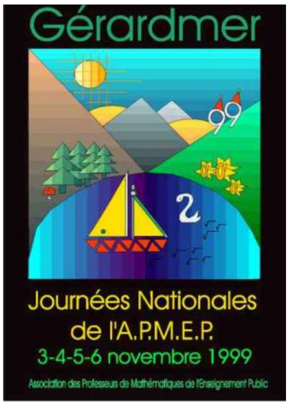

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Ateliers JM13 et JA16
Comment découper une lemniscate en N parties égales

Jean-Pierre Friedelmeyer[1], IREM de Strasbourg

Les problèmes que rencontre un historien des sciences varient beaucoup selon l'époque sur laquelle il travaille. Si celle-ci est très éloignée de l'époque actuelle, les difficultés tiennent principalement à la langue et à l'étrangeté d'une culture scientifique et philosophique qui se pense et s'exprime de manière très différente de la nôtre. Ce type de problème s'estompe au fur et à mesure que l'on se rapproche de la période actuelle : le langage, l'utilisation du symbolisme sont proches des nôtres, mais par contre les difficultés liées à la complexité et à l'abstraction des concepts deviennent dominantes. Ainsi les mathématiques du 19^e siècle nous sont beaucoup plus proches dans leur style et leur écriture que celles des siècles précédents, mais la compréhension des idées et des méthodes qu'elles ont développées, demande un effort de réflexion important à quiconque n'est pas un professionnel de la recherche et de l'enseignement supérieur. Faut-il donc que le non professionnel en prenne son parti et renonce définitivement à accéder à la compréhension des plus belles théories mathématiques des 19^e et 20^e siècles, c'est-à-dire en fait de ce qui est considéré par de nombreux chercheurs d'aujourd'hui comme les seules mathématiques dignes de ce nom ? Nous pensons que non, et que l'histoire peut être une voie d'accès à ces théories, dont l'origine est souvent un problème plus “ concret ”.

De ce point de vue, le problème de la division de la lemniscate est un lieu stratégique pour pénétrer par la petite porte dans quelques unes des théories marquantes du 19^e siècle, et par là d'en saisir l'origine :

- celle de la résolution des équations algébriques comme moteur de l'émergence du concept de groupe,
- celle des fonctions elliptiques au centre de l'élaboration des fonctions de variable complexe,
- celle des intégrales abéliennes.

C'est un bel exemple pour voir fonctionner la liaison de plus en plus étroite au 19^e siècle entre les domaines de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, et même de l'arithmétique.

C'est enfin un problème exemplaire de la création mathématique actuelle. Jusqu'au 18^e siècle, l'invention mathématique se faisait par abstraction progressive d'une réalité ancrée d'abord dans l'activité quotidienne.

Pour prendre un exemple précis, l'astronomie et de multiples activités pratiques ont conduit à la trigonométrie. Celle-ci, en se développant, est fécondée par l'analyse des fonctions et aboutit à l'étude des fonctions circulaires et finalement à celle de leurs fonctions réciproques, lesquelles s'avèrent d'excellents outils d'intégration des fonctions algébriques de la forme $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, où R est une fonction rationnelle. Au 19^e siècle, la démarche est inverse. Divers problèmes posent la question de l'intégration d'expressions du type $R(x,\sqrt{P(x)})$, où P(x) est un polynôme de degré trois ou quatre. Or le matériel des fonctions disponibles pour traiter cette question est insuffisant. Que faire ? Le mathématicien va construire l'objet nécessaire à cette résolution à partir de la question posée et développer une théorie pour de nouvelles fonctions, sur le modèle des fonctions circulaires, mais en empruntant le chemin inverse. L'intégrale est première ; elle donne lieu, par inversion, à une nouvelle classe de fonctions dites elliptiques, avec leur “ trigonométrie ” et de multiples applications en mathématiques, en physique, en mécanique ; avec, bien sûr, la rencontre de nouveaux problèmes inédits mais stimulant l'imagination des mathématiciens .

---

[1] jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr

Chercher à diviser une lemniscate en parties égales, qui plus est, à la règle et au compas, peut apparaître comme une activité dérisoire, un peu folle aux yeux du grand public, au même titre d'ailleurs que de diviser un cercle ; encore que là, cela lui paraît déjà plus utile, peut-être aussi parce qu'il comprend mieux la question . Mais, c'est souvent à partir de petits problèmes de ce type que les mathématiques ont fait les avancées les plus significatives et les plus spectaculaires : les *Recherches arithmétiques* de Gauss qui se terminent par le problème de la division du cercle, sont l'un des chefs d'œuvres définitifs de la littérature mathématique. Dans l'introduction à un texte qui s'occupe justement de la lemniscate[2], Euler explique qu'il y a deux manières de considérer l'utilité de ce qu'il appelle les spéculations mathématiques :

D'une part celles qui offrent un intérêt marquant dans la vie ordinaire ou dans d'autres branches de la connaissance, et dont la valeur se mesure d'habitude à l'aune même de la grandeur de cet intérêt.

