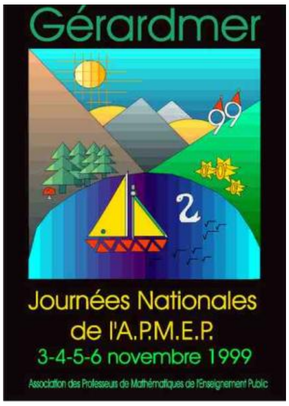


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier VA08
AUTOUR DES MÉTHODES DE FAUSSE POSITION.
Ou : Comment faire l'âne pour avoir du son.

Arnaud GAZAGNES[1]

Ce compte-rendu a pour but, d'une part, de présenter d'un point de vue historique deux méthodes pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue et, d'autre part, de militer pour une histoire des mathématiques comme situation d'enseignement. Les textes historiques et les autres sources de travail utilisés dans l'atelier (facilement disponibles) sont référencés à la fin.

<u>Première partie</u> : Le point de vue historique.

1. <u>La règle de fausse position simple.</u>

Francès Pellos proposait le problème suivant: *"Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long."*. Nous procéderions algébriquement ainsi: en désignant par x la longueur de la lance, on trouve l'équation $x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=9$ qui admet pour solution 54. Le hic est qu'à l'époque du gentilhomme niçois, cette algèbre n'existait pas ! C'est pourquoi, bien avant la naissance de notre algèbre, des problèmes semblables ont donné lieu à la mise en œuvre d'algorithmes arithmétiques appelés, depuis la fin du XV° siècle, *méthodes de fausse position*. Ainsi, pour répondre à la question précédente, Pellos raisonne comme "en algèbre". Il commence par prendre pour inconnue le nombre de paumes mesurant la longueur de la lance. Mais au lieu de désigner cette inconnue par une lettre, il lui donne une *valeur numérique précise*, nous invitant à *"poser 12 selon notre bon plaisir"*, c'est-à-dire à calculer à l'aide de la *fausse position* 12 (qui est divisible par 2 et 3, ce qui évite des calculs avec des nombres fractionnaires). Partant de ce nombre et observant les conditions imposées par l'énoncé, il lui soustrait sa moitié (6) puis son tiers (4) et obtient 2, au lieu du 9 désiré. Il poursuit: *"si 2 sont venus de 12, de combien sont venus 9 ? Tu trouveras 54"*. Cette dernière étape fait référence à la proportionnalité : $\frac{12}{2}=\frac{x}{9}$ d'où $x=\frac{12\times 9}{2}$.

[1] arnaud.gazagnes@ac-lyon.fr , Enseignant en maths, Lyon.

Cette méthode s'applique dès que l'on est en présence d'un problème qui se traduirait en algèbre par une équation du type $a \times x = b$ (la quantité x cherchée est alors liée aux données d'une façon linéaire). Mais l'absence de symbolisme empêche ou rend difficile le calcul de a et donc celui de x (en divisant b par a). Puisque l'on est dans un cas de proportionnalité, l'utilisation d'une fausse position x_1 évite de calculer a, puisque l'énoncé donne le moyen de calculer $b_1 = a \times x_1$ (dans l'exemple plus haut, x_1 = 12, b_1 = 2 et b = 9). Et alors x peut se calculer uniquement à partir des données et de la fausse position : $\frac{x}{b} = \frac{x_1}{b_1}$ donc $x = x_1 \times \frac{b}{b_1}$.

Une seule fausse position permet de résoudre le problème posé : la méthode est dite de *simple* fausse position.

Au XII° siècle, l'Indien Bhaskara, confronté lui aussi à ces résolutions, appelle cette règle "*ista-karma*", c'est-à-dire "opération avec un nombre essai".

2. **La règle de double fausse position.**

Pourtant, cette règle a ses limites: de nombreux problèmes ne peuvent se résoudre comme ci-dessus, parce que leur énoncé se traduit par une équation de la forme $a\,x$ + b = c, contenant a priori deux coefficients à expliciter : a et b. Et l'absence de méthodes algébriques rend difficile la transformation de cette équation en une du type $a\,x = b$.

Lucas Pacioli, au XV° siècle, proposait le problème suivant: *"Partager 44 ducats entre 3 personnes de façon que la deuxième ait le double de la première plus 4 et la troisième autant que les deux autres réunis plus 6."*. Pacioli obtient l'équation $6x + 14 = 44$ (qui donnera $x = 5$). Il mène ses calculs ainsi:

Une première fausse position $x_1 = 8$ donne comme somme totale $6 \times 8 + 14 = 62$, soit un excès $e_1 = 18$ (par rapport à 44).

Une seconde fausse position $x_2 = 6$ donne comme somme totale 50, soit un excès $e2 = 8$.

