entre collègues pour organiser des visites: musée zoologique, CNRS, planétarium, journée banalisée avec venue d'un chercheur de mathématiques, etc.

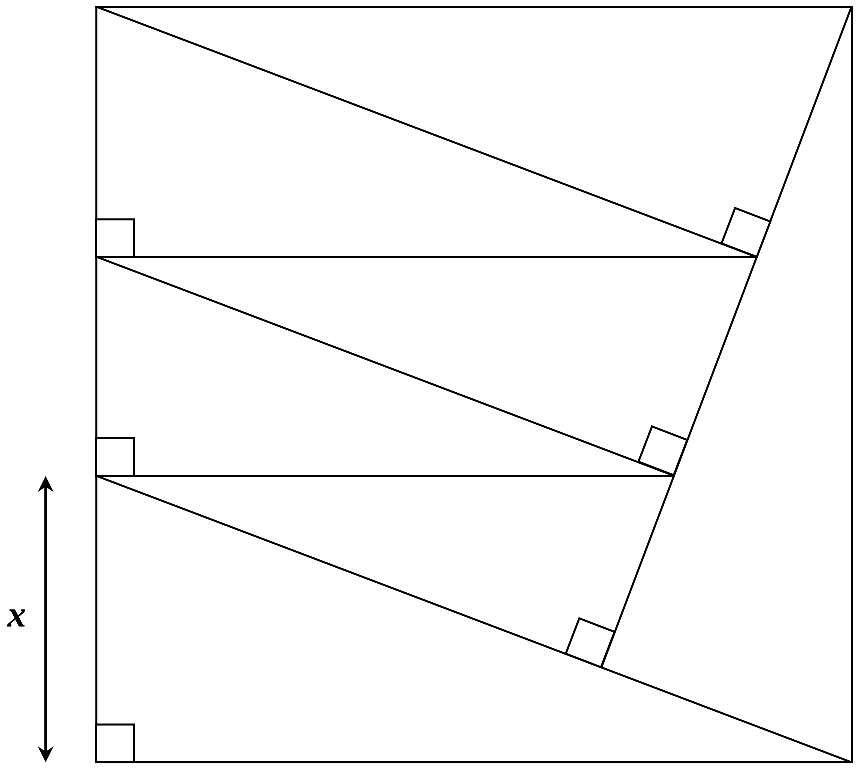
Parallèlement, pour assurer la cohérence du projet, les élèves ayant suivi l'option scientifique en 2nde ont la possibilité de suivre l'option officielle « sciences expérimentales » de 1^{e} S (qui va hélas disparaitre ...) à laquelle est ajouté un enseignement optionnel d'une heure en mathématiques. Outre les raisons déjà évoquées, nous pensons que cela devrait leur permettre un choix plus raisonné de l'enseignement de spécialité en terminale S.

ANNEXE 1

Deux des énoncés proposés à Gérardmer…

1. UN CARRÉ BIEN TRIANGULÉ

Un carré de côté 1 est découpé en 7 triangles rectangles tous semblables comme indiqué approximativement sur la figure. Calculer une valeur approchée de *x* au millième près.



2. DES RACINES BIEN CARRÉES…

Étant donné trois nombres positifs a, b et c, démontrer que :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

