



JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. GÉRARDMER 3-6 novembre 1999

Conférence 4 GRANDEUR DE LA MESURE Mustapha NADI¹

1. Digressions en préambule : Figaro et Mars

Existe-t-il un point commun entre “ Les Noces de Figaro ” et le robot Sojourner explorant Mars ?

L’acte I de l’opéra de Mozart commence par le valet de chambre, Figaro, agenouillé, mesurant avec une règle les dimensions de sa chambre. Le robot de la NASA s’est lui promené plusieurs semaines sur une planète située à des millions de kilomètres de la nôtre pour permettre à des capteurs d’effectuer des mesures sur le sol martien. Dans ces deux cas, il s’agit de situations où la mesure est présente.

Quelle différence existe-t-il entre ces deux situations de mesure ?

Pour Figaro, ses mesures lui permettront de vérifier si ses meubles pourront y être installés en vue de sa mise en ménage proche. Pour la NASA, de nombreuses informations concernant la planète rouge ont été obtenues par Sojourner permettant de planifier des missions qui auront lieu dans les décennies à venir. L’utilisation que l’on fait des résultats des mesures dans l’un et l’autre de ces deux cas a des conséquences foncièrement différentes. Dans un cas la mesure a pour objectif une action du quotidien bien connue et maintes fois effectuée par l’homme. Dans le second cas, les conséquences des mesures sur Mars visent à améliorer nos connaissances par l’accès à un inconnu qu’il s’agit de découvrir. Cet inconnu peut, par exemple, fournir une réponse à la question d’une forme de vie ayant ou non existé sur Mars. On conçoit sans pousser les analogies plus en détail que la mesure présente un caractère universel à toutes les échelles des activités humaines, banales et quotidiennes, extraordinaires et originales.

Nombre d’autres exemples de cette omniprésence de la mesure pourraient ainsi être donnés : le paysan africain arpenteant son champ mesure des périmètres ou des surfaces bien qu’il ne sache souvent ni lire ni écrire. L’audience médiatique d’une émission de télévision mesure le degré d’intérêt d’une clientèle alphabétisée en fonction de critères publicitaires et commerciaux. Le paysan cherchera ainsi à évaluer ses besoins en semences ou en irrigation ce qui peut être déterminant pour la survie de sa tribu ou de sa famille ou tout au moins de son bien être. L’audience “ bonne ” ou “ mauvaise ” d’une émission du petit écran décidera de sa

¹ Mustapha NADI, électronicien de formation, est directeur du LIEN (laboratoire d’instrumentation électronique) de l’Université Henri Poincaré (NANCY-I).

survie dans la grille des programmes, et ceci quelle que soit sa qualité culturelle. Là aussi l'utilisation des résultats de la mesure et ses conséquences sont différentes.

2. Digressions (suite et fin) : Mesure et métrologie

Mesurer c'est établir une relation entre une grandeur et un ensemble de symboles numériques ou non. Pour affecter une valeur numérique à une grandeur, cas le plus courant, il faut pouvoir la comparer à une échelle prédéterminée et lorsque cette grandeur est mesurable on doit définir une grandeur de référence de même nature qui sera considérée comme unité de mesure. Le nombre réel par lequel il faut multiplier cette unité est alors une mesure de cette grandeur. L'étalon est un dispositif qui permet de vérifier l'exactitude des résultats donnés par un système de mesure. L'unité est un concept idéal fixé par une législation alors que l'étalon est un dispositif physique ou matériel dont la valeur est connue. Les définitions précédentes relèvent de la métrologie, qui est à la mesure ce que la grammaire est à la langue : un ensemble de règles qui permettent de s'accorder sur la représentation et l'interprétation de manière identique.

Historiquement, il est intéressant de noter que des métrologies locales s'étaient développées selon les mêmes démarches dans des civilisations aussi éloignées que les Mayas ou les Babyloniens. En France, une même dénomination, la toise par exemple, pouvait désigner une unité dont la valeur variait d'une région à l'autre. Ces différences amenaient à des conversions sur les marchés de la même manière que le ferait de nos jours un touriste français dans un bureau de change thaïlandais. Les rapprochements géographiques dus à l'évolution des modes de transport et la révolution française ont amené la définition de ce qui est devenu le système international (S.I.). Bien sur, des exceptions subsistent, il suffit pour cela de traverser la Manche.

