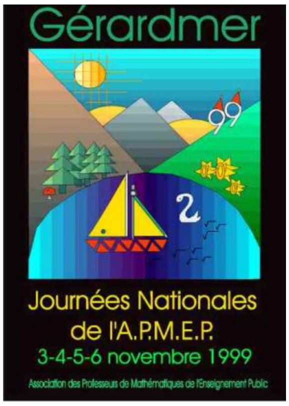


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier JM15
DE LA GÉOMÉTRIE SANS COMPAS, NI RÈGLE, NI LOGICIEL... : LES NŒUDS ET ENTRELACS

Christian HAKENHOLZ

1. Introduction

Au début était la géométrie, mais laquelle ? Sûrement pas la géométrie euclidienne, un peu moins la géométrie projective, un peu plus la topologie ?
Un cercle n'est-il pas le même objet qu'un carré ? Aux coins un peu arrondis peut-être, mais un carré.
La vision du monde d'un enfant n'est-il pas une vision topologique ? Ainsi les dessins d'enfant représentant un visage, tout le monde s'accorde pour dire qu'il s'agit bien de la représentation d'un visage, tout en ne souhaitant à personne de ressembler à ce dessin.
Cézane disait qu'il voyait partout dans la nature des sphères, des cylindres et des cônes mais peut-être pas en termes de géométrie euclidienne.
Pourquoi enseigne-t-on une géométrie qui est sans lien avec la vision naturelle du monde ? Quel est l'intérêt d'un tel apprentissage ? Ce sont des questions qu'on peut raisonnablement ce poser.
– Pour apprendre à raisonner ? Il semblerait que ça apprenne surtout à raisonner en géométrie. Et pour apprendre à raisonner il existe peut-être d'autres supports, par exemple le jeu d'échec, ou l'algorithmique, en cette fin de vingtième siècle.
– Pour la culture ? À quoi sert de savoir que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes ? Qui est arrivé à le placer dans une conversation ?
Et si la vraie raison n'était pas que c'est une géométrie facile à enseigner ? Depuis vingt siècles on a eu le temps de la mettre au point. Et certains enseignants (qui ne sont pas de l'APMEP) préfèrent une notion facile à enseigner même pauvre en intervention qu'une notion difficile à enseigner même riche en intervention.

II Présentation théorique

Définitions : – Un nœud est une courbe fermée de l'espace, c'est à dire l'image par une injection continue du cercle unité de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$.
En clair : un nœud est une ficelle dont on a soudé les deux extrémités.
– Un entrelacs est la réunion de plusieurs nœuds de l'espace.
– Deux nœuds sont équivalents s'ils sont homotopes.
En clair : deux nœuds sont équivalents si on peut leur donner la même forme sans couper la ficelle.
Le problème numéro un est de reconnaître si deux nœuds sont équivalents.

Exemple : le nœud trivial (une ficelle formant un simple anneau) peut avoir plusieurs formes non triviales (une corde emmêlée est rarement un nœud).
Exemple : quelques exercices du rallye de Nice.

Voir figure en annexe 1

Exemple : un nœud est-il équivalent à son image dans un miroir (c'est à dire celui que l'on obtient en inversant le sens dessus dessous des croisements) ? Oui pour le nœud en 8, non pour le nœud de trèfle.
Pour un classement des nœuds on utilise un premier invariant : le nombre minimal de croisements obtenu parmi les diverses représentations de ce nœud, le nombre de représentations est certes infini, mais il existe ce nombre minimal, de façon théorique au moins, c'est une autre affaire de le trouver. Le nombre minimal de croisements est l'ordre du nœud.