ANNEXE 2

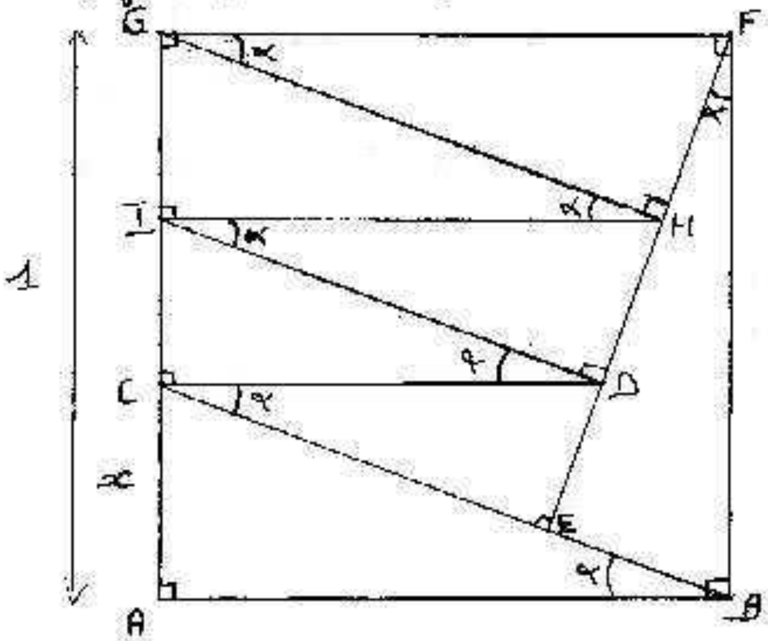
Geoffroy 1° S

Cet espace pour vous:

Mathématiques option

Commençons par, de l'avis de bien des élèves, un des plus durs: votre fameux CARRÉ BIEN TRIANGULÉ...
(musique sinistre)

Petit dessin, afin de placer les suspects.



Procédons d'abord par éliminations. Notre inconnu, x, a laissé quelques indices quant à sa valeur.

Tout d'abord $0 \leq x$ (C'est une longueur)
$x \leq 1$ (sinon il sortirait du carré, et nous l'avons cerné: il ne peut s'échapper)

x est un réel!! Supprimons d'emblée les nombres imaginaires (ou complexes si vous préférez) car c'est une longueur.

Et maintenant, grâce à vous, il ne nous reste plus que 1001 réponses (et oui, au millième près), une broutille par rapport à l'infinité qu'on aurait dû avoir à trouver.

Maintenant, l'angle α. Les triangles étant tous semblables (dans l'énoncé), l'angle α est le même partout (c'est pour ça que vous avez beaucoup vu α). Pour preuve, appliquer le théorème des angles alternes-internes un peu partout... où la loi ne l'interdit pas bien sûr.

Et l'angle $\widehat{EFB}$? Non, il n'est pas passé dans les mailles de notre filet, mais il va falloir un peu de mathématiques. La somme des angles aigus d'un triangles rectangle vaut 90°. Donc l'angle $\widehat{GFH}$ vaut $90-\alpha$. L'angle $\widehat{GFB}$ vaut 90°. Donc $\widehat{EFB} = \alpha$. Elementaire, cher Mr Richeton.

Attaquons au problème lui-même. C'est un gros morceau, lançons l'assaut par petit feu.

Les tireurs d'élites :

(1) $\tan \alpha = x = \frac{FH}{GH} = \frac{GI}{HI} = \frac{HD}{ID} = \frac{IC}{DC} = \frac{DE}{CE} = \frac{BE}{FE}$

Et maintenant... CHARGER !!

D'après Pythagore (un de nos meilleurs indics), dans le triangle GHF rectangle en H

$GH^2 + HF^2 = GF^2 = 1$

D'après (1) $GH^2 + x^2 GH^2 = 1$ (produit en croix avec (1))

D'où $\boxed{GH^2 = \frac{1}{1+x^2}}$

D'après le même Pythagore, dans le triangle GIH rectangle en I $GH^2 = GI^2 + IH^2$

D'après les (1) (WAAH! L'humour !) $HI^2 x^2 + HI^2 = \frac{1}{1+x^2}$

$$HI^2(1+x^2)=\frac{1}{1+x^2}$$

D'où $HI^2=\frac{1}{(1+x^2)^2}$

Mais c'est aussi, d'après ①

$$GI^2+\frac{GI^2}{x^2}=\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)GI^2$$

D'où $GI^2=\frac{x^4}{(1+x^2)^2}$

Grâce à Pythagore. Encore lui... Dis donc, vous êtes sûr qu'il n'a pas de lien avec Archimède ? (Archimède faisait souvent pour lui les balances)

Bon revenons. grâce à Pythagore, dans le triangle IDH rectangle en D

$$IH^2=ID^2+DH^2$$
$$=ID^2(1+x^2)$$

D'où $ID^2=\frac{1}{(1+x^2)^3}$

D'après Devinez-qui ? (allez, je vous le dis : Pythagore), dans le triangle ICD rectangle en C

$$ID^2=IC^2+CD^2$$
$$=DC^2(1+x^2)$$

D'où $DC^2=\frac{1}{(1+x^2)^4}$ (carrément inutile : c'est un leurre pour tromper l'ennemi)

