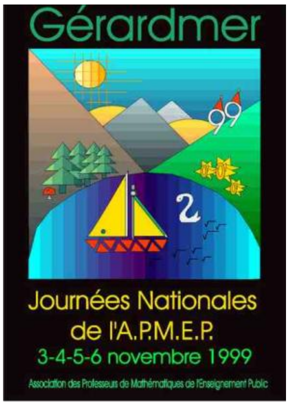


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier JA20
D'EUCLIDE À LEGENDRE, AUTOUR DU CINQUIÈME POSTULAT

Michel HENRY[1], IREM de Franche-Comté

1 - Un certain regard sur les Éléments d'Euclide

L'atelier est introduit par les deux petits problèmes de construction suivants :

Un segment [A,B] étant donné, construire (à la règle et au compas !) :
a) un triangle équilatéral de côté [A,B],
b) un carré de côté [A,B].

On pourrait penser que ces deux constructions très voisines font appel aux mêmes outils et propriétés géométriques, pourtant elles sont fondamentalement différentes : la première est donnée par Euclide comme première proposition de ses Éléments, pour la seconde, il faut attendre la 46^{e} du Livre I, car elle met en œuvre essentiellement le 5^{e} Postulat[2].

Pourquoi cette différence fondamentale entre un triangle équilatéral et un carré ? Pourquoi le premier peut être dessiné sur une sphère (où les droites sont les grands cercles) et pas le second ? Nous pénétrons ainsi dans la question du rôle joué par le 5^{e} Postulat pour donner au plan euclidien (restons dans le plan) des propriétés géométriques telles que nous les concevons naïvement, et à ses droites une allure parfaitement rectiligne et illimitée.

Les Éléments d'Euclide méritent d'être présentés dans leur rôle de théorisation d'une géométrie pratique, dont les objets sont des idéalisations des objets géométriques les plus simples, ceux que nous dessinons dans un espace à notre échelle.

Donnons d'abord un aperçu sur les contenus et la progression des 13 Livres :

Livre I : propriétés qualitatives des triangles et des configurations nées du parallélisme, la méthode des aires. Livre II : l'algèbre géométrique. Livre III : le cercle. Livres

---

[1] michel.henry40@gmail.com

[2] La forme la plus usitée aujourd'hui, formulée par Proclus, dite "énoncé de Playfair" est : *Par un point extérieur à une droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule.* C'est l'unicité de cette parallèle qui fait l'objet du Postulat dont l'énoncé donné par Euclide semble plus évident (cf. la suite de ce résumé).

IV : les polygones. Livre V : la théorie des proportions. Livre VI : applications, rapports de grandeurs et figures semblables. Livres VII, VIII, IX : théorie des nombres. Livre X : les quantités irrationnelles. Livre XI : géométrie dans l'espace. Livre XII : aires curvilignes et méthode d'exhaustion. Livre XIII : les polyèdres réguliers de Platon, le joyau de la géométrie d'Euclide.

Il convient ensuite d'examiner plus en détails la structure du Livre I : propriétés d'angles, d'égalités et inégalités dans les triangles qui, dans une géométrie absolue, ne font pas intervenir le 5^{e} Postulat, puis les propriétés qui en découlent : théorie des parallèles, propriétés des parallélogrammes conduisant notamment à la méthode des aires, construction du carré un côté étant donné, et application à la propriété dite de Pythagore (baptisée ainsi par Proclus au V^{e} siècle).

2 - Le Cinquième Postulat : démontrer ou pas démontrer ?

Dès l'origine, l'énoncé du 5^{e} Postulat tel qu'il figure dans les Éléments ressemble à une proposition : *si une droite*[3]*, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

Une telle proposition paraît démontrable, compte tenu des autres demandes, définitions et axiomes proposés par Euclide. De nombreuses tentatives de démonstrations ont marqué trois grandes périodes de l'histoire de ce Postulat[4], (on trouvera en annexe 1 la présentation succincte donnée lors de l'atelier) :

– l'antiquité, tentatives et commentaires rapportées par Proclus de Lycie (*Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide,* 412-486),

– les multiples propositions des arabes ou orientaux dont nous n'avons retenu que la plus significative, celle d'Omar Khayyâm (*commentaires sur les postulats problématiques d'Euclide,* 1040-1131),

– les essais occidentaux de la Renaissance à Legendre : la tentative de Wallis (*De Postulato Quinto et Definitione Quinta, Opera Mathemartica,* 1616-1703), les travaux de Girolamo Saccheri (*Euclide lavé de toute tache*, 1677-1733) et de Johann Heinrich Lambert (Theorie der Parallellinien, *1728-1777),* précurseurs des géométries non euclidiennes.

3 - Les Éléments de Géométrie de Legendre, son idée fixe : démontrer le 5^{e} Postulat

Afin de situer les multiples tentatives de Legendre au début du 19^{e} siècle (*Éléments de Géométrie*, 1752-1833), on a présenté rapidement ses Éléments de Géométrie dont la

[3] Une droite (finie) chez Euclide est ce que nous appelons aujourd'hui un segment de droite.

