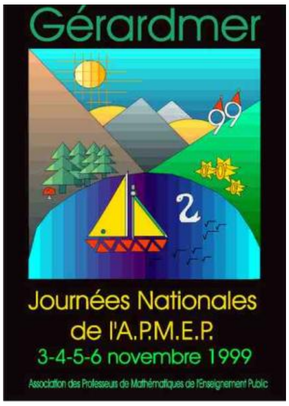


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Ateliers JA30 et VA20
JEUX MATHÉMATIQUES : ENTRE THÉORIE ET PRATIQUE

Brahim TIGROUSSINE[1]

Les mathématiques peuvent paraître difficiles, ternes et scolaires lorsqu'elles sont mal présentées.
Comment attirer l'attention des jeunes et par quel moyen leur faire aimer les maths ?
Il est de nos jours très utile d'intéresser nos élèves par des activités mathématiques plaisantes présentées sous forme de jeux.
Proposer des jeux à nos jeunes, les laisser courir derrière ce qu'on appelle solution, revient à faire avec eux des mathématiques avec plaisir.

Un jeu est caractérisé par un ensemble de règles qui s'imposent aux joueurs, que ces derniers mettent en œuvre à partir de leurs choix rationnels, en tenant compte du comportement des autres joueurs.
En règle générale, un jeu commence toujours par une description verbale, souvent la plus détaillée avant de passer à une démarche formelle mathématique.
Pour décrire les étapes d'un jeu, on utilise souvent une traduction mathématique sous forme de tableaux, de graphes et d'arbres.
La forme extensive ou « arborescente » est la représentation la plus élégante, la plus parlante d'un jeu ; car si elle désigne par des nœuds les positions des joueurs, elle désigne également par des flèches l'ordre de leurs actions, de leurs coups.

Dans ce papier, on s'intéresse à des exemples très connus en théorie des jeux afin de montrer à nos jeunes que la modélisation et la traduction mathématiques sont des moyens de résoudre des problèmes mathématiques complexes.
Si la solution d'un jeu demeure parfois difficile à trouver, le plaisir qu'il apporte est incontestable

Exemple introductif

Lahdo et Lahda sont deux entreprises qui tentent de commercialiser un type de chocolat.
Elles tablent sur une production de 10 millions d'unités à trois francs pièce.
On suppose que les deux entreprises ont le même coût marginal égal à 1 franc et le bénéfice ou recette nette est de 2 francs. Les coûts fixes de Lahdo sont supérieurs à ceux de Lahda en cas de production et sont nuls lorsqu'il n'y a pas production.

[1] Laboratoire Gemma Université de Caen et Collège le Ferronay de Cherbourg-Octeville

Le tableau suivant nous résume toutes ces données :

	Recettes Nettes	Coûts fixes	Profits = recettes – coûts fixes
Lahdo Produit seul	20 MF	15 MF	5 MF
Lahda Produit seul	20 MF	12 MF	8 MF
Lahdo et Lahda produisent ensemble	10 MF 10 MF	15 MF 12 MF	-5 MF -2 MF

La dernière ligne du tableau est le cas le plus délicat car il conduit à un conflit ou à une guerre de prix et à un partage de marché. Elles peuvent (les deux entreprises) chacune écouler 5 Millions d'unités, alors Lahda perd 2 MF et Lahdo 5 MF.

Représentation des données

Forme stratégique ou normale d'un jeu (tableau) :

		Lahda	
		Produit	**Ne P**roduit pas
Lahdo	**P**roduit	(-5 ; 2)	(5 ; 0)
	Ne Produit Pas	(0 ; 8)	(0 ; 0)

Le couple de coordonnées (x ; y) signifie que Lahdo a un profit égal à x et Lahda réalise un profit égal à y.

Forme extensive ou "arborescente" d'un jeu :

Le jeu précédent peut-être représenté sous une forme plus significative par un **«** arbre de jeu **»** dit **arbre de Khun** où les points noirs sont les nœuds et chaque flèche représente un coup du jeu.

Dans tout ce qui suit **P** et **NP** désignent respectivement « **P**roduit » et « **N**e **P**roduit pas » mais n'a rien à voir avec les notations de complexité des problèmes polynomiaux et N-P-complets algorithmiques.