Ces digressions illustrent le rôle essentiel et diversifié que joue la mesure dans les activités de l'homme. Cet article vise à résumer quelques notions fondamentales caractéristiques de la mesure avec une tentative de rapprochement (dans les grandes lignes) entre ses aspects mathématiques souvent complexes et ses aspects plus pratiques ou utilitaires.

3. La mesure, vecteur de la connaissance : Caractéristiques et spécificités

Les digressions précédentes amènent à se poser la question du rôle et des fonctions de la mesure. Cette science présente une spécificité que l'on peut synthétiser par les caractéristiques suivantes : elle est naturelle et intrinsèque aux activités de l'homme, elle est pluridisciplinaire et sans mesure il n'y aurait pas de progrès.

⇒ La mesure est **naturelle** chez l'être humain. L'exemple de Figaro montre que la mesure est d'abord une comparaison entre une grandeur (longueur d'une pièce) et une référence (règle). Cet exemple, ainsi que celui du paysan arpenteur, est équivalent à celui qui permet d'introduire les notions d'unité et d'étalon en classe primaire. Si tous les élèves d'une classe de 1^{er} degré mesurent la longueur de leur table avec comme instrument leur crayon plus ou moins rongé, les résultats seront certainement très différents alors que les tables semblent de longueurs identiques. Leur conclusion naturelle est immédiate " il faudrait que nous ayons tous le même crayon pour mesurer ". De même, sur les parois de la grotte de Lascaux, l'homme préhistorique a représenté des animaux selon des proportions

ordonnées, à partir des dimensions que ses yeux ont évaluées. L'homme a ainsi toujours *mesuré* son environnement de manière naturelle.

⇒ La mesure est **pluridisciplinaire** par deux aspects : la diversité des champs qui la composent et son omniprésence dans tous les domaines.

– De l'acquisition jusqu'au traitement, un système de mesure peut tirer profit des connaissances en physique, en électronique, en informatique, en biologie, en automatique, en mathématiques appliquées, etc.

– La mesure intervient également dans toutes les activités humaines, en particulier dans les transactions commerciales. Les exemples donnés en préambule suffisent à se convaincre de cette pluridisciplinarité. En enseignement toutefois elle est essentiellement présente dans les mathématiques à l'école primaire et au début du secondaire avant d'être enseignée via les sciences expérimentales ou la technologie.

⇒ La mesure est **à la base de tout progrès**. Lord Kelvin écrivait “ *il n'y a de science que du mesurable...* ”, à savoir toute validation théorique d'un phénomène (physique, biologique, chimique, etc.) passe par la mesure fiable de ses effets. Bien qu'il s'agisse du domaine où la nécessité de mesure est la plus évidente pour progresser, on conçoit bien qu'il en soit de même pour d'autres champs de connaissances : économie, sciences sociales, etc. La construction des pyramides, la mécanique de Newton puis d'Einstein, l'imagerie médicale ou, plus près de nous, des récentes avancées de l'électronique qui ont donné l'ordinateur personnel, sont autant d'exemples d'avancées technologiques ou fondamentales dues à la mesure.

La démarche de progression du savoir procède en général de deux cheminements schématisés sur la figure 1. Partant de la mise en ordre de mesures connues et de théories établies, il est possible d'extrapoler les résultats futurs sans se soucier des causes. Ainsi la physique nucléaire ou la physique des particules ont été d'abord développées théoriquement par des lois formulées avant la possibilité de vérification par l'expérience et la mesure. Il s'agit là d'une démarche de progression directe dite inductive (flèche 1).

Une autre approche, plus courante, consiste à établir des savoirs nouveaux par déduction (flèche 3) en partant du réel (flèche 2). On conçoit bien que ces démarches nécessitent des validations expérimentales par la mesure, soit a posteriori, soit immédiates. Dans ces deux situations, la mesure occupe toujours une position d'interface. D'un côté, on trouve toujours une réalité physique qui peut être d'origine naturelle ou artificielle. De l'autre, on retrouve soit le monde physique, soit le monde abstrait. La mesure est alors utilisée pour contrôler directement un processus ou pour élaborer un modèle théorique.