Résultats :
– Il existe un seul nœud d'ordre 0, le nœud trivial.
– Il n'existe pas de nœud d'ordre 1 ou 2 (essayer), mais 1 entrelacs d'ordre 2.
– Il existe un seul nœud d'ordre 3, le nœud de trèfle, et un seul d'ordre 4, le nœud en 8 (trouvez-les)
– Il existe plusieurs nœuds à n croisements, pour n > 4.
Pour reconnaître de façon certaine un nœud, il existe un outil de spécialiste : le groupe de Poincaré du complément du nœud dans l'espace. Exemple pour le nœud trivial : il s'agit des classes d'homotopie du complémentaire du cercle, il s'agit de **Z**, ce qui parait bien compliqué pour un nœud trivial. Mais dès le nœud suivant, le nœud de trèfle, les affaires se compliquent sérieusement, et le groupe obtenu n'est pas simple à décrire : il n'est pas commutatif, et engendré par 3 éléments x, y et z qui vérifient les relations $x\,y = y\,z = z\,x$.
En ce moment il y a la chasse aux invariants plus simples : le premier invariant historique est le polynôme d'Alexander du nœud qui est définit de façon univoque à partir d'une représentation du nœud, sachant qu'il est indépendant de la représentation choisie. Il caractérise en quelques sortes le groupe de Poincaré. Il n'est pas trop difficile à calculer surtout si on a un bon calculateur.
Malheureusement, deux nœuds non équivalents peuvent avoir le même polynôme d'Alexander. Exemple : en 1957, il a été trouvé un nœud d'ordre 11 ayant le même polynôme d'Alexander que le nœud trivial. Et il faut bien reconnaître qu'essayer de montrer que deux nœuds sont équivalents se fait plus facilement avec une ficelle dans les mains, qu'en calculant leur polynôme d'Alexander ; d'où la recherche d'autres invariants.

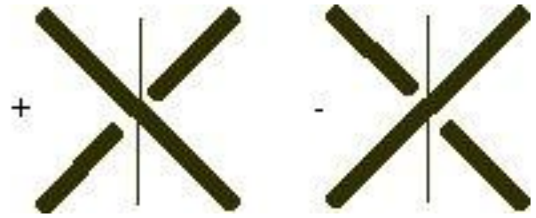
II Présentation pratique

– Voilà une liste de nœuds et entrelacs jusqu'à 7 croisements, voilà une ficelle, refaites tel ou tel nœud :

Voir figure en annexe 2

– Voilà des nœuds à quelques croisements, retrouvez les donc sur la liste.
– Le graphe d'un nœud : une courbe tracée sans lever le crayon sur une feuille de papier, en revenant au point de départ et sans passer plus de deux fois par le même point. Avec n sommets, combien d'arêtes ? ($2n$) combien de régions ($n + 2$)
– En inversant le sens dessus dessous d'un croisement d'un nœud d'ordre n, quel nœud obtient-on ?
– Faites vos nœuds : la méthode Celte, on part du graphe d'un nœud (7_6 par exemple), et on construit son graphe dual de la manière suivante :

* Colorier les régions à la manière d'un damier, la région extérieure étant blanche.
* Placer un sommet dans chaque région noire. (il y en a 7)
* Relier chaque sommet à ses sommets voisins via les croisements. (il y a 7 arêtes)
* Signer chaque arête suivant le sens du croisement.

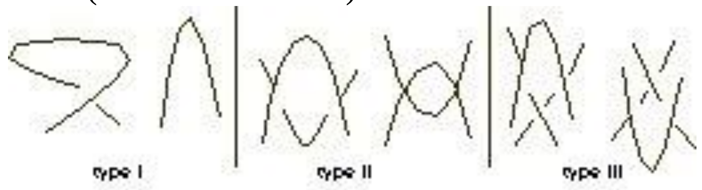


À l'inverse, partir d'un graphe quelconque à 7 arêtes signées :