Les cas envisagés sont :

Lahdo joue d'abord puis Lahda (fig. 1) :

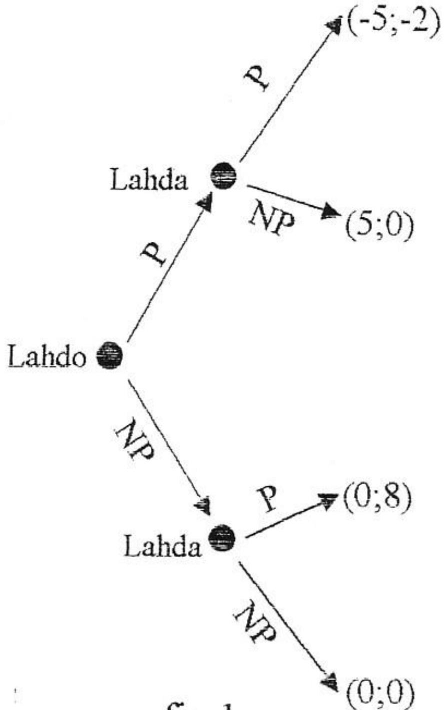


fig.1

Lahda joue ensuite Lahdo (fig. 2) :

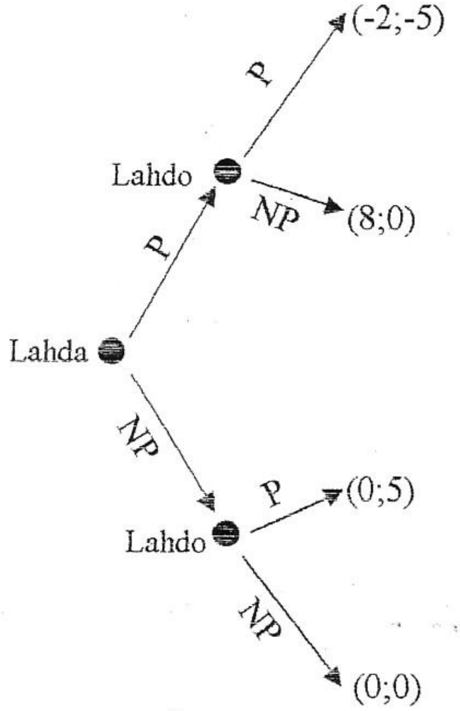


fig.2

Jeux à coups simultanés : Lahdo et Lahda jouent en même temps (fig. 3) :

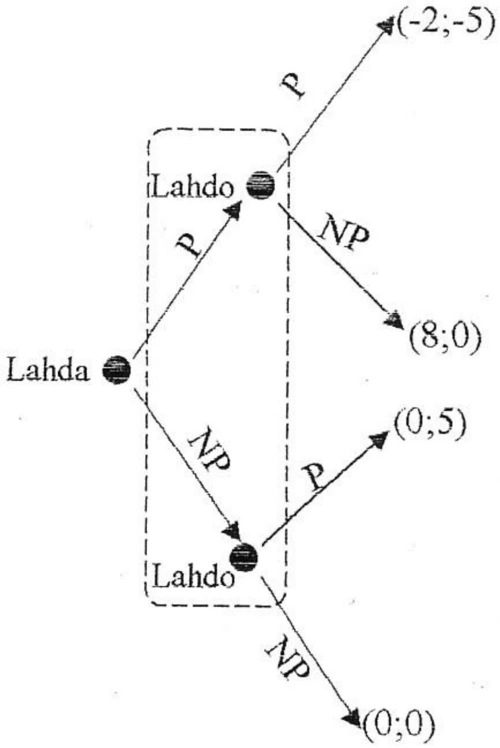
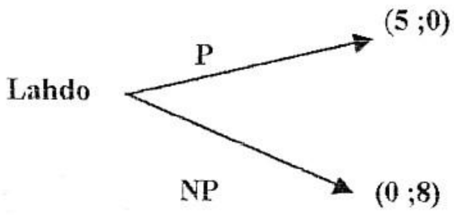


fig.3

Solution du jeu

La théorie des jeux décrit des relations entre individus vivant en société.
Les théoriciens des jeux se proposent de dégager de leurs modèles des stratégies particulières, qui en fourniraient la (ou les) solution(s) en s'appuyant sur le principe de rationalité individuelle (chacun cherche à obtenir, pour soi le maximum possible).
Même si ce principe est respecté, rares sont les jeux ayant une solution qui s'imposerait de façon indiscutable même en cas d'information parfaite.

