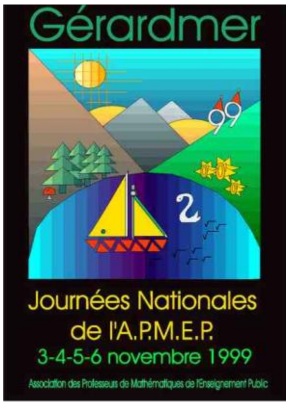

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier JA07
L'ANALYSE AU LYCÉE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR : UN ESSAI PRATIQUE

par Abdenacer MAKHLOUF et Etienne MEYER
avec la participation de
Brigitte JAUFFRET, Robert LUTZ, Nicole NICOLAI et Catherine RONCIN

L'objectif de cet atelier est de tester avec les enseignants participants une progression d'un enseignement de l'Analyse au lycée en termes d'ordres de grandeur. Ces leçons, déjà testées dans des classes de lycée et en premier cycle universitaire, sont le fruit du travail de deux groupes IREM, un en Alsace l'autre en Picardie. Leur site est consultable sur le serveur de l'académie de Strasbourg :

http://maths-03.site2.ac-strasbourg.fr/archives/maths_01/index.htm

Un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur consiste à transcrire dans un cadre formel les notions intuitives de nombres très grands et très petits auxquelles on fait appel des qu'on veut donner du sens à la notion de limite. Le prix à payer, pour travailler dans la légalité mathématique, est un élargissement conceptuel des mathématiques classiques. Les fondements théoriques pour l'introduction des ordres de grandeur avaient été présentés le matin dans l'atelier JM18 animé par Robert Lutz. Une partie des participants n'avait pas assisté à l'exposé du matin, ce qui nous a permis de tester notre approche sur des professeurs totalement vierges.

I. Déroulement de la séance

La quarantaine de participants a été disposée par groupe de 6 autour d'une table et encadré par les 6 animateurs de l'atelier (3 femmes et 3 hommes : parité respectée). Chaque séquence est constituée d'une leçon suivie de nombreux exercices. La leçon a fait l'objet d'une présentation à l'ensemble des participants. Ensuite les participants sont appelés à traiter les exercices individuellement avec bien sur la possibilité de discuter entre eux et avec les animateurs. La séquence se termine par une correction collective et une discussion, souvent âpre, sur le contenu.

II. Contenu des leçons

Il s'agit d'introduire les ordres de grandeurs dans l'ensemble des entiers et des réels, ce qui est une bonne occasion pour parfaire la présentation de ces ensembles avec les élèves. Ensuite, grâce à une analyse rigoureuse sur les nombres, évaluer une expression numérique à un très petit près, ce qui prépare le terrain à l'Analyse sur les fonctions.

***Leçon* 1. Introduction empirique des ordres de grandeur**
Cette leçon a pour objectif de faire émerger l'intuition des élèves à propos de la manipulation des ordres de grandeur liés à un cadre expérimental, en dégageant des procédés de démonstrations.

Voici le texte de l'activité

> Une calculatrice gère une plage de nombres entiers limitée à 10^{99}. Les nombres entiers sont donc de deux types :
> les nombres entiers *acceptables*, ceux qui sont inférieurs à 10^{99} et
> les nombres entiers *trop grands*, ceux qui sont supérieurs ou égaux à 10^{99}.

Les exercices présentés sont de deux types : justification et discussions d'affirmations. On se familiarise ainsi avec un vocabulaire nouveau et on apprend à raisonner.

***Leçon* 2. Introduction formelle des ordres de grandeur**
Cette leçon repousse les limitations des entiers acceptables et introduit le concept *d'entier très grand* et les axiomes qui le régissent.

> Remplaçons la calculatrice par le cerveau humain. Celui-ci peut concevoir des nombres entiers plus grands que n'importe quel nombre explicitement donné, mais pas concevoir tous les nombres simultanément. La plage des nombres acceptables n'a pas de frontière précise bien que la capacité du cerveau humain en matière de nombres soit limitée.
> Ceci motive l'introduction dans le langage mathématique du concept de **nombre entier très grand** (tg) assorti des règles suivantes :
> **(A1)** *L'entier* 1 *n'est pas très grand.*
> **(A2)** *Tout entier naturel supérieur à un entier très grand est très grand.*
> **(A3)** *Si* $x+y$, $x \cdot y$ *ou* x^y *est très grand alors x ou y est très grand.*

Pour une introduction formelle des entiers très grands, il conviendrait de rajouter un axiome d'existence. Ceci, nous semble-t-il, n'est pas nécessaire pour l'élève. Des exercices de compréhension mettent en évidence que la frontière est floue entre les entiers très grands et les entiers non très grands. De même qu'il faut être prudent dans l'application du principe de récurrence à des formules utilisant les ordres de grandeur.