Mais aussi $IC^2\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$

D'où $IC^2=\frac{x^2}{(1+x^2)^4}$

Phase finale

$$AG=AC+CI+IG=1=x+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{x}{1+x^2}$$

D'où $(1+x^2)^2 = x(1+x^2)^2 + x(1+x^2) + x$

soit $\boxed{x^5 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0}$

La manière dont on a effectué l'opération doit demeuré secret. (En vérité, nous n'avons jamais appris comment resoudre une équation du cinquième degré. C'est grace à la calculatrice que j'y suis arrivé)

Après élimination des nombres qui ne correspondent pas à la description du coupable, on trouve

$x = 0,379$ (au millième près)

Satisfait général ? L'opération s'est déroulé transparente apparente, vous vous direz si c'est le cas au briefing !

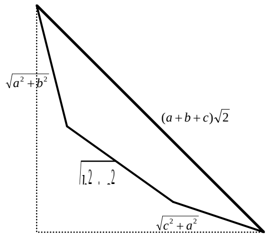
ANNEXE 3

DES RACINES BIEN CARRÉES… (compte rendu de recherche)

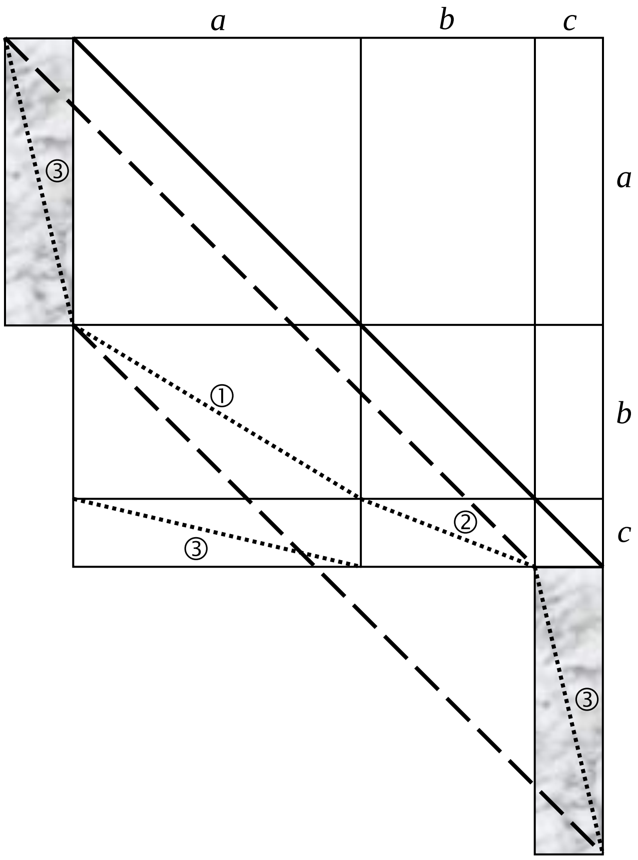
Étant donné trois nombres positifs a, b et c, démontrer que :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

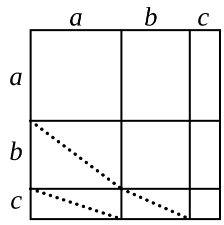
Après un temps de recherche individuelle, les élèves mettent en commun le fruit de leur recherche, en binôme pour la plupart, à trois plus rarement. Au départ, tous se sont lancé dans des calculs algébriques, essayant de façon souvent pertinente de faire intervenir des identités remarquables de façon à avoir des carrés (genre $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$), etc. ; puis un binôme a pensé à traduire la multiplication par $\sqrt{2}$ comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté $(a + b + c)$… après ce “ petit coup de génie ” (selon leurs camarades…), l'un de ces deux élèves a rajouté sur sa copie le dessin d'un triangle rectangle de côté a et b et d'hypoténuse $\sqrt{a^2+b^2}$ puis ils ont ‘‘séché’’ ensuite pendant le reste de l'heure… rejoignant leurs autres camarades embarqués eux dans des calculs inextricables (genre élévations au carré successives…).

