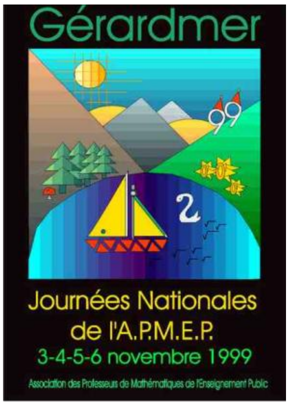


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier VA02
PLACE DE LA DÉMONSTRATION EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE

Richard Cabassut[1]

Dans cet article nous étudierons la place de la démonstration en France et en Allemagne, à partir de l'étude des programmes officiels d'enseignement des mathématiques dans le secondaire en France et en Bade-Wurtemberg, de l'étude de démonstrations proposées dans un manuel scolaire allemand, de sujets de baccalauréat allemand.

Quelques éléments généraux sur l'enseignement des mathématiques en Bade-Wurtemberg.

Nous étudierons les programmes de Gymnasium allemand, qui regroupe les élèves correspondant au collège et au lycée d'enseignement général français. Les élèves y sont donc orientés dès la fin de l'école primaire. On n'y trouve donc pas en principe des élèves se destinant à l'enseignement secondaire professionnel ou technique. C'est une grande différence par rapport à la France qui scolarise en collège unique la grande majorité d'une classe d'âge..

Nous nous limiterons à la région du Bade-Wurtemberg, frontalière de l'Alsace. Des variations de structures (durée des études et organisation du Gymnasium) et de programmes (notamment dans l'enseignement des mathématiques et le nombre d'heures) existent entre les différentes régions allemandes puisque l'éducation secondaire relève de la souveraineté de chaque région. En Bade-Wurtemberg la structure des classes est la suivante. On remarque que la scolarité en Gymnasium démarre une année plus tôt et se termine une année plus tard par rapport à la France.

[1] richard.cabassut@gmail.com

Nom de la classe en Bade-Wurtemberg	**Classe correspondante en France**	**Âge de l'élève en début d'année**	**Nombre hebdomadaire de séquences de 45 mn en Bade-Wurtemberg**
5	CM 2 (primaire)	10-11 ans	4 (plus 1 d'approfondissement)
6	$6^{ième}$	11-12 ans	5 (plus 1 d'approfondissement)
7	$5^{ième}$	12-13 ans	3
8	$4^{ième}$	13-14 ans	4 (plus 1 de technique de l'information)
9	$3^{ième}$	14-15 ans	4
10	2^{nde}	15-16 ans	4
11	$1^{ère}$	16-17 ans	4
12 si pas spécialité math.	Terminale L ou ES	17-18 ans	3
13 si pas spécialité math.		18-19 ans	3
12 si spécialité math.	Terminale S	17-18 ans	5
13 si spécialité math.		18-19 ans	5

Quelques observations sur les programmes de mathématiques :

- on mentionne la démonstration dès le début ($6^{ème}$- classe 6), mais en France c'est à propos des travaux géométriques tandis qu'en Bade-Wurtemberg c'est à propos de la divisibilité et des fractions;
- en classe 8 allemande apparait un long commentaire sur la démonstration dans le paragraphe " congruence et figure " et en classe 9 un paragraphe spécifique " découvrir et démontrer " fixe les objectifs pour la suite des classes; il y correspond le long paragraphe du texte d'accompagnement des programmes du cycle central français, $5^{ème}$ et $4^{ème}$; en $4^{ème}$ on énonce les propriétés caractéristiques par deux énoncés séparés: un énoncé et son réciproque;
- en Bade-Wurtemberg après les classes 8 et 9 on évoque la modélisation en classe 10, la récurrence en classe 12 ou 13, et un thème au choix de classe 13 est " Logique " ; la notion de preuve n'est pas directement évoquée: on parle de vérification de validité ou de pertinence, de traitements logiquement justes, de méthodes pour résoudre ou on propose dans les programmes des propriétés de cours à démontrer .; seulement en cours spécialisé de géométrie de classe 12 ou 13 on évoque précisément les méthodes de démonstration de théorèmes classiques de géométrie affine ou métrique (théorèmes du centre de gravité, de Thalès, de Ceva, de Ménélaus, ...).
- en France après la quatrième on étend les techniques de démonstration (équivalence en seconde, récurrence en terminale S), en insistant sur le rôle important de l'activité de résolution de problèmes.

Extraits de programmes de classe 8 et 9 :

Classe 8 :

Unité d'enseignement 2 : Congruence et figures.