[4] Pour une présentation plus complète de ces tentatives, on pourra lire avec beaucoup de plaisir l'article de Jean-Luc CHABERT : *La vraie fausse démonstration du Cinquième Postulat,* publié dans le livre inter IREM *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques,* édité chez ellipses, 1993. Cet article reprend une partie de la brochure du même auteur : *La préhistoire des géométries non euclidiennes,* publiée par l'IREM de Picardie en 1987. Cette partie de l'atelier en a été largement inspirée.

progression du Livre I est organisée pour amener une “démonstration” du 5^{e} Postulat et développer ensuite la théorie des parallèles. Legendre, d’éditions en éditions, publie de multiples tentatives (cf. l’article de Jean-Luc Chabert cité en note 1), jusqu’à la 12^{e} édition où il prétend réfuter les objections qui lui avaient été présentées auparavant. Son avertissement en entête de cette édition et un extrait de sa note II (donnés en annexe 2) sont particulièrement explicites de sa conviction profonde : le 5 Postulat peut être démontré au sein de la géométrie d’Euclide. Dans les mêmes années, János Bolyai (1802-1860) et surtout Karl Friedrich Gauss (1777-1855) comprennent que ce Postulat fonde axiomatiquement une géométrie parmi d’autres, c’est à dire un modèle d’espace que David Hilbert (1862-1943) formalisera en 1899.

La belle “démonstration” de la 12^{e} édition des Éléments de Legendre (annexe 3) est enfin soumise à la sagacité des participants à l’atelier, puis 35 énoncés équivalents au 5^{e} Postulat sont distribués aux curieux (annexe 4).

Annexe 1

Commentaires de Proclus (V^{ème} siècle) et
Démonstration du cinquième Postulat

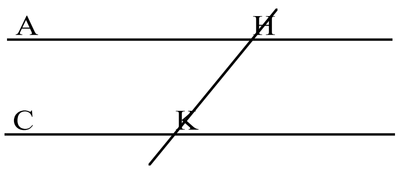
Considérant la démonstration de la proposition 29 du Livre I des Éléments :
Une droite qui tombe sur deux droites parallèles fait les angles intérieurs placés du même côté égaux à deux droits,
Proclus se demande :
"Comment ce dont la réciproque est consignée parmi les théorèmes comme démontrable serait-il indémontrable ?"

La démonstration proposée s’insérerait après la proposition 28 d'Euclide :
Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs, placés du même côté, égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Proclus présente d'abord la tentative de Claude Ptolémée dans son ouvrage *Sur la rencontre de droites prolongées à partir d'angles plus petits que deux angles droits* (seconde moitié du II^{ème} siècle, ouvrage perdu).

Ptolémée prétend démontrer la réciproque sans faire appel au cinquième Postulat.

Que les droites AB et CD soient parallèles et que la droite HK tombe sur celles-ci ; je dis que cette droite ne forme pas les angles internes situés du même côté plus grands que deux droits



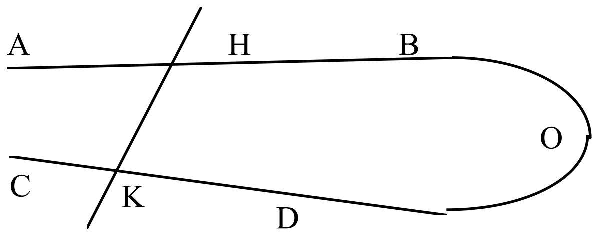
Ptolémée suppose que de chaque côté de (HK) les angles intérieurs sont plus grands que deux droits : $AHK + HKC > 2$ droits et $BHK + HKD > 2$ droits.

Mais les angles supplémentaires aux deux premiers sont plus petits que deux droits : $BHK + HKD < 2$ droits, ce qui est absurde.

Même raisonnement pour montrer que les angles internes d'un même côté ne sont pas plus petits que deux droits. Leur somme est donc exactement égale à deux droits, la proposition 29 est démontrée et par suite le 5^{e} Postulat est un théorème puisque c'est la contraposée de cette proposition, et Ptolémée montre aisément que les deux droites prolongées se rencontrent du côté des angles internes plus petits que deux droits :

Supposons que $AHK + HKC < 2$ droits, et que (AB) et (CD) se rencontrent en O du côté de B et D.

Comme $AHK + KHO = 2$ droits, on a : $HKC < KHO$, ce qui est impossible car l'angle HKC extérieur au triangle HKO est plus grand que chacun des deux angles non adjacents KHO et OHK (prop. 16 des Éléments).

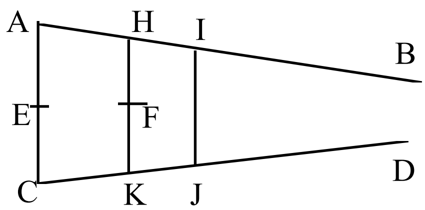


Proclus souligne le “ paralogisme ” de cette "démonstration" et remarque de plus qu'elle conduirait à la même conclusion si les droites données n'étaient pas parallèles.

Il présente ensuite un autre raisonnement en vogue à l'époque :

On suppose que (AB) et (CD) font avec la sécante (AC) des angles CAB et ACD inférieurs ensembles à 2 droits. On montre que les droites prolongées (AB) et (CD) ne se coupent pas.

Soit E le milieu de [AC] et H sur (AB) et K sur (CD) tels que AH = AE et CK = CE.



(AB) et (CD) ne se rencontrent pas en H = K, sinon le triangle AHC aurait son côté AC égal à la somme des deux autres, AH et CH, ce qui est contraire à la proposition 20. A fortiori, (AB) et (CD) ne se rencontrent pas non plus entre A et H et C et K. On peut donc mener la droite (HK) (1er postulat) et recommencer ce raisonnement avec le point F milieu de [HK] et les points distincts I et J tels que HI = HF et KJ = KF et le poursuivre ainsi indéfiniment. En raisonnant comme Zénon d'Élée, si les droites (AB) et (CD) se coupaient à distance finie en P, il apparaît impossible de pouvoir placer une infinité de segments successifs entre A et P.