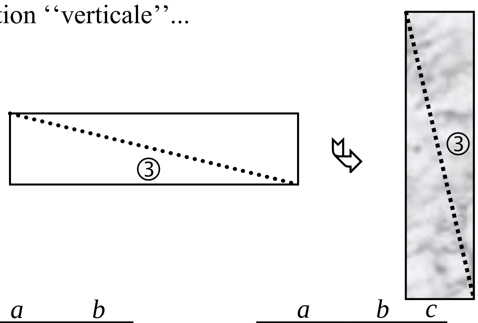


L'heure suivante, ce duo dessine alors ce qui les arrangerait bien à savoir :

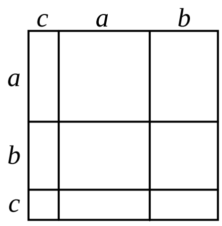


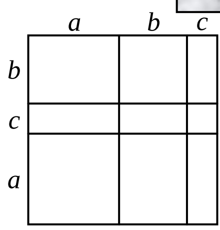
Puis bloque sur la figure ci-contre… jusqu'au moment où ils pensent à réorganiser ce ‘‘puzzle’’ comme dans un jeu du taquin… avec comme stratégie de partir des segments ① et ② et de tenter de rajouter à l'extrémité du ① ou du ② le segment ③ de façon à joindre les extrémités d'un segment de longueur $(a+b+c)\sqrt{2}$ … mais la position du segment ③ ne permet pas d'aboutir directement, il faut encore penser à changer son orientation en faisant passer le rectangle, dont il est une diagonale, de la position ‘‘horizontale’’ à la position ‘‘verticale’’...





ce qui les amène à proposer les deux solutions (voir ci-dessus sur la figure de gauche) que l'on peut schématiser ainsi… :





ANNEXE 4

À noter que lors de cet atelier, contrairement à celui qui s'était tenu lors de l'université de Marseille en juillet 1999, il n'y a pas eu de réaction du genre : *" pour moi ce n'est pas une démonstration mais tout au plus une conjecture et j'exigerais qu'après cela ils fassent une démonstration rigoureuse "*, mais je laisse toutefois le débat ouvert et attend vos réactions…

Solution[9] niveau Seconde :

Son idée : pour tout nombre α positif, on a : $\alpha\sqrt{2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2}$

Comme *a*, *b* et *c* sont positifs, l'inégalité à démontrer se ramène donc à :

$$\sqrt{a^2+a^2} + \sqrt{b^2+b^2} + \sqrt{c^2+c^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \quad (*)$$

1ère étape : démontrer le résultat intermédiaire $\sqrt{a^2+a^2} + \sqrt{b^2+b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2}$

2ème étape : écrire le résultat précédent, pour a et b, pour a et c ainsi que pour b et c.

En ajoutant membre à membre les trois inégalités ainsi obtenues, et en divisant par 2, on obtient le résultat demandé sous la forme (*).

Se pose alors la question : quelle stratégie mettre en place pour que les élèves puissent penser à une telle méthode et surtout qu'elle soit réinvestissable[10] ?

Je pense que dans ce genre de calcul qui s'écrivent par permutations circulaires sur les nombres en présence, un stratégie parmi d'autre qui soit réinvestissable peut consister par commencer à regarder ce que cela donnerait pour deux réels positifs au lieu de trois[11]…

Ici, pour deux réels positifs *a* et *b*, l'inégalité à démontrer deviendrait :

$$(a+b)\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+a^2} \quad \text{c'est à dire : } (a+b)\sqrt{2} \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

comme tous les nombres sont positifs, ceci est équivalent à démontrer : $2(a+b)^2 \leq 4(a^2+b^2)$

que l'on ramène sans problème à : $2ab \leq a^2+b^2$ et finalement à $(a-b)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai… On termine comme ci-dessus à l'étape 2 en écrivant le résultat précédent, pour a et b, pour a et c ainsi que pour b et c, puis on ajoute membre à membre les trois inégalités ainsi obtenues, etc.

Solution niveau Terminale :

Idées en chaine..! $\sqrt{a^2+b^2}$ fait penser au module du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$.