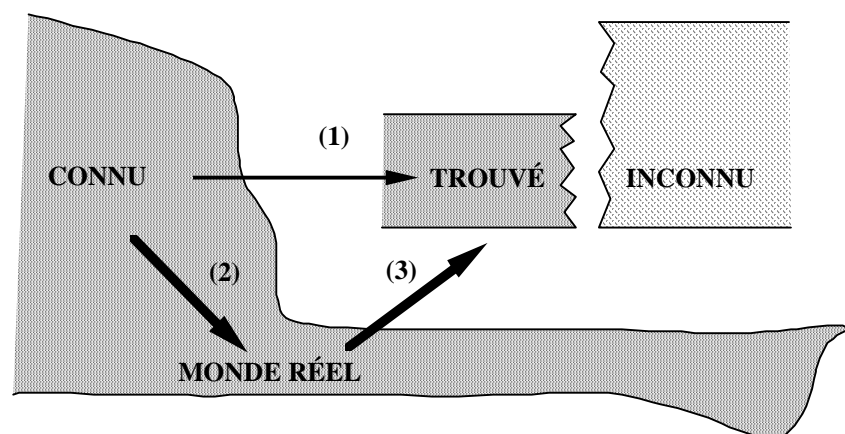


Figure 1. La progression des connaissances passe toujours par un moyen de validation : la mesure

Ces interactions entre expériences et théorie sont permanentes en recherche, qu'elle soit scientifique ou industrielle. Les performances scientifiques recherchées ont surtout visé à améliorer la précision en particulier dans la mesure de l'infiniment petit (physique des particules) et de l'infiniment grand (rayonnement de galaxies lointaines). Depuis une dizaine d'années, on constate un ralentissement dans la recherche de ces performances de type précision, dû aussi bien aux limites atteintes par les instruments que par le fait que les besoins en précision sont largement dépassés pour la plupart des champs à l'heure actuelle (physique des particules et astrophysique mis à part).

En résumé, dans toute activité humaine, la notion de mesure correspond à l'établissement d'une relation entre un phénomène naturel ou artificiel et un ensemble de symboles, généralement des nombres, en vue de s'en faire une représentation la plus fiable possible. Cette représentation est *classée* sur une échelle, le plus souvent ordonnée.

4. Aspects fondamentaux de la mesure : une science transverse

Question : existe-t-il un corps de savoir propre à la mesure ?

La réponse reste complexe. Sans prétendre répondre à cette question dans ce qui suit, rappelons les bases fondamentales de la notion de mesure et tentons de les relier à des définitions pratiques. La notion de mesure a un sens très précis en mathématiques et a fait l'objet d'une théorie élaborée. La difficulté réside dans sa transcription utilitaire. Ainsi les travaux de Boole, de Borel, de Lebesgue, de Riemann et d'autres font apparaître la mesure à travers la théorie ensembliste de la mesure et de l'intégration. Ces travaux sont restés confinés au champ mathématique et peu de tentatives de les transférer aux champs pratiques de la mesure ont été réalisés. Ainsi à la question précédente on peut répondre par l'affirmative pour l'aspect mathématique mais pas pour l'aspect physique ou expérimental de la mesure. Il suffit pour s'en convaincre de se poser les questions suivantes :

“ Qu'est ce qu'une grandeur mesurable ? ”

“ Quelle différence existe-t-il entre une grandeur et une mesure ? ”

Historiquement, la plupart des propriétés des grandeurs mesurables ont été déterminées expérimentalement mais ce n'est que récemment qu'un formalisme mathématique a été développé à partir de l'algèbre de Boole. Pour situer cette complexité, rappelons que la notion de mesure est une généralisation de la notion de fonction et que les distributions constituent une généralisation de la notion de mesure.

Voyons une définition mathématique de la mesure. Soit Ω un ensemble quelconque et F une famille de parties de Ω formant une algèbre de Boole.

Une propriété importante est que quelles que soient les parties P_i et P_j appartenant à F , la réunion de P_i et P_j appartient aussi à F reste vraie pour tout ensemble dénombrable de P_i . F est appelé σ algèbre de Boole ou tribu, notée \mathbf{B} .