Supposons que les règles du jeu précisent que Lahdo joue et que Lahda connaît son choix (fig. 2).
On peut obtenir une solution du jeu en s'appuyant sur la méthode de récurrence à rebours, qui consiste à "commencer par la fin", en examinant le choix du dernier joueur (Lahda) à partir duquel on déduit le choix de l'avant dernier joueur et ainsi de suite, jusqu'à parvenir au nœud de l'arbre.
Ainsi le choix de Lahda est : mieux vaut pour elle ne pas produire (gain nul plutôt qu'une perte de 2 MF)
Si Lahdo ne produit pas alors elle a intérêt à produire (gain de 8 MF contre gain nul).
Si on tient compte de ces choix la figure 2 se réduit à la figure 4 suivante :



Dans le dernier cas (figure 3), on englobe dans un "ballon" les nœuds de l'arbre représentant les choix du 2eme joueur pour signifier que celui-ci ignore le choix du 1er joueur.
L'ensemble des nœuds se trouvant dans le même "ballon "est appelé ensemble d'information.
Il y a information imparfaite lorsqu'il y a au moins 2 nœuds (cas de la figure 4).
Il y a information parfaite s'il y a un seul nœud (figures 1 et 2), où le 2eme joueur connaît le choix du 1er.

Figure 4 : Le choix de Lahdo est immédiat : elle décide de produire .

La démarche utilisée est valable pour tout jeu à parfaite, mais non pour les jeux à information imparfaite (comme celui de la figure 3). Elle suppose que chaque joueur connaisse le choix l'arbre du jeu, du moins à partir des nœuds où il doit faire des choix et effectue les calculs "à rebours" correspondants (le premier ayant le plus de calculs à faire)

Jeux célèbres

Exemple I

Amor et Baker pratiquent un jeu simple intitulé « Caillou – Papier - Ciseaux ».
Chacun a donc le choix de l'une des trois options ou stratégies : Caillou, Papier et Ciseaux.
Les parties sont soit gagnées ou perdues par l'un ou l'autre, soit nulles.

Règle du jeu :
Le papier couvre le caillou qui brise les ciseaux qui à leur tour coupent le papier.

Scénarios possibles:

1 - Si les deux joueurs choisissent la même option, le jeu est nul.
2 - Si l'un choisit le papier et l'autre le caillou, le premier gagne (le papier couvre le caillou).
3 - Si l'un choisit le caillou et l'autre les ciseaux, le premier gagne (le caillou casse les ciseaux).
4 - Si l'un choisit le papier et l'autre les ciseaux, le second gagne (les ciseaux coupent le papier).

Valeur du gain, de la perte dans le jeu :

On attribue la valeur 1 au gagnant, -1 au perdant et zéro en cas de match nul.

Tableau de valeurs

Chaque joueur a le choix entre trois stratégies, on aura un tableau à trois lignes et trois colonnes :

		Baker		
		Caillou	Papier	Ciseaux
Amor	Caillou	(0 ; 0)	(-1 ; 1)	(1 ; -1)
	Papier	(1 ; -1)	(0 ; 0)	(-1 ; 1)
	Ciseaux	(-1 ; 1)	(1 ; -1)	(0 ; 0)

Exemple II

Cet exemple est connu sous « le dilemme des prisonniers ». Deux suspects sont arrêtés pour avoir commis un délit.
Par manque de preuve, la police interroge et essaie de convaincre les suspects jusqu'à ce qu'ils avouent.
Elle les met devant le fait accompli et leur explique les conséquences qui découlent suivant les actions et les déclarations de chacun.

