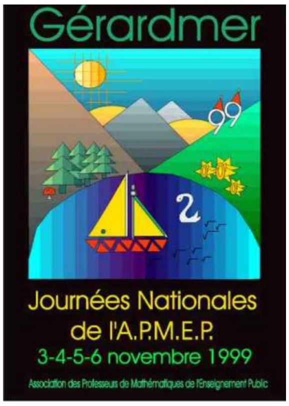


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

JM01
A LA RECHERCHE D'UNE CONDUITE EXPERT POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Marie-Pascale AUBERT

Notre sujet étant la recherche d'une conduite expert dans la résolution de problèmes, nous nous sommes placés dans la situation voulue pour cela. Qui dit conduite expert parle d'expert, qui parle problèmes pense souvent mathématiques, même si la résolution de problèmes intéresse toute notre vie, dans un cadre plus banal que le cadre scientifique.

Et où trouver des experts possibles pour résoudre des problèmes de mathématiques, sinon auprès d'enseignants ou de chercheurs en mathématiques ? Voilà le congrès de L'A.P.M.E.P. cadre privilégié pour ce genre d'acrobaties.

Nous nous sommes donc mis, lors de l'atelier, en situation de recherche de problèmes (décontextualisés), puis nous avons essayé de faire un bilan de la nature des procédures mises en œuvre par les uns et les autres.

Ensuite, nous avons considéré, très brièvement, des résultats [1] obtenus lors d'expérimentations menées avec des universitaires : enseignants ou chercheurs en mathématiques, d'une part et des étudiants en sciences, d'autre part. Certains des textes que nous avons considérés appartenaient au corpus de ces expérimentations.

Pour finir, disons que nous n'avons fait qu'esquisser quelques balbutiements sur la question de fond qui est la suivante : existe-t-il une conduite expert pour la résolution de problèmes ?

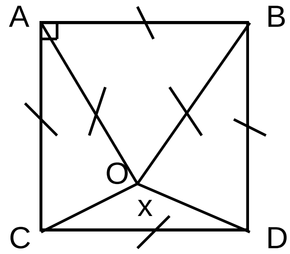
Cette question ne restera pas seule, elle en engendrera d'autres. Et si cette conduite existe, est-elle repérable, peut-on la définir, et enfin la transmettre ? Puis, qu'est-ce qui différenciera conduite-expert et conduite apprenti ? Quelles sont les conséquences de chacune ... Peut-on penser à une institutionnalisation de ce que l'on aura découvert ?

Nous ne pouvons ici, pour des raisons techniques, donner tous les textes distribués. En voici seulement un petit échantillon.

"*Une personne surveille deux métiers à tisser. La probabilité d'avoir à intervenir, en l'espace d'une heure, sur le premier métier, est de 1/7. La probabilité d'avoir à intervenir, sur le second métier, en l'espace d'une heure, est de 1/5. Quelle est la probabilité que la personne ne soit pas dérangée en une heure ?*" (T1)

"*Soient A et B deux ensembles, X et Y des parties de A, montrer que si X est contenu dans Y alors* $f^{-1}[X]$ *est contenu dans* $f^{-1}[Y]$" (T2)

"*Sachant que x désigne la mesure de l'angle CÔD.*



Calculer x." D'après Transmath 4° NATHAN 1990 (T3)

"*Dans la colo, au Tholy, dix enfants ont laissé en vrac leurs chaussures, à l'entrée du dortoir. Les dix paires sont mélangées. Le premier levé tire au hasard et sans remise quatre fois une chaussure. Quelle est la probabilité d'avoir une et une seule paire dans le lot des quatre chaussures ?*" (T4)

Pour la réflexion concernant ces textes, il est conseillé de se référer à des publications mentionnées dans la bibliographie [1], [2], [3]. Ici, nous nous limiterons à un seul texte, quant à la considération procédurale.

A partir d'un texte ...

Texte du problème (d'après le jeu de référence "Express, juillet 1999, n° 2505 p.25")

"*Dans le tableau ci-dessous, les lettres ont des valeurs entières comprises entre 11 et 23 (inclus) Deux lettres différentes ont des valeurs différentes.*
Nous connaissons la somme des valeurs des lignes, la somme est la même pour chaque ligne (68)
Nous connaissons la somme des valeurs des colonnes (51 pour chacune)

A	B	C	D	68
E	F	G	H	68
I	J	K	L	68
51	51	51	51	

B = 20 et L = 16 ;
de plus, G = 2 C, A = C + F,
A, C, E, H, I, J sont impairs.