Proclus souligne que l'hypothèse $CAB + ACD$ < 2 droits ne se reporte pas nécessairement en $KHI + HKI$ < 2 droits dans cette sorte de récurrence (sauf à considérer que la somme des angles du quadrilatère AHKC est égale à 4 droits, ce qui serait admettre le 5$^{\text{ème}}$ Postulat). Il invalide le raisonnement en remarquant que traçant (CH) (on le peut puisque H n'est pas sur (CD)), il s'appliquerait aussi aux droites (AH) et (CH) qui font avec (AC) deux angles encore plus petits que $CAH + ACK$, ce qui conduit à l'absurdité que (AH) et (CH) ne se couperaient pas..

Proclus propose alors **SA** démonstration. Pour cela, il admet un axiome dû à Aristote, qui semble admissible, mais qui en fait entraîne le 5$^{\text{ème}}$ Postulat :

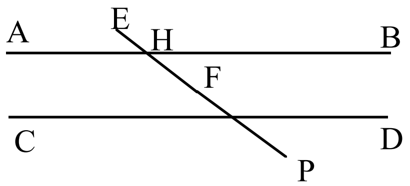
Si deux droites formant un angle sont prolongées à l'infini, elles s'écartent indéfiniment,

c'est à dire que pour toute longueur finie donnée, la distance d'un point de l'une à l'autre peut être plus grande que cette longueur.

A partir de là, Proclus démontre le lemme suivant :

Deux parallèles étant données, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

Si (EF) coupe (AB) en H, elle coupe aussi sa parallèle (CD).

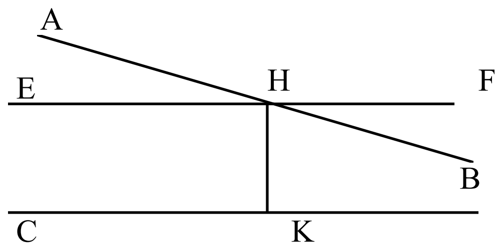


En effet, (HB) et (HF) prolongées à l'infini s'écarteront d'une distance plus grande que celle qui sépare les parallèles. Ainsi, il y a sur (HF), du côté de (CD), un point P dont la distance à (AB) est plus grande que la distance de (AB) à (CD). Ce point P ne peut être entre ces deux parallèles, H et P sont donc de part et d'autre de (CD) et (EF) coupe (CD).

En admettant que la distance entre deux parallèles est bornée, Proclus admet implicitement le 5$^{\text{ème}}$ Postulat.

Il peut ensuite terminer sa démonstration :

Soient deux droites (AB) et (CD) et une sécante (HK), telle que les angles intérieurs BHK et HKD soient plus petits que 2D. On construit l'angle BHF supplémentaire à $BHK + HKD$, ce que l'on sait faire (prop. 23 des Éléments). On prolonge (FH) au delà de H en E.



Comme (HK) coupe (EF) et (CD) en faisant des angles intérieurs égaux à 2 droits ($FHK + HKD = FHB + BHK + HKD$ = 2 droits), les droites (EF) et (CD) sont parallèles (prop. 28). Mais (AB) coupe (EF). D'après le lemme précédent, (AB) coupe aussi (CD), du côté où les angles avec (HF) sont plus petits que 2 droits.

Annexe 1 (suite)

Les “démonstrations” du Cinquième Postulat des commentateurs Arabes à Wallis, Saccheri et Lambert[5]

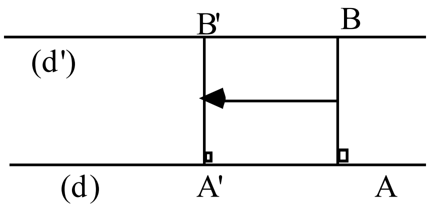
Dans les Éléments, le mouvement est systématiquement absent, même si pour comparer des triangles égaux ou des figures semblables, il faut implicitement les déplacer, ce que met en scène la “démonstration” de la proposition 4 (cas d’égalité des triangles). Une référence explicite au mouvement dans le plan de la géométrie peut amener à des remarques qui semblent totalement de bon sens et aller de soi, alors qu’elles cachent le 5ème Postulat.

Citons sans développer :

– Ṯabit ibn Qurra (IX$^{\text{è}}$ siècle, Bagdad : *Le livre sur la démonstration du célèbre postulat d’Euclide*) prouve par le mouvement l’existence de rectangles de laquelle découle le 5$^{\text{e}}$ postulat.

– Ibn al-Hayṯam (965-1040, Le Caire : *Le livre du commentaire des propositions non démontrées du Livre d’Euclide*), par une démarche analogue, explique que :

par le mouvement d’un segment [AB] se déplaçant perpendiculairement à la droite (d), A étant sur (d), l’autre extrémité B décrit une droite parallèle à (d), qui de plus est équidistante de (d). La construction d’un rectangle (clé du 5$^{\text{è}}$ postulat) est alors possible par déplacement du côté [AB] perpendiculairement aux deux autres côtés.

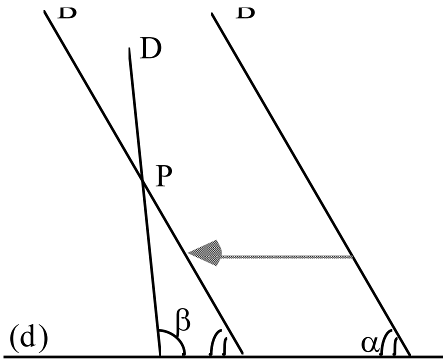


– John Wallis (1616-1703 : *De Postulato Quinto et Definitione Quinta, Opera Mathematica)* juge “naturel” de supposer que :

pour une figure donnée, il en existe une autre de grandeur quelconque qui lui soit semblable (axiome équivalent au 5$^{\text{e}}$ postulat qui permet de transporter un angle restant égal à lui-même), et base sa “démonstration” sur l’idée suivante :

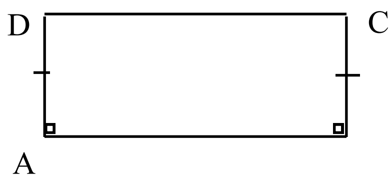
[5]- Ces quelques éléments d’Histoire du 5$^{\text{ème}}$ postulat sont extraits de la brochure de Jean-Luc Chabert *La préhistoire des géométries non euclidiennes,* IREM de Picardie, 1987. On en trouvera de larges extraits dans son article *La vraie fausse démonstration du Cinquième Postulat,* Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques, ellipse, 1993.

