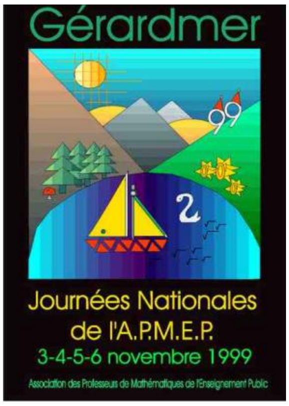

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. GÉRARDMER 3-6 novembre 1999

JM18
ENSEIGNER L'ANALYSE AUTREMENT : LA TECHNIQUE DE L'ENRICHISSEMENT CONCEPTUEL

Robert LUTZ[1], Université de Haute Alsace

INTRODUCTION

Depuis quelques années, nous expérimentons dans le cadre d'équipes IREM en Alsace et en Picardie un mode d'initiation à l'analyse mathématique fondée sur une approche radicalement nouvelle (bien qu'elle ait des racines historiques qui remontent au $17^{\text{ème}}$ siècle) de la notion de limite. Elle est fondée sur les progrès réalisés au $20^{\text{ème}}$ siècle en ce qui concerne notre compréhension de la nature et des fondements des mathématiques. Il ne s'agit pas d'une innovation à caractère pédagogique, mais d'un *changement de contexte* qui permet une didactique nouvelle. Les expérimentations menées en classes de seconde, première et terminale et récemment en premier cycle universitaire ont mis en valeur la fécondité de cette approche sur les plans suivants :

i. *appropriation du concept de limite, de dérivée, en phase avec l'intuition des élèves et le calcul à l'aide de machines, même dans le cas d'élèves généralement peu motivés par les mathématiques ;*

ii. *éveil au raisonnement logique à travers la discussion des concepts de base, la vérification de leurs propriétés et leur utilisation dans des démonstrations ;*

iii. *libération des élèves par rapport au légalisme et à l'absence d'initiative qui sont induits par l'étroitesse du contexte mathématique inhérent aux programmes en usage.*

iv. *instauration d'un dialogue vivant et souvent passionné à propos des nombres, entre le professeur et les élèves, et entre les élèves.*

On se rapproche ainsi de finalités que l'on pourrait assigner à l'enseignement des mathématiques : faire réfléchir et raisonner à propos des entités mathématiques abstraites et faire comprendre des techniques qui donnent prise sur le réel par la puissance de l'esprit humain. Il faut ajouter que les professeurs ont trouvé là un souffle de liberté et de fraîcheur fort apprécié ...

L'objectif de l'atelier était de mettre en évidence la nature et le contenu scientifique du changement de contexte proposé, et de faire repérer les points d'ancrage didactiques qui ont servi de référence aux expérimentations évoquées ci-dessus. Il s'agit donc *d'informer* les enseignants et non de fournir des leçons à traiter par les élèves. Par contre, l'atelier JA07 animé par A. Makhlouf et E. Meyer a proposé aux participants de passer à l'acte en leur faisant vivre quelques leçons typiques qui ont connu l'épreuve du terrain. Plusieurs collègues

[1] R.Lutz@univ-mulhouse.fr

qui ont mené l'expérimentation dans leurs classes étaient présentes parmi nous et ont partagé avec les participants les résultats de leur travail.

LE PROBLÈME DIDACTIQUE DE L'ANALYSE

L'analyse mathématique est difficile à enseigner pour deux raisons :

- l'incompatibilité sémantique entre l'idée intuitive de limite et sa modélisation formelle.
- la manière contravariante, par rapport au sens naturel hypothèse-conclusion avec laquelle on *élabore* un raisonnement d'analyse: on remonte de la conclusion à l'hypothèse par une chaîne de conditions *suffisantes* largement indéterminées à chaque pas. Bien sûr, *a posteriori*, on peut présenter la démonstration dans le bon sens, ce qui est trompeur, car il n'y a pas de méthode pour la trouver...