Alors, dit Pacioli, pour avoir la valeur exacte de x, il suffit de calculer le produit du premier excès par la seconde hypothèse diminué du produit du second excès par la première hypothèse, le tout divisé par la différence des excès, soit :

$$x = \frac{e_1 x_2 - e_2 x_1}{e_1 - e_2} = 5$$

Deux fausses positions permettent de résoudre le problème posé: la méthode est dite de *double* fausse position.

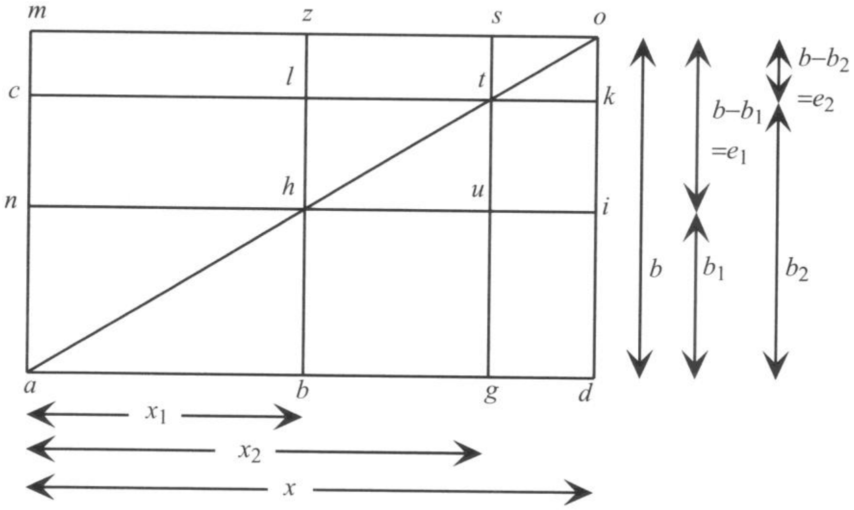
> Vérifions par l'algèbre (moderne) pourquoi $x = 5$ est la bonne réponse.
> L'équation proposée est de la forme $a\,x + b = c$ où a et b sont inconnus. Une première fausse position x_1 donne un résultat $a\,x1 + b = c_1$ qui diffère de c d'une erreur $e_2 = c_1 - c = ax_1 + b - (ax + b) = a(x_1 - x)$. Une deuxième fausse position x_2 donne de même un résultat $ax_2 + b = c_2$ qui diffère de c d'une erreur $e_2 = c_2 - c = a(x_2 - x)$. D'où $e_1 - e_2 = a(x_1 - x_2)$.
> Donc $\frac{e_1 x_2 - e_2 x_1}{e_1 - e_2} = \frac{a(x_1 - x)x_2 - a(x_2 - x)x_1}{e_1 - e_2} = x$].

Les Chinois dénomment, au début du premier millénaire, cette méthode "*ying bu zu shu*", c'est-à-dire "règles du trop et du pas assez". Fibonacci, au XII° siècle, parle de "*regula augmenti et diminucionis*", ou "règle de l'augmentation et de la diminution". Les Arabes pratiquent le "*hisab al-khata'ayn*", ou encore le "calcul des deux erreurs".

3. **<u>Une démonstration géométrique: le texte de Qusta Ibn Luqa (fin du IX° siècle).</u>**

Les mathématiciens, faute de symbolisme, ne pouvaient pas justifier leur calcul ainsi. Ils utilisaient une démarche géométrique, mais qui, du coup, proposait 3 calculs distincts, selon que les écarts e_1 et e_2 étaient des excès ou des défauts, les écarts étant positifs. Par exemple, en Chine, dans le chapitre 7 du "Jiuzhang Suanshu" : en appelant respectivement x_1 et x_2 les deux fausses suppositions faites et e_1 et e_2 les deux valeurs par excès (*trop*) et par défaut (*pas assez*) qui en résultent, ils obtiennent la valeur correcte de l'inconnue avec la formule : $x = \frac{e_1x_2 + e_2x_1}{e_1 + e_2}$.

Dans l'extrait choisi, Ibn Luqa considère le cas où les deux fausses positions sont plus petites que l'inconnue.



Voici sa démonstration (avec nos notations modernes):

Si en "faisant les opérations indiquées avec x, x_1 et x_2, on obtient b, b_1 et b_2 ", alors "on a les mêmes rapports" : $\frac{x}{b} = \frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2}$.

On a : aire du rectangle de diagonale $mu = (b - b_1)x_2 = e_1x_2$, aire du rectangle de diagonale $ml = (b - b_2)x_1 = e_2x_1$ et aire du gnomon $nuszlc = (b - b_1)x_2 - (b - b_2)x_1 = e_1x_2 - e_2x_1$.