Dans la configuration du 5^e postulat où les segments [AB] et [CD] font avec une sécante (d) des angles intérieurs α et β plus petits que 2 droits, si l'on déplace le point A sur (d) en direction de C, le segment [AB] faisant toujours un angle α avec (d), on passera par une position [A'B'] qui rencontrera [CD] en un point P. En prolongeant [CD] et [AB] de ce même côté, on obtient nécessairement un triangle CAQ semblable à CA'P. Les droites prolongées (AB) et (CD) se rencontrent donc en Q



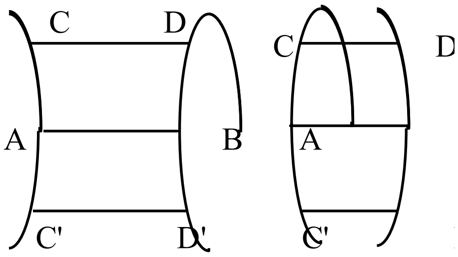
Mais la configuration géométrique à la base de nombreuses tentatives de démonstrations reprend la construction du carré (il suffit en fait de construire un rectangle) traitée par Euclide (proposition 46) en utilisant le $5^è$ postulat. Cette configuration, à la suite des travaux rigoureux de Saccheri et de Lambert, sera à la base de l'invention des géométries non euclidiennes.

Le segment [AB] étant donné, on construit en A et B les segments de même longueur (prop. 2 des Éléments) [AD] et [BC] perpendiculaires à [AB] (prop. 11). Il faut prouver que ABCD est un rectangle, ou encore que les angles en C et D sont droits.



– Omar Khayyâm (1040-1131, Iran : *Commentaires sur les postulats problématiques du Livre d'Euclide*) montre que les angles en C et D sont égaux [les triangles DAB et CBA sont égaux (prop. 4), d'où AC = BD et par suite les triangles ADC et BCD sont égaux (3^e cas, prop. 8)]. Il établit ensuite que les angles en C et D sont droits en éliminant les hypothèses qu'ils sont aigus (il démontre que dans ce cas CD serait plus grand que AB et les droites (AD) et (BC) s'écarteraient l'une de l'autre de part et d'autre de [AB]) ou obtus ((AD) et (BC) se rapprocheraient l'une de l'autre de part et d'autre de [AB]).

Or ces droites à l'allure cintrée **contredisent l'idée que l'on a de la ligne droite**, elles ne peuvent ni s'écarter ni se rapprocher l'une de l'autre des deux côtés de [AB] à la fois.



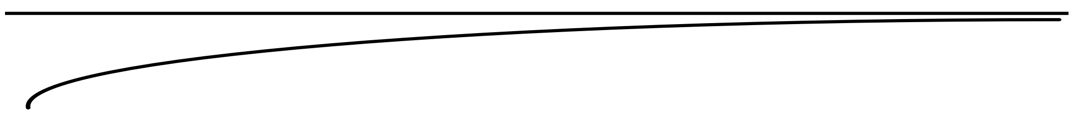
En fin de compte, cet argument d'Omar Khayyâm relève donc de l'appréhension sensitive et ne s'appuie sur aucune donnée de géométrie théorique. Il met en valeur le sens profond du 5^e postulat pour lequel les droites de la géométrie euclidienne sont "bien droites", tel qu'on se les représente intuitivement. En rejetant cette intuition, on ouvre la porte aux géométries non euclidiennes.

Cette configuration, encore reprise par Nasïr ad-Dïn at-Tüsï (1201-1274, Persan : *L'opuscule qui délivre des doutes concernant les droites parallèles),* sera aussi à la base des travaux de :

– Girolamo Saccheri (1677-1733, Italie : *Euclide lavé de toute tache),* et de

– Johann Heinrich Lambert (1728-1777, Suisse et Berlin : *Theorie der Parallellinien).*

Ils réfutent facilement l'hypothèse que les angles C et D sont obtus (qui aboutit à une géométrie sphérique), en contradiction avec la proposition 16 d'Euclide (propriété de l'angle extérieur d'un triangle qui suppose qu'une droite peut être prolongée indéfiniment), mais ne peuvent conclure dans l'hypothèse de l'angle aigu, ne pouvant exclure que deux droites soient asymptotes :



Dans le même dilemme qu'Omar Khayyam, Saccheri ne peut qu'affirmer :
"L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car cela répugne à la nature de la ligne droite".

Lambert pousse cette hypothèse le plus loin possible et obtient les premiers résultats en géométrie hyperbolique (par exemple la somme des angles d'un triangle dépend de son aire). Mais convaincu que les axiomes de la géométrie doivent refléter notre perception de l'espace, il écarte aussi l'hypothèse de l'angle aigu, le 5^{e} postulat n'est donc pas *mathématiquement* démontré.

D'Alembert écrira dans l'Encyclopédie : *"la définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de géométrie".*

Toutes ces tentatives historiques n'ont pas empêché Adrien-Marie Legendre (1752-1833, Paris : *Éléments de Géométrie*) de proposer d'autres "démonstration" des plus originales, faisant preuve d'une grande invention, mais aussi d'un grand entêtement.