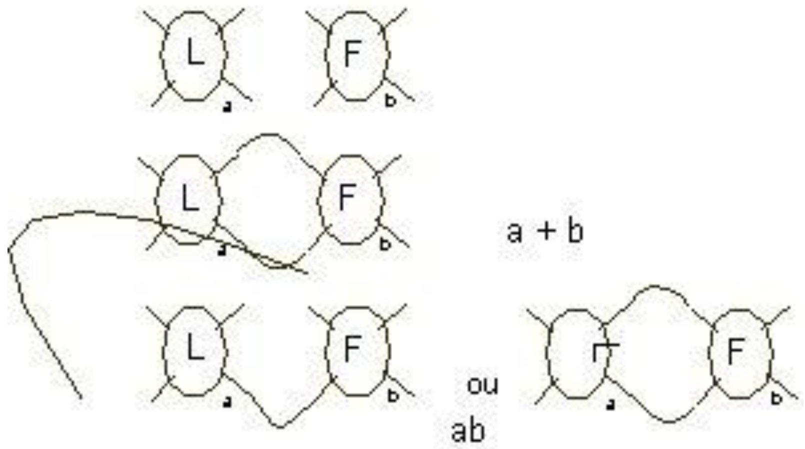
* Installer un croisement sur chaque arête, suivant le signe de l'arête.
* Relier chaque brin d'un croisement au brin voisin suivant l'algorithme de la main sur le mur. On obtient un nœud (ou entrelacs) à 7 croisements au plus que vous allez me faire le plaisir de reconnaître sur la table des nœuds.

III Pratique et théorique

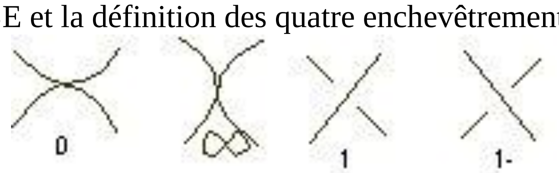
En partant d'un sac de nœuds, on peut isoler un enchevêtrement, un paquet de croisements d'où partent quatre brins, nommés NW, NE, SE, SW.
Deux enchevêtrements sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite de mouvements élémentaires (dit de Reidemeister) suivant :



Un nœud est un rassemblement d'enchevêtrements, suivant deux lois de composition :



Pour cette dernière loi, on nomme le premier enchevêtrement par le nom est son symétrique par rapport à l'axe NW-SE et la définition des quatre enchevêtrements de base :



On note 1 + 1 + ... + 1 (*n* fois) = n et 1- + 1- + ... + 1- (*n* fois) = n-, enchevêtrement dit <u>entier</u>.
Un enchevêtrement <u>rationnel</u> est un produit d'enchevêtrements entiers.

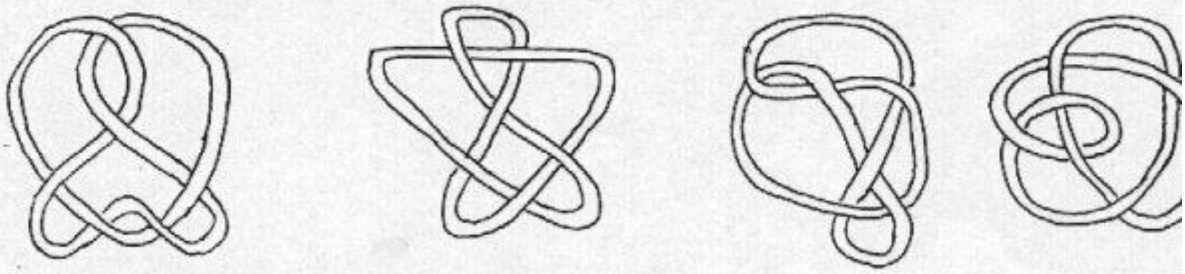
Exemple : construire 2(3-)2 et 2111.
Notation pour la juxtaposition : t0 + ... + m0 est noté (t, ..., m).
On pourra vérifier que :
l + 0 = l = 0 + l, que 1 + 1^- = 0, que 1 + ∞ = ∞ et que ∞ + 1 = ∞
À chaque enchevêtrement rationnel ijk ... mn est associé la fraction continue unitaire [n, m, ..., k, j, i] {on notera l'inversion}.

Résultat :
Deux enchevêtrements rationnels sont équivalents ⇔ leurs fractions continues associées sont égales.
Conséquences :
– Il existe une bijection canonique entre les enchevêtrements rationnels et les nombres rationnels, qui à chaque enchevêtrement rationnel fait correspondre la fraction continue associée.
– À chaque enchevêtrement rationnel ijk ... mn est associé une fraction continue standard unique [n, m, ..., k, j, i] avec $|i| \geq 2$, et n, m, ..., j sont de même signe. Exception des quatre enchevêtrements de bases.
Exemple : 2(3-)2 et 2111 définissent le même enchevêtrement.