Les élèves filles et garçons apprennent à connaitre la notion d'isométrie (Kongruenz) comme principe géométrique de classification et l'applique pour déduire les propriétés géométriques des triangles. Ils entrainent avec les problèmes de construction leur habileté dans la résolution de problèmes et développent des idées de résolutions autonomes. Ils apprennent à connaitre toujours *davantage les formes rigoureuses de justifications mathématiques jusqu'à la preuve* et font ainsi l'expérience de l'interaction entre la conclusion logique et la compréhension perceptive de relations géométriques comme ressort de la pensée mathématique.

	Notion des techniques de démonstration comme définition, hypothèse, affirmation, preuve, proposition et proposition réciproque, généralisation d'une proposition, affirmation universelle et sa négation, preuves directes et indirectes sont à partir de la classe 8 à développer comme exemples adaptés. → Allemand, travail 1 : argumenter
Isométries et leurs propriétés (Réalisation de translation et de rotations à partir de symétries axiales) Isométries de figures (Présentation d'une isométrie donnée au moyen de symétries axiales.) Théorèmes d'isométries du triangle Cercle, disque. Centre de gravité et orthocentre d'un triangle Constructions de triangles et leurs descriptions Le quadrilatère et ses cas particuliers ...	Ici est une opportunité intéressante pour les élèves de développer *l'idée de preuve* de manière autonome. Ici on peut s'occuper en particulier de *propositions réciproques, de preuves tout comme de la dépendance logique des propositions*. (classification locale)

Classe 9 :

unité 5 : Découvrir et *démontrer*

Dans le champ des problèmes intéressants les élèves prennent conscience des méthodes mathématiques. Par l'expérimentation créative - individuelle ou en groupe - ils découvrent de nouvelles propriétés, recherchent des *arguments pour les démontrer* et sont stimulés pour rechercher la portée des énoncées par rapport aux possibles généralisations ou des cas particuliers. Rétrospectivement ils découvrent des heuristiques et des stratégies typiques de la résolution mathématiques. Par la fréquentation de domaines complets de problèmes ils s'entrainent à aller droit au but et à maintenir le cap. Ainsi ils seront conduits à travailler de manière autonome des textes mathématiques.

Théorème de l'angle inscrit Expérimenter, conjecturer, *démontrer*, généraliser. Stratégie de résolution de problèmes et de *démonstration*. (Le nombre d'or) Travailler avec des textes mathématiques	Etudes de thèmes en rapport avec les théorèmes sur les angles dans le cercle, le théorème de Pythagore et les théorèmes de Ceva. Egalement les théorèmes de calcul. (Relation avec la nature et l'art) Penser également à des textes historiques. Devoir à la maison en mathématiques

Exemples de théorèmes ou propriétés cités dans les programmes:

	France		Bade-Wurtemberg
5^{e}	Caractérisation angulaire du parallélisme	7	Angles formés par deux parallèles et une sécante: propriétés réciproques également possible. Ici on peut introduire la dépendance logique.
5^{e}	Somme des angles d'un triangle	7	Somme des angles d'un triangle et d'un quadrilatère.
4^{e}	Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle	7	Théorème du triangle inscrit dans un cercle et de côté un diamètre (*Satz des Thales*)
T	triangles isométriques	8	Figures isométriques ; théorème d'isométries des triangles
		8	Cercle, disque, centre de gravité et orthocentre: on a ici une occasion judicieuse pour les élèves de développer de manière autonome l'idée de démonstration
5^{e}	Parallélogramme. propriétés relatives aux côtés, aux angles et aux diagonales.	8	Le quadrilatère et ses cas particuliers: Ici on peut s'occuper en particulier de *propositions réciproques, de preuves tout comme de la dépendance logique des propositions*. (classification locale)
4^{e}	Distance d'un point à une droite.		
		9	Incomplétude de l'ensemble des nombres rationnels
1ère ES S	Résolution d'une équation du second degré	9	Résolution d'une équation du second degré [Formule de Viete : somme et produit des racines d'un trinôme]
		9	Approximation par itération de la racine carrée par dichotomie et par la méthode de Héron
4^{e} 3^{e}	Théorèmes des parallèles dans un triangle, théorème de Thalès	9	Théorème des parallèles
3^{e}	Composition de deux translations, de deux symétries centrales		
2nde	Triangles de même forme	9	Similitudes et leurs propriétés Similitude des figures, notamment les triangles.
4^{e}	Théorème de Pythagore et sa réciproque	9	Théorème de Pythagore et sa réciproque
3^{e}	On généralisera le résultat relatif à l'angle droit établi en classe de 4^{e}	9	Théorème de l'angle inscrit
		10	Circonférence du cercle et aire du disque et leur calcul
5^{e} et 4^{e}	5^{e} : Prismes droits, cylindres de révolutions 4^{e} : Pyramide et cône de révolution	10	Volumes du prisme droit, du cylindre, de la pyramide, du cône, et de la sphère.
		12 13	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Nous traduisons les termes allemands "Kongruenz" par isométrie et "Ähnlichkei " par similitude. Cependant il semblerait que la géométrie des isométries et des similitudes soient plus celles des transformations en France alors qu'en Allemagne on étudie davantage les figures statiques, en comparant longueurs, angles, et en utilisant beaucoup le théorème des parallèles (le théorème de Thalès français) et les agrandissements ou les réductions.