Or (propriété I-43 des <u>Éléments</u> d'Euclide) "dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale entre eux sont égaux". Donc les aires des rectangles *zstl* et *tkiu* sont égales: $e_1x_2 - e_2x_1$ = aire du rectangle de diagonale *ci*.

Or ce rectangle a pour largeur $cn = e_2 - e_1$ et pour longueur $ni = ad = x$.

Donc x = (aire du rectangle de diagonale *ci*)/(longueur du segment *cn*) = $\frac{e_1x_2 - e_2x_1}{e_1 - e_2}$.

<u>Seconde partie</u> : L'histoire des mathématiques en classe.

Il peut paraitre surprenant que, d'un côté, les disciplines dites "littéraires" incluent un enseignement de leur histoire (histoire littéraire, histoire de la philosophie, …) tandis que, d'un autre côté, les disciplines dites "scientifiques" sont le plus souvent oublieuses de leur passé. Comme si seule comptait la parole du dernier à parler, qui aurait fait la synthèse de tout et montrant la performance des notions actuelles. Comme si ce qui était fondamental pour l'élève était d'apprendre (à défaut de "comprendre") le plus de notions diverses mais, surtout, scientifiques.

Il n'est pas question d'enseigner l'histoire des maths mais d'introduire l'histoire des maths en classe. L'un des objectifs de cette démarche est de montrer que les maths constituent une science vivante (la recherche en est une preuve) et que les concepts de notre savoir mathématique ne se sont pas toujours constitués simplement. Il y eut en effet de grands cheminements, des erreurs persistantes et de subits éclairs: derrière les maths, il y a des hommes. La démonstration du théorème de Fermat est une grande aventure sur plus de 350 ans ! Ainsi, dans le secondaire, il est possible d'opérer une telle démarche lors de l'étude des puissances de nombres (avec Viète, au XVIe), des nombres complexes (Cardan, XVI^{e}), des probabilités (Fermat et Pascal, XVIIe), du théorème "des restes" (Qin Jiushao, XIII^{e}), … ou en montrant les divers aspects que peut prendre une même notion, comme la tangente à une courbe en un de ses points. La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue est source d'une activité riche en Collège (ou en 2nde !); on pourra consulter à ce titre la brochure référencée de l'IREM de Reims. C'est une dimension historique qui donne une image constructiviste des maths, opposée à une (triste) vision dogmatique d'elles.

Dans le cas où l'on présente des textes mathématiques, il convient aussi donner leur contexte historique et philosophique pour ne pas simplement les plaquer et en faire des "deus ex machina" pour les élèves. C'est l'occasion de travailler avec des collègues d'autres matières, telles l'histoire, la philosophie, les arts plastiques, comme les programmes le proposent ! Voilà donc une source de thème de P.A.E. …

Il semble indispensable de veiller à un enseignement **appuyé par** des passages historiques, qu'ils soient tirés de textes ou de manipulations "en vrai" avec les élèves. "*Appuyé par*", et non pas "assisté par", pour éviter le folklore. "*Appuyé par*", car, cela a déjà été écrit, il ne s'agit pas d'enseigner l'histoire des maths. "*Appuyé par*", parce que l'introduction de l'histoire n'est pas un luxe que l'on s'offre devant un programme estimé suffisamment avancé pour pouvoir détourner une heure sans en compromettre le déroulement. Les programmes rappellent que "*l'introduction d'une perspective historique peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique*". "*Appuyé par*", pour permettre à l'élève de se poser la question du "pourquoi ? (qui est un outil dans son apprentissage, lui permettant de comprendre de quoi il parle) plutôt que celle du "comment ?" (qui réduit un cours à un ensemble de recettes et éloigne alors le verbe "apprendre" du verbe "comprendre"); l'histoire des maths aide en effet considérablement dans le franchissement des obstacles didactiques et épistémologiques, l'élève s'appropriant la connaissance visée en lui donnant un sens. "*Appuyé par*", pour introduire une dimension historique, culturelle et de réflexion dans notre enseignement, pour nos élèves, futurs citoyens.

BIBLIOGRAPHIE et autres lectures pertinentes :

- CHABERT Jean-Luc et al., Histoire d'algorithmes, Du caillou à la puce, éd. Belin, 1994
- DHOMBRES Jean et al., Mathématiques au fil des âges, IREM, Groupe "Épistémologie et Histoire", éd. Gauthier-Villars, 1987
- FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *Recherche inconnue désespérément, in* Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques, IREM, Ellipses, 1993
- IREM de Reims, Un fruit bien défendu: Les élèves face à un problème du XII°siècle, 1988
- SPIESSER Maryvonne, Équations du premier degré: Méthode de "fausse position", IREM de Toulouse, 1982
- WOLF M., *Méthode de fausse position*, Histoire des mathématiques pour nos classes, IREM de Strasbourg, 1991