Question : "*quel est le nombre compris entre 11 et 23 inclus qui n'est pas utilisé dans le tableau* ?"

Les amateurs de jeux et concours sont invités, maintenant, à se lancer dans la résolution de ce problème, à suggérer à leurs élèves de faire de même, puis à m'envoyer leur production ainsi que celles des élèves (feuilles de recherche, brouillons), et à ne lire ce qui suit qu'une fois l'expédition réalisée ...

Il y a fort à parier que si vous avez mis vos élèves dans le coup vous avez en partie connaissance de ce qui suit.

... proposé à tout public ...

Nous nous attacherons dans un premier temps à la reconnaissance des différentes procédures à l'aide d'une pré-expérimentation tout public.

Voyons donc un peu le déroulement des opérations.
Les petits rapides qui sont pressés d'en finir n'ont bien sûr pas lu le tout ou ne se sont pas

approprié toutes les données (il faut les excuser, il y en a plus d'une). Les voilà donc obligés de relire et de recommencer.

Certains commencent par s'organiser, après lecture et relecture soignées, en réécrivant le tableau de façon plus aérée.

A	B	C	D	
	20			68
E	F	G	H	
				68
I	J	K	L	
			16	68
51	51	51	51	

Ce dans le but d'écrire sous les lettres leur valeur. Ils gardent en vue la demande, de peur de s'égarer.

Au départ, il y a une démarche commune, et on peut considérer que l'ordre des tâches est à peu près identique, quelle que soit la nature de la procédure de résolution et en dépit de certains allers et retours entre lecture(s) et phases :

* analyse du texte et de ses données
* détection de la demande, du but
* sélection et organisation des données
* initiation de la procédure de résolution

... nous constatons ...

Cependant, on s'aperçoit que ces phases ne sont pas bien menées par tous. Il serait déjà envisageable, à ce stade, de faire mieux.

Au niveau de l'analyse du texte et des données qu'il comporte :
Nous avons un tableau de douze lettres
Chaque lettre correspond à une valeur
Deux lettres différentes ont une valeur différente
Le tableau peut être complété avec douze nombres
Ces douze nombres sont compris entre 11 et 23
Certains nombres sont impairs, on nous dit lesquels (ou presque)
Les valeurs respectives de deux lettres sont données
Deux équations sont fournies
Il manque dans le tableau un des nombres de la liste de 11 à 23

Et de la réflexion à initier :
La liste des nombres de 11 à 23 inclus contient en effet 13 nombres (vérification à effectuer), on me dit en utiliser douze (c'est bien le nombre des lettes du tableau).
Dans le tableau manque donc un des nombres de la liste
Je recherche la valeur du nombre manquant.
Au sujet de la parité : il y a 7 impairs et 6 pairs dans la liste des nombres de 11 à 23. Etc. ...

... l'existence d'une variété de démarches ...

Les démarches heuristiques sont multiples, on peut essayer de les classer, de façon un peu grossière, et sans exhaustivité, comme suit :

1- Démarche par tâtonnements

Pour trouver les valeurs, je constate différentes choses intéressantes, mais : " je ne sais vraiment pas quoi faire avec ça, je vais bidouiller, je vais suivre l'intuition ...". Pour un sujet participant à la préexpérimentation, cela a donné deux pages de calculs, d'ailleurs justes, quelques bonnes idées, mais pas de solution ... Et la solution d'échec pour un jeu de vacances ...

2- Démarche par essais successifs

Bien sûr, nous n'avons pas du tout envie de tester 10! arrangements de dix nombres (pris parmi onze qui de plus est) ! Cette démarche n'est pas envisageable ici. Mais on peut la rencontrer sous une forme allégée. Choix d'une valeur pour A, puis pour C et pour D de façon à obtenir un total de 68. Puis réitération pour la ligne suivante ... A vrai dire "c'est plus facile comme ça par colonne ... puisque je sais que B = 20, je prends F = 19 (impair) et donc J = 12 ... passons à la colonne de L ... " , ... Aïe, ça cloche, donc il faut modifier ... cela se termine en général par un abandon plus ou moins rapide. Pas toujours. Les obstinés, ça existe ... ; dans d'autres situations, on parlerait de persévérance !

Il existe, dans ce cas, une certaine organisation. A vous de jouer.

3- Démarche de type proactif.

A cet effet , je recherche tous les nombres utilisés et je déduis quel est le manquant.