Annexe 2

AVERTISSEMENT POUR LA DOUZIÈME EDITION

André Marie Legendre,
Éléments de Géométrie

"La démonstration de la théorie des parallèles, telle qu'elle avait été présentée dans la 3^{e} édition de cet ouvrage et dans les éditions suivantes jusqu'à la 8^{e} inclusivement, n'étant pas à l'abri de toute objection, on s'était déterminé dans la 9^{e} édition à rétablir cette théorie à-peu-près sur la même base qu'Euclide. Des réflexions ultérieures faites sur le même objet, dont on donnera le développement dans la note II, ont fait découvrir deux nouvelles manières de démontrer le théorème sur les trois angles du triangle, sans le secours d'aucun *postulatum*.. On a en conséquence inséré une de ces démonstrations dans le texte de cette édition, en choisissant celle qui s'éloigne le moins des idées ordinaires, et qui d'ailleurs ne semble pas plus difficile à comprendre que celle qui avait été donnée dans les éditions précédentes, depuis la 3^{e} jusqu'à la 8^{e}."

Note II

"...., nous avons fait voir que toute la difficulté se réduisait à construire un triangle qui contînt au moins deux fois le triangle donné ; mais la solution que nous avons donnée de ce problème, en apparence très simple, suppose que par un point donné dans un angle moindre que deux tiers d'angle droit, on peut toujours faire passer une ligne droite qui rencontre à la fois les deux côtés de l'angle.

Nous avions ainsi beaucoup approché de notre but, mais nous ne l'avions pas atteint entièrement, puisque notre démonstration dépendait d'un *postulatum* qui à toute force pouvait être nié. C'est cette considération qui nous a fait revenir, dans la 9^{e} édition, à la simple marche d'Euclide, en renvoyant aux notes pour la démonstration rigoureuse.

En examinant les choses avec plus d'attention nous sommes resté convaincu que pour démontrer complètement notre *postulatum* il fallait déduire de la définition de la ligne droite une propriété caractéristique ce cette ligne qui exclût toute ressemblance avec la forme d'une hyperbole comprise entre ses deux asymptotes. Voici quel est à cet égard le résultat de nos recherches."

Annexe 3 :

PROPOSITION XIX

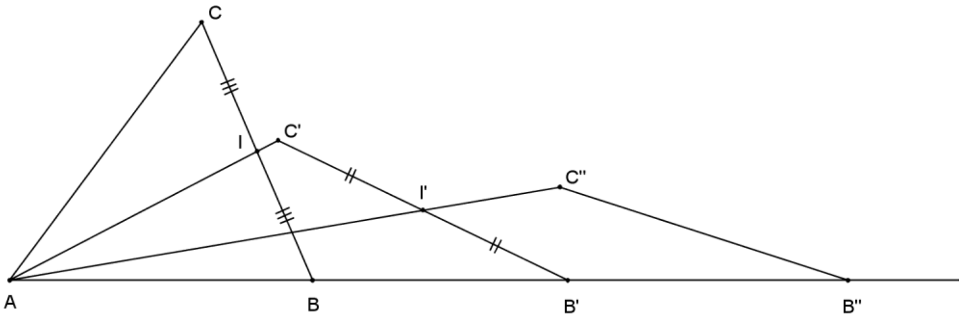
André Marie Legendre,
Éléments de Géométrie

Théorème.

Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Soit ABC le triangle proposé dans lequel nous supposerons[6] que AB est le plus grand côté et BC le plus petit, et qu'ainsi ACB est le plus grand angle, et BAC le plus petit.

Par le point A et par le point I milieu du côté opposé BC, menez la droite AI que vous prolongerez en C' jusqu'à ce que AC' = AB ; prolongez de même AB en B' jusqu'à ce que AB' soit double de AI.



Si on désigne par A, B, C, les trois angles du triangle ABC et semblablement par A', B', C' les trois angles du triangles AB'C', je dis qu'on aura l'angle C' = B+C et l'angle A = A'+B', d'où résulte A+B+C = A'+B'+C', c'est à dire que la somme des trois angles est la même dans les deux triangles.

Pour le prouver, faites AK = AI et joignez C'K, vous aurez le triangle C'AK égal au triangle BAI. Car dans ces deux triangles, l'angle commun A est compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : AC = AB, et AK = AI. Donc le troisième côté C'K est égal au troisième BI ; donc aussi l'angle AC'K = ABC, et l'angle AKC' = AIB.

Je dis maintenant que le triangle B'C'K est égal au triangle ACI, car la somme des deux angles adjacents AKC'+C'KB' est égale à deux angles droits ainsi que la somme des deux angles AIC+AIB ; retranchant de part et d'autre les angles égaux AKC', AIB, il restera l'angle C'KB' = AIC. Ces angles égaux dans les deux triangles sont compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir C'K = IB = CI, et KB' = AK = AI, puisqu'on a supposé AB' = 2AI = 2AK. Donc les deux triangles B'C'K, ACI sont égaux ; donc le côté C'B' = AC, l'angle B'C'K = ACB, et l'angle KB'C' = CAI.

Il suit de là 1° que l'angle AC'B' désigné par C'est composé de deux angles égaux aux angles B et C du triangle ABC, et qu'ainsi on a C' = B+C ; 2° que l'angle A du triangle ABC est composé de l'angle A' ou C'A B' qui appartient au triangle AB'C' et de l'angle CAI égal à l'angle B' du même triangle, ce qui donne A = A'+B' ; donc A+B+C = A'+ B'+C'.