Exemples de démonstrations concernant le cercle, extraites d'un manuel de classe 10.

On résume ces démonstrations en citant les passages cruciaux.

On démontre que le rapport entre l'aire d'un disque est le carré d'un rayon est constant.

Pour cela on considère deux cercles semblables dans le rapport de leurs rayons. On inscrit dans chacun des cercles un polygone régulier à n côtés. Ces deux polygones réguliers sont également semblables dans le rapport des rayons, leurs surfaces sont alors semblables et le rapport de leurs aires est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants. " Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques " que le rapport des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants.

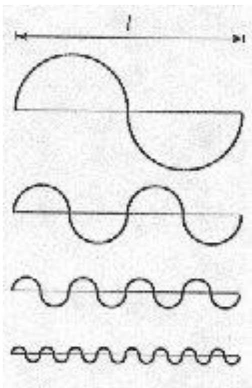
Ce rapport constant est défini comme étant le nombre π .

Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de pi (méthode d'Archimède,...)

On démontre ensuite la formule de l'aire du disque. On décompose le disque en 2^n secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former un figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure ci-jointe.

" On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon " Comme l'aire du rectangle recomposée est l'aire du disque, et comme on a précédemment démontré que l'aire du disque vaut pi fois le carré du rayon, on en déduit que la circonférence du cercle vaut pi fois le diamètre.

On signale cependant par la figure ci-contre qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment



Les démonstrations précédentes concernant l'aire et la circonférence du cercle illustrent ce qu'Evelyne Barbin appelle les *démonstrations " pour éclairer "* qui expliquent l'heuristique employée et qui peuvent s'opposer aux démonstrations " pour convaincre " très rigoureuses. On peut reprocher à ces démonstrations " pour éclairer " le manque de rigueur dans les passages à la limite : vaut-il mieux admettre le résultat ou le vérifier expérimentalement par des mesures ou proposer une *démonstration véritable propédeutique* à l'enseignement des limites ?

Exemple de sujet d'Abitur (baccalauréat) (série spécialité mathématique)

L'épreuve dure 4 heures et se compose de deux sujets: un sujet d'analyse choisi par le professeur de la classe parmi plusieurs sujets proposés dans le Bade-Wurtemberg (en général 3 sujets au choix), et un sujet de géométrie analytique choisi dans les mêmes conditions

Abitur 97 Spécialité mathématiques GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Relativement à un repère cartésien, pour chaque a de IR, on détermine les droites g_a et h_a :

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ r \in IR \text{ et } \qquad h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ a \\ -5a \end{pmatrix} ;\ r \in IR$$

La sphère K a l'équation: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 27 = 0$.

a) Déterminer le point d'intersection de g_1 et h_1 .
Sous quel angle se coupent ces droites?
Quel est le centre et le rayon de la sphère K?
K coupe g_1 en un segment.
Déterminer sa longueur.

b) Déterminer une équation de la droite s qui coupe perpendiculairement les droites $g_0$et h_0 .
En quels points s coupe les droites g_0 et h_0 ?
Donner le centre et le rayon de la sphère centrée sur la droite s, tangente aux droites $g_0$et h_0 .
Il y a deux sphères tangentes aux droites g_0 et h_0 et de centres $M_b(b;1;0)$,b appartenant à IR .
Déterminer le centre de chaque sphère.

c) Justifier que le plan F d'équation $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ coupe la sphère K en un cercle k .
Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle k.
Il y a un point P à l'extérieur de K, tel que toutes les tangentes à K passant par P sont tangentes à K en un point de k.
Déterminer le point P.

d) Montrer que dans tout parallélépipède de base carrée toute diagonale spatiale est orthogonale à une diagonale de la base.