Unicité de la solution (pour des "matheux")

Nous disposons de 11 équations et il y a douze inconnues :

$A + B + C + D = 68$	$E + F + G + H = 68$	$I + J + K + L = 68$	
$A + E + I = 51$	$B + F + J = 51$	$C + G + K = 51$	$D + H + L = 51$
$B = 20$	$L = 16$	$G = 2\,C$	$A = C + F$

Puisque deux des équations donnent directement les valeurs de B et de L, nous avons en fait 9 équations et 10 inconnues

Aurions nous plus d'une solution ? Nous connaissons, pour une inconnue auxiliaire éventuelle, une contrainte supplémentaire (valeur possible de 11 à 23). Nous avons une indication qui permet d'effectuer un contrôle ou une vérification des valeurs obtenues, s'il existe une solution au problème : les valeurs de A, C, E, H, I et J sont impaires.

Nous avons une technique bien élaborée pour résoudre ce genre de problème. Mais qui aura le courage de se lancer dans l'étude d'une matrice (9,9) ou (9,10). Si on préfère la méthode du pivot de Gauss, on a malgré tout du "pain sur la planche". Vous pouvez vous y essayer.

Il faut remarquer que cette démarche inclut un procédé, en général peu utilisé, celui du "passage au complémentaire". Je recherche ce que je vais éliminer, pour aboutir à la solution. Ceci est traité sous la forme de l'anecdote par E. de BONO [4].

4- Démarche de style "considération de l'objet de la conclusion" (peut mener au style rétroactif)

Je veux connaître le nombre manquant. Comment le caractériser par rapport à ce qui m'est donné?

Grâce aux valeurs de marges, je connais la somme des valeurs sur chaque ligne et sur chaque colonne. Je connais donc la somme des nombres utilisés. Et je peux calculer la somme des nombres de 11 à 23, c'est à dire la somme des nombres du tableau plus celui que je cherche. Le nombre cherché est la différence de deux sommes que je peux calculer sans peine.

La somme des sommes de lignes est 68 + 68 + 68 = 204

La somme des sommes de colonnes est 51 + 51 + 51 + 51 = 204

Je connais donc la somme des nombres utilisés. Il y a égalité, c'est heureux. Il n'y a pas impossibilité à ce niveau.

La somme des nombres du tableau est donc 204.
Et la somme des nombres de 11 à 23 est 221

Les matheux n'auront pas fait l'addition ou utilisé de calculatrice, ils auront, avec élégance, écrit : $S = S_{23} - S_{10}$,
où S désigne la somme des nombres du tableau et S_n la somme des *n* premiers entiers, à savoir *n (n+1)/2*.

Il s'ensuit que le nombre cherché est 221 - 204, donc **17**. Ou alors il n'y a pas de solution.

... qui peuvent se compléter ...

Nous remarquons une fois de plus le côté performant de ce type de procédure pour ce qui est du temps utilisé. Mais l'envers de la médaille (ou du tableau) : nous n'avons pas l'exhaustivité quant aux valeurs des nombres du tableau.
Là, les curieux, ceux qui veulent tout savoir, sont brimés. D'où, pour en savoir plus, un nouvel épisode, avec une méthode proactive.

Lors des expérimentations, on constate que les procédures heuristiques ne sont pas clairement typées. Sauf exception et pour des sujets qui savent comment s'y prendre par expérience de vécus antérieurs. Et alors il y a réinvestissement, plus ou moins conscient, des essais heuristiques testés ...

... sans s'exclure.

En fait, il est indispensable de maîtriser les différentes procédures, face à une situation décontextualisée, pour être capable d'utiliser les connaissances acquises dans des situations variées.

Vous pensez peut-être "à quoi bon tout cela ?".

Un objectif à atteindre ...

Quel est l'enseignant qui peut dire que tous les élèves ou étudiants avec lesquels il travaille sont habiles dans la résolution des problèmes qui leur sont soumis ?

Pour ma part, je n'ai rencontré, depuis plusieurs décades, que des personnes disant ne pas savoir comment s'y prendre pour résoudre un problème (décontextualisé et dépourvu d'indications concernant le mode de résolution) ou muettes et totalement désemparées. J'ai pris conscience, très vite, que nous donnions toujours ou presque à nos élèves des démonstrations achevées, policées. En fait, il n'y a que rarement, analyse et transmission de la démarche heuristique (démarche de recherche) qui mène au succès. Bien sûr, je ne parle pas ici de l'enseignement de procédures de type algorithmique (comme par exemple : la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré ou le calcul d'une intégrale par la technique d'intégration par parties, etc.)