C'est pourquoi, sous la pression due à l'enseignement de masse, qui ne peut s'accommoder de ces difficultés, les concepteurs des programmes ont peu à peu vidé le concept de limite de sa substance : la définition est remplacées par un succédané formel sans justification scientifique où l'élève privé de toute référence intuitive se demande en permanence ce qu'il "a le droit de faire". Cette technique d'*appauvrissement conceptuel* est une forme d'escroquerie intellectuelle, involontaire mais réelle, envers les jeunes intelligences... Elle est inéluctable, car le problème n'a pas de solution dans le contexte mathématique en usage, quelle que soit l'excellence de la pédagogie. Seule une modification profonde de ce contexte peut ouvrir des perspectives nouvelles, où l'analyse aurait un caractère plus covariant, analogue à celui du calcul algébrique : l'élaboration d'un raisonnement doit consister à construire une chaîne de conditions nécessaires déterminées par des règles convenables. Un tel changement, s'il existe, est nécessairement paradoxal : alors que la tendance est d'appliquer de plus en plus vigoureusement la même technique, celle de l'allégement du contenu en restant dans le même contexte, un vrai changement ne peut qu'aller dans l'autre sens : *enrichir les mathématiques au lieu de les appauvrir, afin qu'elles deviennent plus faciles à pratiquer plutôt que moins pratiquées.*
Cela veut dire *qu'il faut changer quelque chose au contenu des mathématiques,* pas seulement à la façon de les enseigner. Cela veut dire construire, à partir d'axiomatiques à *caractère scientifique*, dont la signification épistémologique soit claire et la légalité logique sans faille, des enrichissements conceptuels des mathématiques qui formalisent les idées intuitives de manière sémantiquement proche, sans pour autant trahir les formalisations classiques.
Il est d'usage courant d'enrichir le langage mathématique en introduisant des abréviations. Ces extensions triviales augmentent le confort mental mais n'ajoutent pas de capacité modélisatrice nouvelle. Ici, il s'agit d'aller plus loin. Est-ce possible ? Pour s'en rendre compte, il faut une clé qui ouvre la porte !

LA CLÉ ÉPISTÉMOLOGIQUE DU BON MAÎTRE REEB.

On se place dans le contexte axiomatique de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (en abrégé ZF) qui est devenue la base officielle de la pratique mathématique depuis un bon demi-siècle. On trouve dans une extension par définition convenable de ZF une constante du langage nommée **N** et une liste de théorèmes qui recouvrent les " axiomes de Péano " et leurs conséquences. On pense avoir ainsi formalisé le concept empirique de " collection potentiellement illimitée des entiers naturels ", ces entités que l'on perçoit intuitivement en mettant des bâtonnets l'un derrière l'autre. A chacun de ces entier " vraiment naturels " on peut associer un élément de " l'ensemble **N** " (ce qui n'est qu'une façon de parler, car il n'y a pas d'ensembles dans la *théorie formelle* des ensembles) et lui donner si l'on veut un nom dans une extension par définition de ZF. Appelons *naïfs* les éléments de **N** ainsi associés à

nos assemblages de bâtonnets. La liste 0, 1, 2, 3, ..., 10000000000 est un faible échantillon constitué d'entiers naïfs, et il est évident que nous ne sommes pas capables d'écrire tous les entiers naïfs. D'où la question que le bon (et faussement ...naïf) maître Georges Reeb a colportée à travers le monde mathématiques dans les années 80 : *les entiers naïfs remplissent-ils* **N** ? Qu'en pensez-vous ?
En fait, la réponse n'est ni oui ni non. Mais plutôt *qu'il n'y a pas de question !*
En effet, si l'on voulait exprimer la question dans le langage de la théorie ZF, il faudrait écrire une phrase qui ne s'arrêterait jamais, du style « pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x = 0$ ou $x = 1$ ou … » .
Ceci suggère de formaliser l'affirmation *" il existe un entier plus grand que chaque entier naïf "* en adjoignant une constante ω au langage de ZF, mais cette fois sans lui associer une propriété caractéristique comme dans une extension par définition classique. On adjoint simplement le schéma d'axiomes (c'est à dire une recette pour fabriquer des axiomes) $\omega > n$ où n peut être remplacé par n'importe quel entier naïf. Alors, dans une démonstration au sein de la théorie enrichie, que nous appellerons ZFR, on n'utilise qu'une liste intuitivement finie des axiomes " externes " à ceux de ZF. Ainsi, *on ne change rien aux mathématiques qui peuvent s'exprimer par des formulations internes au langage de ZF*, mais on a de nouvelles formulations, dites *externes*, qui peuvent être des théorèmes de ZFR ou non. Mais un danger subsiste : qu'une formulation interne soit un théorème dans ZFR mais pas dans ZF. Dans ce cas, l'extension trahirait les mathématiques classiques "par excès". Mais il n'en est rien : si une formulation interne admet une démonstration dans ZFR, celle-ci n'utilise qu'un nombre intuitivement fini d'axiomes externes ; ceux-ci deviennent des théorèmes si on y remplace ω par un entier naïf assez grand (ajouter 1 au plus grand n qui apparaît dans la liste).
On dit que ZFR est une extension *conservative* de ZF car elle n'enlève ni n'ajoute aucun théorème exprimable dans le langage de ZF.
Le raisonnement métamathématique ci-dessus montre de manière minimale qu'il est possible d'enrichir le contexte mathématique dans une parfaite légalité du point de vue de la logique mathématique. Mais il suggère aussi que l'idée de *grand nombre* peut entrer dans ce contexte. La porte est ouverte à des enrichissements plus puissants qui satisfassent aux demandes évoquées plus haut. Nous allons examiner une extension progressive très naturelle qui s'est avérée fructueuse dans la pratique pédagogique.