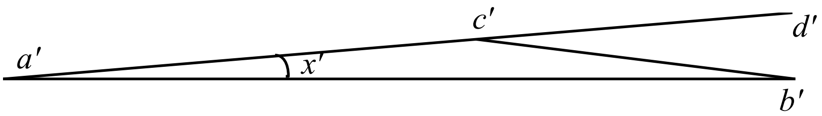
[6]Cette supposition n'exclut pas le cas où le côté moyen AC serait égal à l'un des extrêmes AB ou BC

D'ailleurs puisqu'on a par hypothèse AC < AB et par conséquent C'B' < AC', on voit que dans le triangle AC'B' l'angle en A, désigné par A', est moindre que B', et la somme des deux est égale à l'angle du triangle proposé, il s'ensuit qu'on a l'angle A' < $\frac{1}{2}$A .

Si on applique la même construction au triangle AB'C', pour former un troisième triangle AC"B" dont les angles seront désignés par A", B", C", on aura semblablement les deux égalités C" = C'+B', A' = A"+B", d'où résulte A'+B'+C' = A"+B"+C". Ainsi la somme des trois angles est la même dans ces trois triangles : on aura en même temps l'angle A" < $\frac{1}{4}$A .

Continuant indéfiniment la suite des triangles AC'B', AC"B", etc. on parviendra à un triangle *abc* dans lequel la somme des trois angles sera toujours la même que dans le triangle proposé ABC et qui aura l'angle *a* plus petit que tel terme qu'on voudra de la progression décroissante $\frac{1}{2}$A , $\frac{1}{4}$A , $\frac{1}{8}$A , etc.

On peut donc supposer cette suite de triangles prolongée jusqu'à ce que l'angle *a* soit moindre que tout angle donné.



Et si au moyen du triangle *abc* on construit le triangle suivant *a'b'c',* la somme des angles *a'+b'* de celui-ci sera égale à l'angle *a*, et sera par conséquent moindre que tout angle donné ; d'où l'on voit que la somme des trois angles du triangle *a'b'c'* se réduit presque au seul angle *c'.*

Pour avoir la mesure précise de cette somme, prolongeons le côté *a'c'* vers *d',* et appelons *x'* l'angle extérieur *b'c'd'* ; cet angle *x'*, joint à l'angle *c'* du triangle *a'b'c',* fait une somme égale à deux angles droits ; ainsi en désignant l'angle droit par D, on aura *c'* = 2D–*x'* ; donc la somme des angles du triangle *a'c'b'* sera

2D+*a'*+*b'*–*x'*.

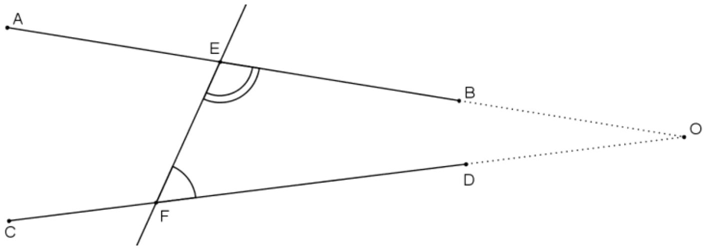
Mais on peut concevoir que le triangle *a'c'b'* varie dans ses angles et ses côtés, de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de la même construction et s'approchent de plus en plus de la limite où les angles *a'* et *b'* seraient nuls. Dans cette limite la droite *a'c'd'* se confondant avec *a'b',* les trois points *a',c',b',* finissent par être exactement en ligne droite ; alors les angles *b'* et *x'* deviennent nuls en même temps que *a'*, et la quantité 2D+*a'*+*b'*–*x',* qui mesure la somme des trois angles du triangle *a'c'b',* se réduit à 2D, donc *dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

Annexe 4

Énoncés équivalents au 5^e postulat d'Euclide[7]

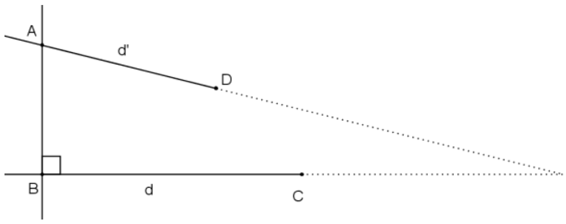
0 - <u>5^e demande ou postulat d'Euclide</u> (env. 330 - 275 av. JC.) :

Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.



$F + E < 2$ droits $\Rightarrow$ (AB) et (CD) concourantes

At-Tùsì, Nasìr ad-Dìn (1201 - 1274);
Saccheri, Girolamo (1667 - 1733) :
Une perpendiculaire et une oblique à une sécante commune se coupent.



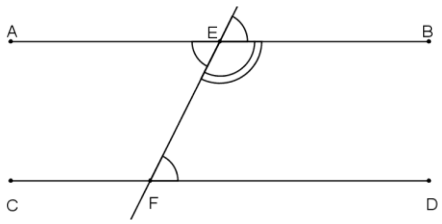
1 - <u>Angles déterminés par deux parallèles et une sécante</u> :

Proposition I-29 d'Euclide :

1a - *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, la somme des angles intérieurs d'un même côté est égale à deux droits.*

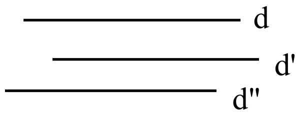
1b - *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes internes sont égaux.*

1c - *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles correspondants d'un même côté sont égaux.*



2 - <u>Parallèles et perpendiculaires</u>

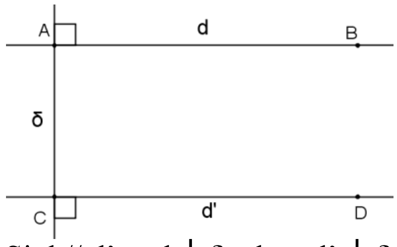
Proposition I-30 d'Euclide :
Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.



d//d' et d'//d'' $\Rightarrow$ d'//d''

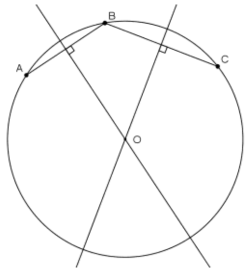
[7] Énoncés équivalents au 5^e postulat signifie : dans l'axiomatique euclidienne (définitions, demandes et notions communes), le 5^e postulat étant exclu, il est possible de démontrer l'équivalence logico-géométrique de chaque énoncé avec le la 5^e demande, selon les méthodes de démonstration euclidiennes, y compris présupposés et implicites couramment utilisés.