***Leçon* 3. Les ordres de grandeur des nombres réels**
On étend par définition les ordres de grandeur à l'ensemble des nombres réels :

> **Définition.**
> *Un nombre réel est dit* ***très grand positif*** *si et seulement s'il est supérieur à au moins un entier très grand. Son opposé est alors dit* ***très grand négatif****.*
> *Un nombre réel est dit* ***modéré*** *si et seulement si sa valeur absolue n'est pas très grande.*
> *Un nombre réel est dit* ***très petit*** *(tp) si et seulement si, ou bien il est nul, ou bien son inverse est très grand en valeur absolue.*
> *Deux nombres réels sont dits* ***très proches*** *si et seulement si leur différence est très petite. On écrit* $x \approx y$.

Théorème de Leibniz.
1°) *modéré* + *modéré* = *modéré*
2°) *modéré* $\times$ *modéré* = *modéré*
3°) *tp* + *tp* = *tp*
4°) *tp* $\times$ *modéré* = *tp*

La leçon est suivie d'exercices qui renforcent les connaissances théoriques, certains résultats peuvent être érigés en théorème. Les techniques de démonstrations acquises dans la première leçon sont réappliquables ici. La notion de proximité et le théorème de Leibniz seront à la base d'une analyse sur les nombres : on évalue des expressions numériques avec des nombres très petits ou très grands à un très petit près.

***Leçon* 4. Les ordres de grandeur des fonctions transcendantes**
Cette leçon montre qu'on ne se restreint pas uniquement aux fractions rationnelles mais qu'on peut également étudier des expressions numériques utilisant des fonctions transcendantes ; il suffit de connaître ou d'admettre quelques propriétés de ces fonctions.

A ce niveau, nous avons envie d'introduire la définition de la limite suivante :

$$\underset{x \to 0}{Lim} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \approx 0 \text{ alors } f(x) \approx 0.$$

Mais, si on considère la fonction linéaire définie par f(x) = a.x, on sait qu'en 0 sa limite est 0. Or si a est un nombre très grand, la limite ne convient pas car pour x très proche de 1/a, f(x) est très proche de 1. Il y a donc nécessite de restreindre la définition aux fonctions explicites.

***Leçon* 5. Nombres et fonctions explicites**
Cette leçon introduit les concepts de nombre et de fonction explicites avec leurs règles. Ceci est nécessaire si on veut avoir l'équivalence entre l'approche classique et l'approche avec les ordres de grandeur.

I. Les nombres explicites
Les nombres explicites sont caractérisés par les propriétés suivantes :
1. Tout nombre réel explicite est modéré.
2. Tout nombre réel qui est défini de manière unique à partir d'un nombre explicite de réels explicites est explicite.
3. Pour tout réel modéré x il existe un réel explicite α très proche de x. Le nombre explicite α est appelé **ombre** de x et noté $°x$.
4. Si x et y sont deux réels explicites alors $x+y,\ x \cdot y,\ |x|,\ -x,\ \frac{1}{x},\ x^y,\ E(x)$ sont explicites.
5. La somme et le produit d'un nombre explicite de réels explicites sont explicites.
6. Tout entier relatif modéré est explicite.
7. Deux réels explicites très proches sont égaux.
8. Soient x et y deux réels modérés. Alors $°(x+y) = °x+°y$, $°(-x) = -°x$, $°(x.y) = °x.°y$, $°\left(x^y\right) = °x^{°y}$ (x non tp), $°|x| = |°x|$, $°\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{°x}$ (x non tp).

II. Les fonctions explicites

1. Un intervalle est dit explicite si les extrémités non infinies éventuelles sont des réels explicites.
2. Toute fonction définie de manière unique sur un intervalle explicite par une propriété interne à la théorie ensembliste à partir d'un nombre explicite de nombres et de fonctions explicites est explicite.
3. La valeur d'une fonction explicite en un point explicite est explicite.

***Leçon* 6. Limite et continuité**

Les définitions de la limite et de la continuité pour les fonctions explicites sont données en termes d'ordres de grandeur.