Il est vrai que le temps manque pour travailler, comme on pourrait le souhaiter, en recueillant tous les embryons de réflexion, d'organisation, de traduction ou d'analyse de texte, voire de s'assurer que la lecture d'un énoncé s'est effectuée correctement. Il est très tentant, à cette époque de course contre la montre et de promotion de la vitesse, de lire en diagonale. Mais ce n'est pas un gain de temps.

Et ne pas comprendre un texte est monnaie courante pour plus d'élèves qu'on ne le croit. Je viens encore d'en avoir confirmation avec des étudiants de DEUG 1° année ...

Quant à éduquer à la recherche performante et à transmettre des méthodes pour ce faire, nous n'en sommes pas là. Encore faudrait-il croire que cela existe, puis voir que cela existe et mettre en évidence que cela existe pour notre public d'enseignés.

Cet objectif n'est pas facile à atteindre. Pourquoi ? Parce qu'il faudrait déjà savoir ce qu'il est possible de transmettre. Une fois la réponse donnée au "quoi" et même au "pourquoi", restent encore le AQQOC (à qui, quand, où, comment).

Voici déjà quelques éléments susceptibles de lancer une réflexion sur les deux premiers points.

... grâce à des résultats ...

Depuis plusieurs années, j'ai proposé, à des publics divers, de résoudre des jeux et des problèmes de niveaux variés. Pour les enseignants et chercheurs la résolution, dans certains cas, s'est effectuée au cours d'entretiens individuels, ce qui a permis de suivre point par point toute la démarche heuristique.

Il ressort de l'analyse de certains corpus recueillis, quelques éléments intéressants en soi et par comparaison avec les corpus d'étudiants et d'élèves.

... mettant en évidence un comportement spécifique ...

En voici un aperçu.

En premier lieu, il est à noter la qualité d'attention portée lors de la lecture des textes, ainsi que la répétition ou le ralentissement dans la lecture concernant les points importants et notamment ce qui intéresse la demande ou le but de l'exercice (ce qu'il faut démontrer).

Ensuite, vient la demande de précision ou la critique du texte. Ceci est repéré aussi chez les étudiants performants.

Puis on constate une capacité de souplesse d'esprit avec l'utilisation de plusieurs procédures et même d'hyper-souplesse" chez les chercheurs. Cette souplesse est jumelée à une adaptation procédurale selon les cas considérés.

Quand il y a rigidité, c'est par choix délibéré pour une méthode considérée comme performante, parce qu'éprouvée telle par l'expérience.

Sont également remarquables : la capacité de dégagement de règles, d'une part, et l'exercice d'un contrôle sur la démarche procédurale, au cours de son déroulement, d'autre part. Ceci est très exceptionnel chez les étudiants.

On voit aussi des habitudes de notation qui sont réinvesties dans les jeux et qui ont un caractère facilitant la recherche, la construction ou la découverte d'une solution.

... dont la technique du "bon départ" ...

Le fait de donner des solutions correctes est significatif de cette population. Cependant , il existe des cas d'erreurs. Ces dernières ne sont pas corrigées même à la demande de vérification, qui ne semble pas nécessaire, probablement vus le niveau des exercices et celui de la population testée.

Les solutions correctes sont très fortement corrélées avec une démonstration directe partant de la considération de l'objet sur lequel porte la conclusion pour les démonstrations de type universel et à des démonstrations directes partant des hypothèses pour une démonstration de type existentiel.

Les manœuvres d'évitement des formes de démonstration qui ne plaisent pas sont monnaie courante. C'est le cas pour les démonstrations d'existence (considérées comme dépendant de l'intuition plus que de la logique), bien que la capacité à les construire existe. Ce qui n'est pas le cas chez les étudiants testés.

Il n'y a pas de recherche à l'aveuglette, mais il existe une technique du bon départ qui s'est construite par l'expérience, comme en témoignent des commentaires de recherche : "j'avais commencé par là ... mais ce n'est pas bon ... il faut commencer comme cela ...", "ce n'est pas astucieux de partir de x dans X, mais c'est possible ... c'est raisonnable et astucieux de partir de y dans f(X) ...". En fait, le démarrage implique le reste, la construction du raisonnement et "l'exploitation en ligne directe" selon l'expression d'un collègue ...

... sans restriction due à la "rigidité" ...

Cependant, lors d'une réflexion sur des départs de démonstration, la majorité de l'effectif commet l'erreur de rejeter une partie de ce qui est possible. Le rejet porte sur les départs de démonstrations indirectes, par contraposée ou par l'absurde. Ceci n'est pas surprenant, puisque les démonstrations produites sont très majoritairement directes. Les autres formes de démonstrations sont seulement évoquées de temps en temps. Il y a donc rejet de ce qui n'est pas utilisé, probablement en référence à la forme de démonstration préférée et par oubli des autres possibles. Ce point est très important, surtout si on le rapproche de résultats obtenus par ailleurs.