Pour tout réel α positif, $\alpha\sqrt{2} = \sqrt{\alpha^2+\alpha^2}$ est le module de $z = \alpha + \mathrm{i}\,\alpha$.

D'où, quelques soient les réels positifs *a*, *b* et *c* : $(a+b+c)\sqrt{2}$ est le module du nombre complexe A = (*a* + *b* + *c*) + *i* (*a* + *b* + *c*) ou encore de A = (*a* + i *b*) + (*b* + i *c*) + (*c* + i *a*)… !

On a donc $|\mathrm{A}| = (a+b+c)\sqrt{2}$ ①

Or $|(a+ib)+(b+ic)+(c+ia)| \leq |(a+ib)| + |(b+ic)| + |(c+ia)|$

c'est à dire : $|\mathrm{A}| \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$ ②

De ① et ② on déduit : $(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$.

---

[9] Solutions envoyée par Jean-Marc Pilandon de Montargis suite à cet atelier

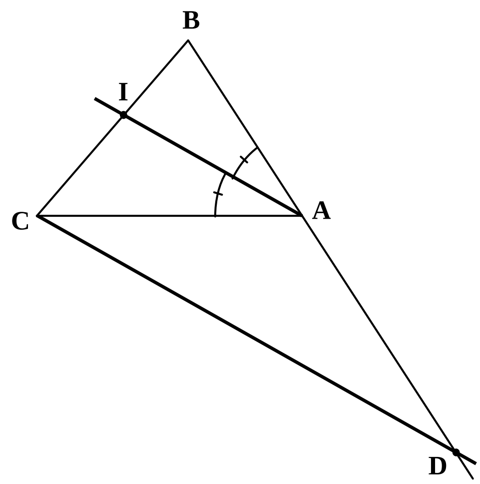
[10] Sinon, aux yeux de nos élèves, cela resterait une ''astuce'' de plus de professeurs de math ou d'initiés… (si ce n'est pour professeurs de math ou pour initiés…)

[11] Suivant le degré d'autonomie atteint par nos élèves, on peut leur donner cette indication puis les laisser poursuivre leur recherche sans autres indications.

ANNEXE 5

Extrait d'un manuel de seconde…

ABC est un triangle. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment [BC] en I. Par C on trace la parallèle à (AI). Elle coupe (AB) en D.



1° Démontrez que $\frac{BC}{BI} = \frac{BD}{BA}$ puis que $\frac{BI}{IC} = \frac{BA}{AD}$.

2° Démontrez que le triangle ADC est isocèle, et déduisez-en que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

Énoncez en une phrase le résultat trouvé.

<u>Durée probable</u> : *20 à 30min (la deuxième égalité de la question 1° n'étant pas aussi ''immédiate'' que la première si aucun coup de pouce n'est donné…)*

Pour tester ce qu'il est possible d'attendre de nos élèves face à un exercice sans ''micro-ascenseurs'' intégrés…, voici l'énoncé qui leur a été proposé dès leur première heure d'option scientifique (en 1998, en classe de seconde au lycée Jean Monnet de Strasbourg) :

> Dans de " vieux " livres de géométrie, on peut trouver le **théorème** suivant :
>
> On considère un triangle non aplati ABC. Soit M un pont de la droite (BC). Le point M appartient à l'une des bissectrices des droites (AB) et (AC) si et seulement si l'on a : $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$. **Démontrer ce théorème.**

Ce fut une séance très vivante, où le scénario à quelques détails près a été le suivant :

- à partir d'un triangle quelconque ABC, les élèves tracent la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et appellent M son point d'intersection avec le côté opposé [BC]. Mais, n'ayant jamais été confrontés à des énoncés aussi peu guidés, ils sont d'abord désemparés et comme c'est notre première heure, je leur apporte une petite aide en leur posant la question suivante :

  " *Il est question de démontrer une égalité de deux rapports de longueurs…*
  qu'est-ce que cela évoque pour vous de votre passé de collégien ? "