I. La notion de limite

Définition.

Soit *f* une fonction explicite. $\underset{x \to 0}{Lim} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \approx 0$ alors $f(x) \approx 0$.

Remarques.

1. Définition analogue à gauche.
2. On dit que *f* admet une limite en 0 si la limite à droite et gauche sont égales.
3. Une fonction n'admet pas de limite en 0 s'il existe deux réels tp *h* et *k* tels que *f*(*h*) ne soit pas très proche de *f*(*k*).

II. La continuité

Définition.

Soit *f* une fonction explicite.

On dit que *f* est continue en un point explicite *a* si pour tout *x* très proche de *a*, *f*(*x*) est très proche de *f*(*a*).

La fonction *f* est dite continue sur un intervalle explicite I, si elle continue en tout point explicite de I.

Ces définitions sont conformes à l'idée intuitive, et sont opérationnelles grâce à l'analyse préalable sur les nombres. De même, l'unicité de la limite se déduit directement du fait que deux nombres explicites très proches sont égaux et la définition permet de dégager un critère de non existence de la limite.

III. Réactions

La plupart des participants découvraient pour la première fois cette approche de l'enseignement de l'Analyse. Il y a eu d'incessantes discussions dans les groupes et une fréquente sollicitation des animateurs, ce qui confirme l'aspect profond de cette approche.

Une première difficulté est le statut des formules et propriétés utilisant les ordres de grandeur. On est tenté par exemple d'appliquer la récurrence à la propriété " *n* est un entier non très grand " et en déduire qu'il n'y a pas d'entiers très grands. Ceci contredirait notre axiome concernant l'existence des entiers très grands.

Beaucoup d'interrogations ont concerné l'intégration de cette approche dans les programmes.

IV. Rapport sur l'expérimentation

Le rapport de B. Jauffret, N. Nicolai et C. Roncin sur leurs expérimentations dans leurs lycées en Picardie a rassuré l'auditoire. Elles ont expliqué et montré les progressions présentées aux élèves et ont rapporté les réactions des élèves. Il semble que l'acceptation par les élèves est très facile et les interrogations pertinentes, y compris dans des lycées professionnels. L'introduction des ordres de grandeur dans N et R a amené des discussions approfondies sur les nombres. Il s'avère aussi qu'en terminale, les élèves qui ont suivi un enseignement en première à l'aide des ordres de grandeur font moins d'erreurs grossières dans leurs copies.
Cette approche est également expérimentée dans le premier cycle universitaire à Mulhouse et Colmar. Nous avons noté une grande aisance des étudiants des que le contexte et les règles sont précises et un regain significatif de la rigueur dans la démonstration.

V. Conclusion

Tout le monde est parti avec le sourire malgré les discussions très animées. L'approche est très profonde et provoque une interrogation sur les mathématiques. Elle ne laisse aucune personne indifférente, car elle met le doigt sur des points très sensibles tels la distinction entre l'intuitif et le formel ainsi que la vision des nombres entiers et réels. Il est certain que la traduction formelle des notions intuitives pousse à plus de rigueur dans le raisonnement.
Les leçons que nous avons présentées sont une ébauche d'une progression et leurs contenus sont à enrichir à volonté et à adapter aux classes. Différents groupes IREM travaillent déjà sur des progressions spécifiques à des niveaux donnés, on peut trouver les documents sur le site de l'académie de Strasbourg . Les collègues qui le souhaitent sont invités à continuer la discussion sur le forum destiné à cet effet.

Références

[1] R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer, "*Fondement pour un enseignement en terme d'ordres de grandeur : les réels dévoilés"*, Brochure APMEP N° 103

[2] R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer :"*L'enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : nécessité et fondement*" Repère IREM (1996)

[3] R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer : "*L'enseignement de l'Analyse en l'an 2000*"
Bulletin vert de l'APMEP (1997)

[4] De nombreux documents sont consultables et téléchargeables à partir du site " Enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur ", du serveur de l'académie de Strasbourg : http://maths-03.site2.ac-strasbourg.fr/archives/maths_01/index.htm

A. MAKHLOUF (N.Makhlouf@univ-Mulhouse.fr)
Faculté des Sciences et Techniques
4, rue des frères Lumière 68093 Mulhouse cedex

E. MEYER (etienne.meyer@ac-strasbourg.fr)
(emeyer.apmep@wanadoo.fr)
Académie de Strasbourg
Inspection Académique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint 67000 Strasbourg