Scénarios possibles

1 - Si les deux nient catégoriquement les faits, ils écopent d'un mois de prison chacun.
2 - Si les deux avouent, ils écopent de 6 mois de prison.
3 - Finalement, si l'un d'eux avoue et l'autre nie toute implication, le premier est immédiatement relaxé tandis que le second écope de 9 moins de prison : 6 mois pour le délit et 3 mois pour obstruction à la justice. Ces situations peuvent être représentées par un tableau (une bi-matrice) :

		Prisonnier II	
		Nie	Avoue
Prisonnier I	Nie	(-1 ; -1)	(-9 ; 0)
	Avoue	(0 ; -9)	(-6 ; -6)

Jeu à deux personnes de somme nulle

Anatole et Katia sont préoccupés par un jeu dont la règle s'exprime par le tableau ci-après :

		Katia		
		I	II	III
Anatole	1	1	0	-2
	2	2	1	2
	3	-1	-1	0

Coup pour coup

A chaque coup, chacun des deux joueurs doit choisir, indépendamment de l'autre, une des stratégies à sa disposition.
Anatole choisit de jouer les stratégies 1, 2 ou 3, tandis que Katia choisit I, II ou III.

Les lignes d'attaque d'Anatole

Si Anatole joue la ligne 1 cela signifie qu'il gagnera un jeton si Katia joue la colonne I.
Il n'y aura ni gain ni perte si Katia joue la colonne II.
Ensuite , il perdra deux jetons si Katia joue la colonne III.
Si Anatole joue la ligne 2, il gagnera deux jetons si Katia joue la colonne I, un jeton si Katia joue la colonne II et enfin deux jetons si Katia joue la colonne III.

La contre-attaque de Katia

La situation est évidemment tout l'inverse pour Katia Si elle joue la colonne I elle perdra un jeton si Anatole joue la ligne 1, deux jetons si Anatole joue la ligne 2. Enfin elle gagnera un jeton si Anatole joue la ligne 3.

Gain d'Anatole ou perte de Katia

Un gain négatif est une perte pour Anatole et une perte négative est un gain pour Katia.

Conclusion

Le bonheur de l'un est le malheur de l'autre.C'est-à-dire ce que l'un des joueurs gagne, l'autre perd.
Anatole n'a pas intérêt à jouer les lignes 1 ou 3 car s'il joue la ligne 1, il ne peut espérer gagner qu'un jeton, mais risque d'en perdre deux. S'il joue la ligne 3 il ne peut espérer aucun gain.
Au contraire, s'il joue la ligne 2, il est assuré de gagner au moins un jeton, quelle que soit la décision de Katia
Dans ces conditions, Katia, se rendant compte que son adversaire doit nécessairement jouer la stratégie 2, emploiera la stratégie II, c'est-à-dire limitera sa perte à un jeton par coup.

Valeur du jeu et point selle

C'est le gain d'Anatole ou la perte de Katia à chaque coup.
L'élément situé à l'intersection de la ligne 2 et la colonne II est la valeur du jeu. C'est le minimum des valeurs inscrites sur la ligne 2 et le maximum des valeurs portées dans la colonne II.
Ainsi, la valeur du jeu est égal à 1 et c'est le point selle du jeu.

REFERENCES

[1] Aumann, Robert J. “Acceptable Points in general Cooperative n-person games” Int A W.Tucker Princeton University Press.

[2] Berge, Claude (1957). “Théorie des jeux à n personnes”. Paris, Gauthier–Villars.

[3] Kuhn, Harold W. (1953). “Extensive games and the problem of information in Contributions to the theory of games” Vol 2, Princeton : Princeton University Press.

[4] Owen Guillermo (1985). “Game Theory”. 2nd Edition, New York Academic Press.

[5] “Quotas solutions of n person-games”, Princeton University and the Rand Corporation.

[6] Les Cahiers Français : “Éléments de théorie des jeux et microéconomie” (Francisco Vergara).

[7] Roth, A. “The Shapley Value” Essays in Honor of L.S Shapley .Cambridge University.

[8] Shapley, L. (1953 a) “Stochastic games Proceeding” of the National Academy of science 39:1095-1100.

[9] “Valeur de Shapley généralisée et Quotas des jeux”. Mémoire de DEA (Théorie des jeux 1977) Gemma-Creme, Université de Caen (1997).