INTRODUCTION DU CONCEPT D'ENTIER TRÈS GRAND.

L'extension consiste à adjoindre au langage de ZF la notion *d'entier très grand* et à la théorie ZF les axiomes suivants :

Axiome (A1) : *l'entier 1 n'est pas très grand.*

Axiome (A2) : *tout entier naturel plus grand qu'un entier très grand est très grand.*

Axiome (A3) : *si la somme de deux entiers naturels est très grande alors l'un des deux termes est très grand.*

Axiome (A4) : *si le produit de deux entiers naturels est très grand alors l'un des deux facteurs est très grand.*

Axiome (A5) : *si une puissance entière d'un entier naturel est très grande, l'exposant est très grand ou cet entier est très grand.*

Axiome (A6) : *il existe un entier naturel très grand.*

On prouve aisément que cette extension de ZF, que j'ai appelée ZFL en 1987 pour honorer Leibniz, est conservative. On peut donc fonder la pratique mathématique sur ZFL plutôt que sur ZF. Pour cela, on *définit* des notions d'ordres de grandeur concernant les nombres réels à partir de la notion d'entier très grand :

Définitions :

i. Un nombre réel est dit *très grand positif* si et seulement si il est supérieur à au moins un entier très grand. Son opposé est alors dit *très grand négatif*.

ii. Un nombre réel est dit *modéré* si et seulement si sa valeur absolue n'est pas très grande. Cela équivaut à dire que sa valeur absolue est inférieure à tout entier très grand.

iii. Un nombre réel est dit *très petit* si et seulement si, ou bien il est nul, ou bien son inverse est très grand en valeur absolue. Cela équivaut à dire qu'il est inférieur en valeur absolue à au moins un inverse d'un entier très grand et aussi que sa valeur absolue est inférieure à tous les entiers d'inverse modéré.

iv. Deux nombres réels sont dits si et seulement si leur différence est très petite. On écrit $x \approx y$.

Les axiomes ont pour conséquence les règles de calcul suivantes :

Théorème de Leibniz

i. modéré + modéré = modéré.

ii. modéré × modéré = modéré.

iii. très petit + très petit = très petit.

iv. très petit × modéré = très petit.

Les participants de l'atelier ont, non sans remettre en question quelques idées reçues, survécu au commentaire suivant :

1. *Il n'existe pas de plus petit entier très grand*

. En effet, d'après (A1) et (A3), un tel entier diminué de 1 serait encore très grand, car $n = (n - 1) - 1$. On montre de même qu'il n'existe pas de plus grand entier non très grand (ajouter 1 et conclure via les mêmes axiomes). Ainsi, la transition entre les entiers non très grands et les très grands est *floue* comme l'est toute transition d'une propriété héréditaire à son contraire (penser aux singes qui deviennent des humains : les paléontologistes, abusés par l'usage d'une mathématique sans ordres de grandeur, cherchent en vain les *chaînons manquants* entre les espèces vivantes !).

2. On constate ici que la récurrence ne s'applique pas à la propriété " être un entier modéré" : d'après la contraposée de l'axiome (A3) elle est héréditaire, c'est à dire passe de n à $n + 1$, et d'après (A1) et (A2) elle est vérifiée pour $n = 0$. Si la récurrence s'appliquait, on en déduirait que tout entier naturel est modéré, ce qui contredirait l'axiome (A6). Conclusion : on ne peut pas "récurer" n'importe quoi ! *La démonstration par récurrence est réservée aux propriétés internes au langage de ZF. Il ne faut pas confondre la récurrence avec l'idée intuitive de récurrence " potentielle ", où " l'on monte l'escalier aussi loin que l'on veut ".*

3. Aucune des propriétés externes de la définition ne définit un sous-ensemble du corps des réels. Il faut s'habituer à l'idée que si on sort de ZF, n'importe quelle propriété ne définit pas un sous-ensemble ! Seules les propriétés qui peuvent s'exprimer ne n'utilisant que le concept d'appartenance sont collectivisantes de manière formalisable dans ZF.