L'autre classe englobe les spéculations qui, sans présenter d'intérêt direct, sont cependant précieuses, car elles se proposent d'explorer les limites de l'Analyse et d'exercer les forces de notre esprit. Comme en effet un nombre important des recherches dont on peut attendre une grande utilité doivent cependant être abandonnées à cause des insuffisances de l'Analyse, il ne faut pas alors dévaloriser les spéculations qui promettent un progrès qui peut être considérable. De telles considérations semblent particulièrement utiles, qui pourtant étaient faites accidentellement et a posteriori, alors qu'elles avaient peu ou pas d'objectifs a priori. Mais lorsqu'on a reconnu leur exactitude, des méthodes plus simples se laissent trouver qui y conduisent, et il ne fait aucun doute que même dans la recherche de telles méthodes nouvelles, le champ de l'Analyse n'est pas peu agrandi. Des remarques de ce genre, qui ne reposent pas sur une méthode déterminée et dont le ressort interne semble caché, me sont apparues dans une publication toute récente.[3]

De fait, beaucoup de travaux du 19e siècle se sont engagés à propos ou autour du problème de la division de la lemniscate sans objectif précis, mais qui ont dégagé un ressort interne extrêmement fécond :

- Parce que cette division met en jeu des équations de degré élevé, (la division par n conduit à une équation de degré n^2-1) elle suscite les questions théoriques sur leur résolubilité, et de ce fait sur la résolution générale des équations polynômes. Vous avez là l'une des sources de l'algèbre moderne avec la théorie des groupes, des corps, des extensions de corps.
- Parce que cette division concerne une courbe qui n'est pas très simple (comme l'est le cercle), et dont la longueur s'exprime par une fonction que l'on ne sait pas exprimer au moyen des fonctions usuelles, elle oblige à construire un nouvel objet, la fonction elliptique, dont la richesse et les applications se révèlent inépuisables.
- Un des éléments de cette richesse est que la division de la lemniscate est plus simple si l'on passe par les nombres complexes. Par exemple diviser par 5 donne une équation de degré 24. Or 5 = (2 + i)(2 - i), et diviser par 2 + i ou 2 - i conduit à une équation du 4ième degré seulement . (En fait du premier degré en x^4). D'où deux conséquences : la nécessité de développer une théorie des fonctions de variable complexe ; l'attention portée à des questions d'arithmétique. (Penser à l'arithmétique des courbes elliptiques)

Beaucoup d'auteurs ont contribués à ces recherches qui ont dominé le 19e siècle et ont développé leurs ramifications jusqu'à aujourd'hui. Elles ont été initialisées pour la plupart par un jeune mathématicien norvégien : Niels Henrik Abel (1802-1829) dans son article : *Recherches sur les fonctions elliptiques*[4]
Le terme *Recherches*, rare à l'époque où l'on rencontre plutôt les mots *Mémoires,* ou *Éléments,* fait pendant au titre de Gauss *Disquisitiones,* lequel semble avoir exercé une véritable fascination sur le jeune Abel, comme en témoigne le rapprochement suivant :

Dans ses *Recherches arithmétiques,* (traduction française des *Disquisitiones)* section VII, intitulée *Des équations qui déterminent les sections circulaires*[5], Gauss fait en effet la remarque que :

Les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer, s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici ; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple à celles qui dépendent de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$.[6]

Cette remarque n'échappe pas à Abel qui dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* annonce :

Entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci : On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m *parties égales* <u>*par la règle et le compas seuls,*</u> *si* m *est de la forme* 2^n *ou* 2^n+1, *ce dernier*

[2] Euler, *Nouveaux commentaires de Saint Petersbourg* VI, 1761.
[3] Les travaux de Fagnano sur la lemniscate (voir plus loin).
[4] Publiés en 1827 et 1828 dans les volumes II et III du *Journal de Crelle.*
[5] Voir *L'Ouvert* n° 46 et 47, mars et juin 1987.
[6] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques,* traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris 1807.

nombre étant en même temps premier ; ou bien si m *est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle.*[7]

Dans cet atelier, nous nous sommes efforcés de dégager les idées principales d'Abel pour réaliser cette " lemniscatomie ", de façon suffisamment élémentaire pour ne pas avoir à mettre en place l'immense arsenal de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous sommes appuyés sur le texte d'Abel cité ci-dessus, principalement les paragraphes I à V et le paragraphe VIII, mais limités et adaptés à ce qui concerne la lemniscate.

Le détail de ce travail a été publié dans le bulletin vert de l'APMEP, N° 425, pp. 787-798 : « ***Lemniscatomie ou comment découper un lemniscate à la règle et au compas*** ».

[7] N. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques,* p. 314. Voir aussi la correspondance d'Abel citée dans les numéros 90-91-92 et 94 de *L'Ouvert,* dans l'article *L'histoire des mathématiques par correspondance*.