Legendre, André-Marie (1752 - 1833) :
Si 2 droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



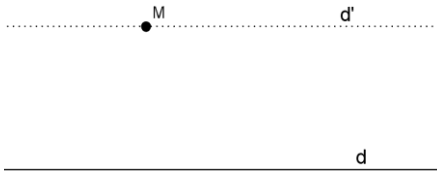
Si d // d' et d $\perp$ δ, alors d' $\perp$ δ

Bolyai, Janos (1802 - 1860) :
Par trois points non alignés il passe un cercle.



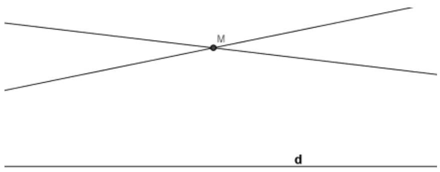
3 - <u>Droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée</u>

Axiome de Playfair, John (début du XIX^{e}), déjà énoncé par Proclus de Lycie (412 - 485 ap. J.C.) :
Par un point extérieur à une droite passe au plus une parallèle à cette droite.

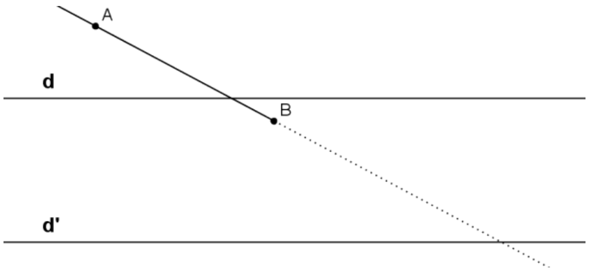


D' // d est unique

Al-Haytam, ibn (965 - 1041) :
Deux droites qui se coupent ne peuvent être toutes deux parallèles à une même droite.



Proclus (V^{è} siècle ap. J.C.) :
Lorsqu'une droite coupe l'une des parallèles elle coupe l'autre aussi.

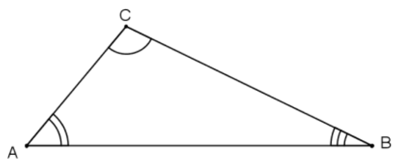


Si d//d' et [AB] coupe d, prolongée (AB) coupe d'

4 - <u>Somme des angles d'un triangle</u>

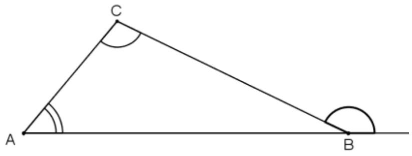
Proposition 32 d'Euclide, Al-Haytam (X^{e}-XI^{e} siècles) ; Nasìr ad-Dìn at-Tùsi (XIII^{e} siècle), Saccheri (XVIII^{e}) :

Les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits.



A + B + C = 2 droits

Proposition 32 d'Euclide :
Un angle extérieur d'un triangle est égal aux deux angles intérieurs et opposés.

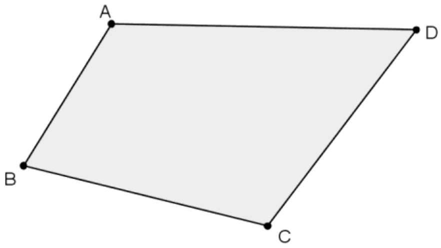


$B = A + C$

Legendre (XIX^e siècle) :
Il existe un triangle dont la somme des trois angles est égale à deux droits.

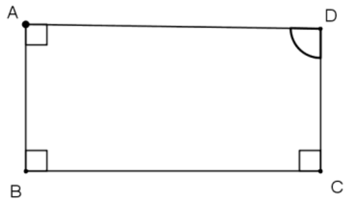
Axiome de Worpitzki :
Il n'existe pas de triangle dans lequel chaque angle peut être choisi aussi petit que l'on veut.

Saccheri (XVIII^e) :
La somme des angles d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits.



$A + B + C + D = 4$ droits

Clairaut, Alexis Claude (1713 - 1765) :
Si dans un quadrilatère, 3 angles sont des angles droits, le quatrième est un angle droit.



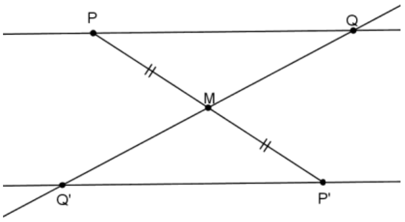
Si A, B, C sont droits,

alors D est droit.

5 - Symétrie centrale

Veronese, Giuseppe (1854 - 1917) :
Si deux droites sont parallèles, elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au milieu M de tout segment joignant un point de l'une à un point de l'autre.

Ingrami (1904) :
Pour toute autre sécante QQ' passant par M, M est aussi le millieu de [QQ'].