L'atelier s'est poursuivi avec la discussion d'une liste d'exercices de compréhension qui ont abouti à la mise en place d'une véritable analyse d'expressions numériques en termes d'ordres de grandeurs, qui prélude à l'analyse en termes de fonctions.

Évaluer l'ordre de grandeur d'un nombre réel signifie préciser s'il st très grand (positif ou négatif) où modéré, et dans ce cas très proche de quelque nombre que l'on peut nommer explicitement. Les règles de Leibniz permettent de déterminer l'ordre de grandeur de divers nombres réels obtenus par des opérations algébriques à partir de nombres dont l'ordre de grandeur est donné. Mais dans certains cas elles ne suffisent pas pour conclure directement : on dit que l'on a un *cas d'indétermination*. S'il s'agit de nombres obtenus par des constructions de type algébrique : sommes, différences, produits, inverses, puissances entières, racines *n*-ièmes, on lève l'indétermination en se ramenant aux formules de Leibniz par des calculs adéquats. S'il s'agit de nombres obtenus à l'aide des fonctions Ln, exp, sin, cos, il faut d'abord préciser les propriétés internes de ces fonctions qui servent de point de départ.
Une trentaine d'exercices a permis aux participants de constater le charme de cette analyse.

LE CONCEPT EXTERNE DE LIMITE

Jusqu'ici nous avons obtenu un contexte enrichi où l'on pouvait lever des indéterminations en raisonnant de manière covariante à partir de règles algébriques simples. Afin de poursuivre l'algébrisation de l'analyse, il s'agit maintenant de traduire les résultats obtenus dans le langage des limites de fonctions. Le contenu scientifique du résultat n'en sera pas plus grand, mais il faut bien se rapprocher des usages. Pour cela, il suffit de dire qu'*une fonction f(x) tend vers zéro au sens externe lorsque x tend vers 0* si et seulement si pour tout *h* très petit non nul, *f(h)* est très petit. Tous les autres cas de limites se ramènent à celui-ci par translation ou par inversion de *h* ou de *f(h)*.
On peut ainsi écrire des théorèmes généraux sur les limites et la continuité, et développer les notions de dérivée, de tangente et d'asymptote au graphe d'une fonction, d'intégrale, chacun de ces concepts étant accompagné de l'adjectif *externe,* avec l'inconvénient que ces objets ne sont pas définis de manière unique. En effet, une *limite externe n'est définie qu'à un réel très petit près*. Mais on a une véritable analyse sur les fonctions, conforme à l'intuition, où tous les résultats classiques ont une contrepartie aisément compréhensible et facile à démontrer. Par exemple, une fonction continue au sens externe sur un intervalle fermé [*a,b*] (c'est à dire telle que deux points très proches ont des images très proches) est comprise entre deux valeurs modérées telles que toute valeur intermédiaire est atteinte à une erreur très petite près. Pour démontrer ceci il suffit de raisonner sur les valeurs prises aux points $a+\frac{k(b-a)}{n}$ où *n* est un entier très grand et où l'entier *k* varie de 0 à *n.*

La suite de l'atelier a consisté à renforcer l'extension ZFL afin d'établir un pont entre cette analyse externe des fonctions et l'analyse classique en termes de limites. On introduit pour cela les concepts externes non définis de *réel explicite* et de *fonction explicite,* assortis d'axiomes convenables.
La plupart des participants à cet atelier théorique ont participé l'après-midi à l'atelier JA07.
Le contenu complet de l'atelier JM18, trop long pour être reproduit ici (une quinzaine de pages), a été diffusé aux participants.
Voir http://maths-03.site2.ac-strasbourg.fr/archives/maths_01/index.htm
et http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/24_article_166.pdf .

Références succinctes.

Lutz R. *Rêveries infinitésimales*, in *La Gazette des mathématiciens*, **34**, Oct.1987.

Lutz R., Makhlouf A., Meyer E. *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*. Brochure APMEP n° 103, 1996.

Lutz R. *L'enrichissement conceptuel pour enseigner l'analyse autrement*, in *Quadrature*, **34**, 1998.

Salanskis J.M. *Le constructivisme non-standard*. Presses Universitaires du Septentrion coll. Histoire des Sciences, Lille, 1999.