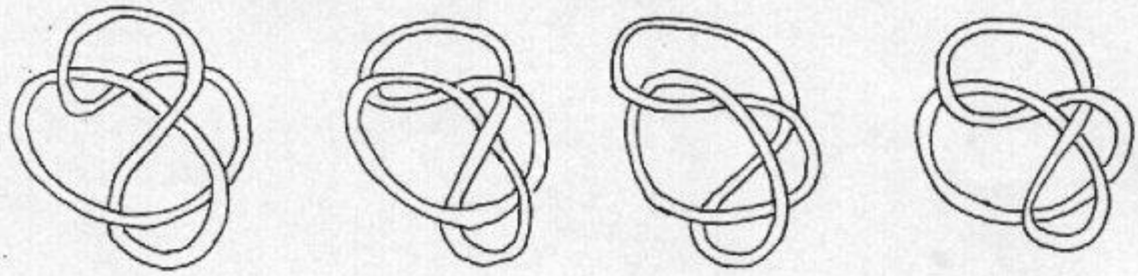
Voir annexes pages suivantes

ANNEXE 1
(Quelques exercices du rallye de Nice)

Exercice 1 : Chaque dessin ci-dessous représente une ficelle dont les deux extremités ont été soudée après y avoir fait un noeud. En fait deux dessins représentent la même ficelle mais placée différemment, lesquels ?

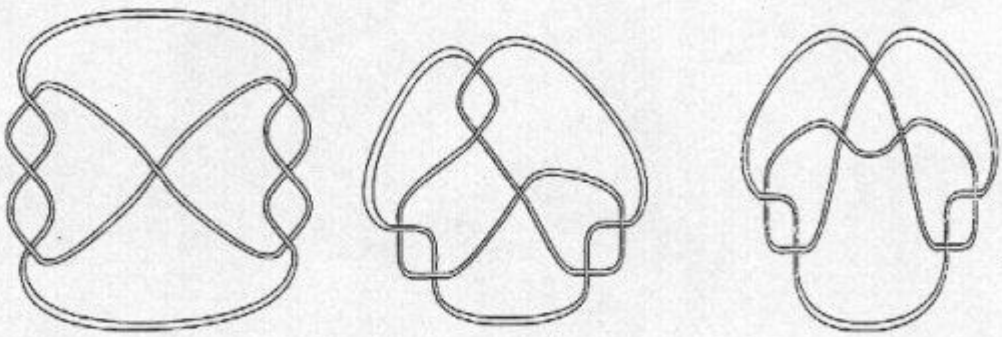


Exercice 2 : Chaque dessin ci-dessous représente une ficelle dont les deux extremités ont été soudée. Deux ficelles seulement ont été nouées, les deux autres peuvent être déplacées pour former un anneau, lesquelles ?

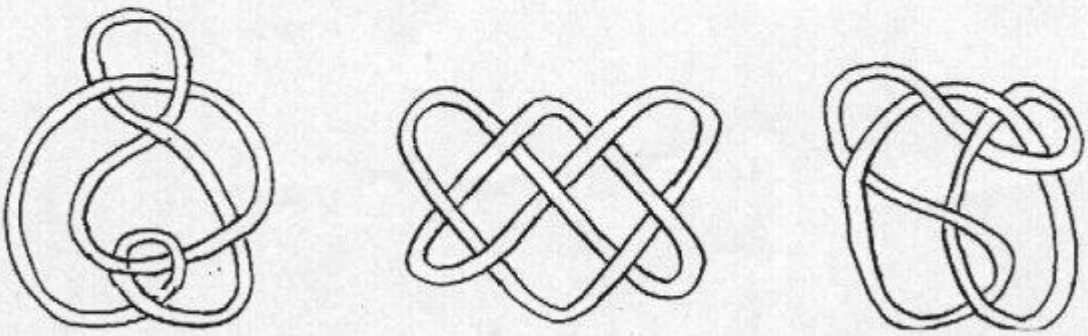


Exercice : Voilà trois noeuds différents :

A B C



ils sont représenté sous une forme différente ci-dessous, reconnait-les.



ANNEXE 2

(Liste de nœuds et entrelacs)