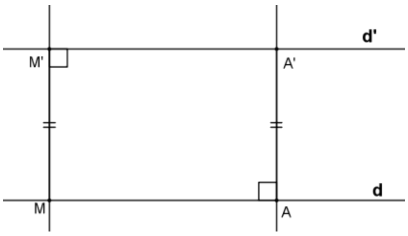


Si d//d' et M milieu de [PP'],
alors d et d' sont symétriques par rapport à M

6 - Équidistance des parallèles

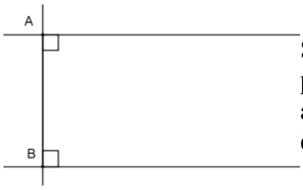
Posidonius d'Apamée (135 - 50 av. J.C.), An-Nayrìzi (900) :
Les droites parallèles sont équidistantes.

Posidonius, Geminus (1er siècle av. J.C.) :
Il existe des droites qui sont équidistantes l'une de l'autre.



AA' = MM' pour tout point M de d ou de d'

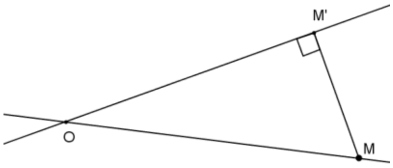
Al-Khayyam, Omar (1040 - 1131) :
Deux perpendiculaires à une même droite sont équidistantes



Si d et d' sont perpendiculaires à (AB), alors d et d' sont équidistantes

Proclus (V^{e} siècle) ; Al-Khayyâm (XI^{e} siècle) : *La distance entre deux parallèles est bornée.*

Proclus (V^{e} siècle) :
Si deux droites sont sécantes, la distance d'un point de l'une à l'autre n'est pas bornée.

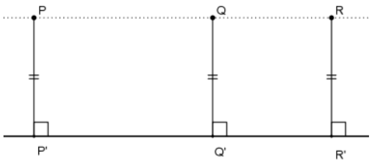


MM' non bornée quand M s'éloigne indéfiniment de O.

Aganis (VI^{e} siècle ?) :
Par un point extérieur à une droite il passe toujours une droite équidistante de la première.

Posidonius (I^{er} siècle av. JC.) ; Al - Haytam (X^{e}-XI^{e}) :
Le lieu des points équidistants d'une droite et situés d'un même côté de cette droite est une droite.

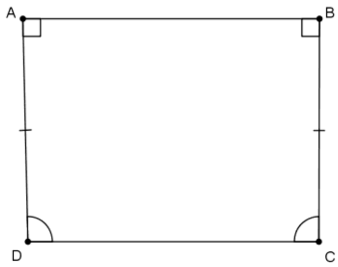
Vitale, Giardano (1633 - 1711) :
Il existe trois points alignés équidistants d'une droite.



Il existe P, Q, R alignés tels que PP' = QQ' = RR'

7 - Propriétés du rectangle

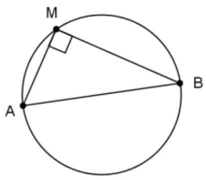
Omar Al-Khayyam (XI^{e}-XII^{e}) ; Saccheri (XVIII^{e}) :
Un quadrilatère isocèle ayant deux angles droits a tous ses angles droits.



Si A et B sont droits et si AD = BC, alors C et D

Thalès (Vi^{e} siècle av. J.C.)
Un angle droit est inscrit dans un demi-cercle.

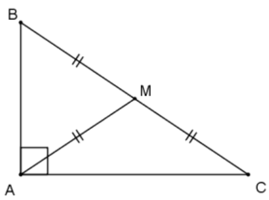
Saccheri (XVIII^{e}) :
Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.



Thalès : si AMB est droit, (AB) est un diamètre du cercle passant par A, M et B.

Saccheri : Si (AB) est un diamètre, alors, pour tout M du cercle, AMB est droit.

Al-Gauharì (VIII^{e} - IX^{e}) :
La médiane d'un triangle rectangle est égale à la moitié de l'hypothénuse.



AM = BM = CM

8 - <u>Existence de figures semblables</u>

Wallis, John (1616 - 1703) :
Pour une figure quelconque, il y en a toujours une autre, de grandeur quelconque, qui lui soit semblable.

Wallis ($XVII^e$) :
Pour tout triangle, il en existe un autre ayant un côté de longueur donnée et des angles égaux à ceux du triangle initial.

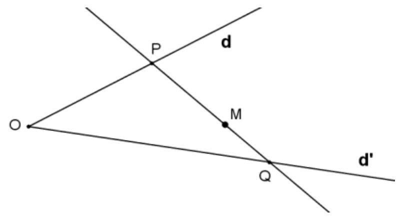
Saccheri ($XVIII^e$) :
Il existe deux triangles non égaux ayant leurs angles égaux deux à deux.

Gauss, Carl Friedrich (1774 - 1855) :
Il existe des triangles d'aire aussi grande que l'on veut.

“Si je pouvais montrer qu'on peut construire un triangle contenant une aire donnée, je serais capable de prouver rigoureusement toute la géométrie.”

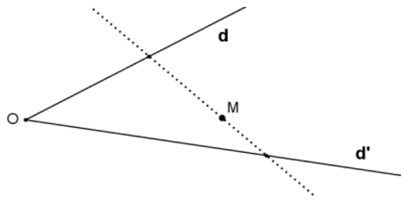
9 - <u>Position relative d'une droite et d'un angle</u>

Al-Gauhari ($VIII^e$ - IX^e);
As-Samarkandi ($XIII^e$) :
Par chaque point à l'intérieur d'un angle passe une droite qui coupe les deux côtés de l'angle.



Si M est à l'intérieur de $\widehat{dOd'}$, il existe P sur D tel que (PM) coupe D'.

Legendre (XIX^e) :
D'un point quelconque intérieur d'un angle plus petit que deux tiers d'un angle droit, on peut mener une droite qui rencontre les deux côtés de l'angle.



Si $\widehat{dOd'} < \frac{\pi}{3}$,

il existe une droite passant pra M qui rencontre les deux demi-droites]Od) et]Od').