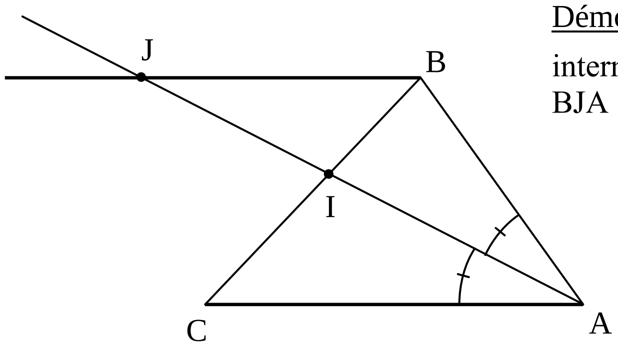
Alors tout va s'enchainer très vite :

- Thalès
- Donc il nous faut des parallèles ➢ essais de parallèles plus ou moins pertinentes…
  Ici par contre, il faut les laisser ''sécher'' un peu, la tentation étant grande de leur donner ''le'' coup de pouce qui convient…

  ➢ S'en suit, par exemple, le tracé de la parallèle à (AC) passant par B qui permet d'obtenir la configuration de ''Thalès-triangle croisée'' faisant intervenir le rapport $\frac{IB}{IC}$ (parallèle, en outre, certainement bien plus pertinente que celle proposée dans l'exercice ci-dessus).
- Recherche d'indices pertinents dans l'énoncé pour ''se lancer'' dans une démonstration…

Il est question de bissectrice donc d'angles, et le fait de vouloir faire intervenir des parallèles nous met sur la voie d'une configuration de référence au collège : celle des angles alternes-internes, correspondants, etc.

Cela a permis de rédiger la démonstration (‘‘collective’’ pour cette 1ère séance) qui suit :



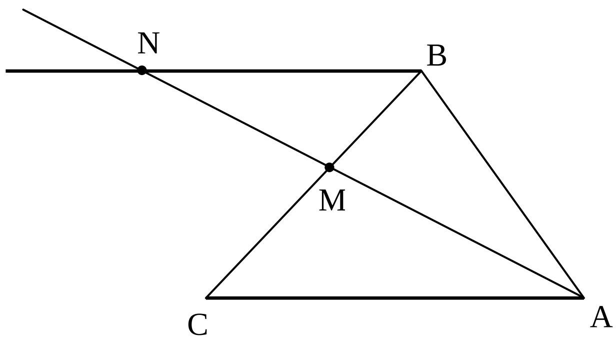
Démonstration : $\widehat{BJA} = \widehat{JAC}$ comme alternes-internes d'où $\widehat{BJA} = \widehat{BAJ}$ et donc le triangle BJA est isocèle en B d'où BJ = AB.

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles IBJ et ICA on obtient :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{IJ}{IA} = \frac{BJ}{CA} \text{ d'où } \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$

Réciproque :

Soit M ∈ [AB] tel que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$. De même que précédemment, on introduit le point N intersection de (AM) avec la parallèle à (AC) passant par B. On a donc $\frac{MB}{MC} = \frac{MN}{MA} = \frac{BN}{AC}$ d'où $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{AC}$ et finalement AB = BN.



Ce qui démontre que le triangle BNA est isocèle et que $\widehat{BNA} = \widehat{BAM}$; or $\widehat{BNA} = \widehat{MAC}$ comme alternes-internes, d'où $\widehat{MAC} = \widehat{BAM}$ et donc [AM) est la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$.

Durée : une bonne heure sans compter la rédaction faite à la maison.

‘‘Dans la foulée’’, les élèves se sont vu proposer la fiche qui suit - à l'époque ce n'était que la 2ème séance pour ces élèves, c'est pourquoi il leur est fourni encore quelques indications à la fois pour leur apprendre à chercher tout en veillant à ne pas les décourager en attendant qu'ils soient devenus plus autonomes :

OH LE BEAU TRIANGLE… !*

Notations : Étant donné un triangle ABC et une unité de mesure étant choisie, on note AB = c, BC = a et CA = b.

1° Constructions :

a) Construire un triangle ACD de votre choix qui soit rectangle en C.

b) Placer le point B sur [AD] tel que DB = b.

c) Dans le triangle ABC :
- tracer la hauteur issue de B et noter H le pied de cette hauteur
- tracer la médiane issue de C et noter K son point d'intersection avec (BH).

d) Tracer la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$.

2° Conjecture :

Quelle conjecture peut-on émettre suite aux constructions précédentes ? Est-elle encore valable pour un triangle ABC quelconque ?