Commentaires :

Ces énoncés mettent en œuvre beaucoup de calculs ou d'algorithmes, compte tenu qu'il s'agit d'une épreuve de géométrie **analytique**. Ces mises en œuvre constituent-elles des démonstrations ?
Les quelques questions où sont mis en œuvre des raisonnements à plusieurs pas déductifs sont :
- la question b) où l'élève ne dispose pas du produit vectoriel qui n'est pas au programme,
- la question c) pour déterminer les points M_b, et notamment pour déterminer le point P (où le raisonnement commence à être complexe),
- la question d), indépendante de toutes les autres questions, qui en principe est résolue par une méthode de géométrie analytique (choix judicieux d'un repère orthonormé).

Abitur 98 Spécialité mathématiques ANALYSE

Pour chaque a>0 on définit une fonction f_a par $f_a(x)$=.1-2a/(exp(2x)+a) pour x réel.
On note K_a sa courbe.

a) Etudier la courbe K_a.
Montrer que K_a admet S(ln(a)/2 ; 0) comme centre de symétrie.
Tracer K_4 dans un repère adapté.

b) Montrer que pour tout x de **R** on a : $0< 1 - f_4(x) < 2/\exp(x)$.
La courbe K_4 limite, avec l'axe (Oy) et la droite d'équation y=1 une surface ouverte vers la droite.
Montrer à l'aide de l'inégalité précédente que l'aire de cette surface est finie.

c) déterminer la valeur b pour laquelle f_a vérifie l'équation différentielle
$f'_a(x)=1+b(f_a(x))^2$ (*) .
Déterminer l'ensemble des valeurs de f_a.
Soit pour a>0 la fonction g_a définie par $g_a(x)=f_a(x) + 1$, $x\in$ **R.**
Déterminer à l'aide de (*) et de la valeur trouvée pour b une équation différentielle pour g_a.
Quel est le type de croissance de g_a?
Justifier votre réponse.

d) La fonction h_a est définie par $h_a(x)$=2-2a/(exp(2t)+a) ; $t \geq 0$.
h_a décrit de manière approchée l'aire de la surface occupée par une culture de champignons (en dm^2) en fonction du temps t (en jours). 6 jours après le début de l'observation l'aire vaut 0,50 dm^2.
Déterminer a.
Quand l'aire vaut-elle 0,05 dm^2 ?
Déterminer pour, à l'aide d'un calcul d'intégrale, une valeur moyenne de l'aire le temps entre 6 et 36 jours après le début de l'observation de la surface occupée par la culture de champignons

Commentaires :

Ces énoncés mettent en œuvre beaucoup de calculs ou d'algorithmes, notamment reliés à l'étude des fonctions. Ces mises en œuvre constituent-elles des démonstrations ?
- la première inégalité en b) peut se résoudre en reconnaissant une identité remarquable,
- le type de croissance de g_a renvoie à un modèle étudié dans le programme : la croissance logistique.

Quelques questions en guise de conclusion

De manière générale les énoncés d'Abitur mettent en œuvre des démonstrations à niveau heuristique et à complexité limités, où les calculs ou algorithmes sont très présents. Parfois ces calculs, mettant en œuvre des situations avec des paramètres, exigent une grande rigueur dans la conduite des calculs. Enfin, comme dans le cas de la question d) de géométrie, on propose parfois une question indépendante demandant la démonstration d'un résultat théorique. Par exemple une question du sujet de 1998 était : montrer qu'un quadrilatère PQRS, pas obligatoirement plan, tel que PQ=PS et QR=SR, possède des diagonales orthogonales.

Mais les questions plus ouvertes ou à niveau heuristique plus élevé ont en général moins de points que les questions " traditionnelles ".

Quelle peut-être la place de la démonstration dans les sujets d'évaluation, compte tenu de la demande sociale en termes de réussite aux examens ?

Depuis les programmes de 1981 mis en place en seconde, la démonstration est présente plus à propos d'activités de résolutions de problèmes que dans des activités de cours théorique (où beaucoup est admis). Dans la réflexion française sur de nouvelles épreuves de baccalauréat avec des questions plus ouvertes ou dans la proposition de mise en place d'une option scientifiques en seconde, on peut voir le souhait de revaloriser l'activité de démonstration, notamment dans sa dimension heuristique. L'exemple allemand suggère une revalorisation de la démonstration dans ses dimensions culturelle et propédeutique.