Des étudiants de CAPES jouant le rôle de tuteurs dans une classe d'élèves de 4° réputés en difficulté ont rejeté des départs de procédure partant de la considération de l'objet de la conclusion, ce qui était non seulement correct mais astucieux ... Ce phénomène est courant. Je l'ai repéré, aussi, lors de l'analyse de copies d'examen corrigées.

Il y a, dans ces cas, confusion entre départ de démonstration (ou de recherche) par la considération de l'objet de la conclusion et le fait de ne rien démontrer (en partant de la conclusion comme vraie pour affirmer à la suite d'un pseudo-raisonnement qu'elle est vraie). Bien sûr, je ne parle pas ici de la forme "supposons le problème résolu" ou supposons la conclusion vraie, de quoi cela découle-t-il , quelles sont les équivalences, etc. ... ?

... au delà de tout conditionnement inconscient.

Un autre point est riche d'enseignement. Pour le problème (T3) de mesure d'angle, extrait d'un manuel "Pythagore" de 4°, les procédures de cette population qui a témoigné de souplesse par ailleurs sont toutes de style "progressif" avec analyse des hypothèses, des données, mise en œuvre de théorèmes de propriétés, pour finir par la valeur qui est demandée. Or il y a plus rapide et plus astucieux. Tous les diagrammes de recherche (méthode A. Newell) sont de la même forme. Seul un directeur de recherches, chef de labo, s'interroge, en fin de course, sur sa méthode de résolution qu'il critique en donnant le schéma de ce qu'il aurait dû faire (pour être performant s'entend !). On peut penser qu'il y a dans ce cas mise en marche d'un processus inconscient relevant d'un apprentissage scolaire découlant d'un enseignement rigide à procédure unique ...

Pour une remédiation.

Ce corpus comporte aussi des commentaires. En plus des commentaires qui accompagnent la recherche et la phase de résolution, il en est qui intéressent le cadre de la didactique ou celui de la pédagogie, soit par la considération de comportements d'étudiants, soit par la donnée de conseils pour l'enseignement des mathématiques.

Les travers reconnus chez les étudiants sont principalement :

- le manque d'analyse des textes
- la confusion entre les quantificateurs ou leur négligence
- l'intérêt exclusif pour les hypothèses et le départ des hypothèses pour les démonstrations
- le manque de logique
- le manque de méthode dans la recherche
- l'existence d'intuitions fausses prises pour des théorèmes.

Pour faire bref, on peut résumer les conseils de ce qu'il faut ancrer dans les têtes pour lutter contre ces défauts, en ce condensé :

- faire attention à la formulation des exercices
- avoir une vue globale
- ne pas se limiter, penser à d'autres éventualités
- ne pas perdre de vue le but
- traduire les implications, traduire ce que l'on veut démontrer
- commencer par le plus simple ou ce qui paraît tel
- essayer des choses différentes
- ne pas se contenter d'un résultat, chercher le meilleur
- penser aux démonstrations par l'absurde, par contraposée

***En un mot*.**

Les procédures choisies par les enseignants et chercheurs diffèrent de celles des étudiants. Certaines caractéristiques sont repérées. Elles peuvent faire partie d'un enseignement méthodologique et heuristique permettant la performance dans le domaine de la résolution de problèmes de mathématiques [1] [3] [5]. La question du "AQQOC" se pose toujours. On ne peut présenter la même chose de la maternelle à l'université, sauf peut-être avec les jeux [6].

Nous pouvons en tirer profit pour nous-mêmes ainsi que pour nos élèves. Reste à se lancer ...

Bibliographie

[1] Marie-Pascale AUBERT "*Contribution à l'amélioration de la méthodologie de résolution de problèmes de mathématiques chez des étudiants de DEUG SSM2. Expérimentations avec divers publics de niveaux différents.*" Thèse de didactique des disciplines PARIS 7 1995
[2] Marie-Pascale AUBERT "*Registre figural et enseignement des probabilités en DEUG. Révision du programme de Lycée.*" A paraître. Dépôt IREM de ROUEN : octobre 1999.
[3] Marie-Pascale AUBERT "*Apprentissage du raisonnement et de méthodes de démonstrations*" IREM de ROUEN 1988
[4] Edouard de BONO "*La pensée latérale*" STOCK 1971
[5] Edouard de BONO "*Réfléchir mieux*" EDITIONS d'ORGANISATION 1985