3° <u>Scénario pour la recherche d'indices et ''d'outils'' pertinents</u> :

On considère la figure obtenue après les constructions effectuées en **a)**, **b)** et **c)** de la question **1°**.

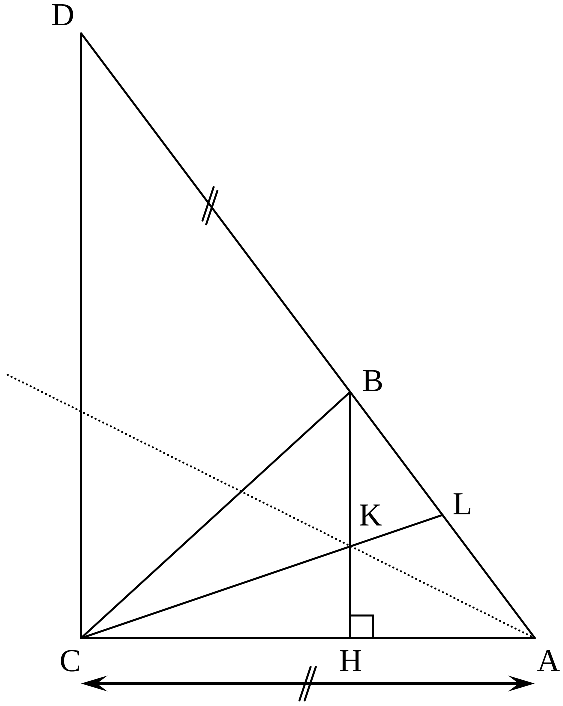
- Sans introduire de nouveaux points, trouver une égalité qui permettrait de conclure.
- à l'étape **c)**, on a tracé une médiane…. ➥ égalités d'aires… ➥ égalités de ''produits en croix''…
- mais également une hauteur…➥ triangles rectangles ➥ rapports de trigonométrie…

---

* Sur une idée de Jean Kuntzmann dans " *Le Petit Archimède* " n°90 (décembre 82), repris dans " *L'Ouvert* " n° 65 (bulletin APMEP-IREM de Strasbourg - 1991).

Il a fallu deux séances pour ne pas ''parachuter'' tous les éléments de réponse et laisser les élèves s'approprier suffisamment ce problème. Cela dit, il a fallu leur donner plusieurs ''coups de pouce'', ce qui nous fait dire que cet exercice était sans doute donné de façon prématurée en Seconde. Il est est donc recommandé de le donner en fin de Seconde ou en début de Première, quand les élèves ont une année de recherche derrière eux et qu'ils commencent à aborder ce type de problème avec davantage d'autonomie dans la prise d'initiative.

<u>Démonstration</u> :
Soit L le milieu de [AB].



Les triangles BCL et ACL ont la même hauteur issue de C et ''même base'' car LB = LA, donc ils ont même aire (propriété remarquable des médianes d'un triangle).
De même on a $\mathbf{A}$(BKL) = $\mathbf{A}$(AKL).
Par différence, on obtient : $\mathbf{A}$(BCK) = $\mathbf{A}$(ACK),

autrement dit : $\dfrac{\mathrm{BK}\times\mathrm{CH}}{2}=\dfrac{\mathrm{CA}\times\mathrm{KH}}{2}$

et donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KH}}=\dfrac{b}{\mathrm{CH}}}$, où b = CA = DB.
①

D'autre part : $\cos\widehat{\mathrm{A}}=\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{AH}}{c}$, où c =AB.

$$\cos\widehat{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{b}{b+c}.$$

D'où $\dfrac{\mathrm{AH}}{c}=\dfrac{b}{b+c}$ et donc $\mathrm{AH}\times(b+c)=bc$

$$\mathrm{AH}\times b=c(b-\mathrm{AH})$$

$$\mathrm{AH}\times b=c\times\mathrm{CH}\text{, d'où }\frac{b}{\mathrm{CH}}=\frac{c}{\mathrm{AH}}$$

ce qui, avec l'égalité ①, amène $\dfrac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KH}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}$, ce qui caractérise bien, dans le triangle ABH, le fait que [AK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$.