Autrement dit, dans une tribu :

$$\forall P_i (i = 1, 2, \dots, \infty) \in F, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \in F$$

On en déduit la notion de mesure sur une tribu :

On appelle mesure μ sur \mathbf{B} toute application faisant correspondre à chaque partie $\mathbf{P} \in \mathbf{B}$ un scalaire réel ou complexe noté $\mu(\mathbf{P})$ tel que :

- a) la mesure de l'ensemble vide est nulle ;
- b) la mesure d'une réunion dénombrable de parties disjointes est la somme des mesures de chacune des parties.

Soit symboliquement :

$$\mathbf{a)} \mu(\emptyset) = 0$$

$$\mathbf{b)} \forall P_i, P_j (i \neq j) : P_i \cap P_j = \emptyset (i, j = 1, 2, \dots, \infty), \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i)$$

Un sous-ensemble E de Ω est *mesurable* s'il appartient à la tribu \mathbf{B} .

Cette propriété se rattache en pratique à la notion d'**additivité**. Sans rentrer dans des considérations rigoureuses, on peut entrevoir l'intérêt en sciences expérimentales sur un exemple simple : la notion d'intervalle.

La notion usuelle de longueur d'un segment conduit à prendre pour mesure d'un intervalle $[a, b]$ sur \mathbb{R} la quantité : $\mu([a, b]) = b - a$. Ceci suffit à définir sur la tribu \mathbf{B} une mesure appelée mesure de Lebesgue. Les propriétés énoncées ci-dessus peuvent être vérifiées sur cet exemple.

5. Conséquences pratiques des aspects mathématiques

Etablir de façon précise les conséquences pratiques de ces propriétés mathématiques nécessiterait de longs développements et nous renvoyons le lecteur aux références bibliographiques notamment les travaux de Finkelstein. Ces aspects fondamentaux restent toutefois à la base des définitions qui suivent et qu'il est nécessaire de préciser tant les abus dans leur utilisation sont courants. En pratique, le terme mesure présente de nombreuses acceptions dans la langue française et les usages sont souvent dévoyés ou allègrement mélangés. Le "vocabulaire international des termes généraux et fondamentaux de métrologie" (qui est une norme internationale) propose la définition suivante : "*La Mesure est un ensemble d'opérations ayant pour objet la détermination de la valeur d'une grandeur*". La métrologie préfère le terme mesurage qui dénote une quantification, par un ou plusieurs nombres, à l'aide d'une échelle absolue ou relative de la qualité d'une situation ou d'un phénomène donné. La rigueur qu'exige la métrologie permet la reproductibilité et la transmission du résultat qui, pour avoir un sens, doit être associé à une estimation du degré de certitude.

La notion de **grandeur** est en fait une définition plus large de la mesure. Elle se définit comme étant "*l'attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement*" toujours selon le "vocabulaire international des termes généraux et fondamentaux de métrologie". Par ailleurs, on appelle **grandeurs conservatives** celles pour lesquelles on peut définir un étalon représentable matériellement (le kilogramme, par exemple). Les étalons des **grandeurs non conservatives** sont par contre représentables par un phénomène physique (l'ampère, par exemple).

On peut ainsi définir trois grandes classes de grandeurs : les grandeurs mesurables, les grandeurs repérables et les indicateurs.

Les grandeurs mesurables sont celles pour lesquelles on peut établir :

- une relation d'équivalence,
- une relation d'ordre total (plus grand que, égal à, plus petit que, ...),
- une opération interne : l'addition,
- une opération externe : la multiplication par un scalaire.

De nombreuses grandeurs (longueur, masse, angle) sont des grandeurs mesurables additives. On retrouve là une identité avec la définition mathématique rappelée ci-dessus, en particulier

la proposition b). Par contre, la température est une grandeur mesurable non additive par juxtaposition.

Les grandeurs repérables

Pour ces grandeurs l'opération interne, l'addition algébrique, et l'opération externe, la multiplication par un scalaire, ne peuvent être définies. À titre d'exemples citons le potentiel électrique, la dureté ou la concentration. Les grandeurs repérables nécessitent la définition d'échelles définies par convention, dites échelles de repérage (par exemple les échelles de dureté, l'échelle de Richter pour les séismes).

Les indicateurs

C'est le cas des grandeurs auxquelles on cherche à affecter une valeur sans même pouvoir définir les relations d'équivalence et d'ordre total. Il s'agit généralement d'une indication (souvent qualitative) ayant valeur globale pour un ensemble de grandeurs mesurées conjointement.

Les exemples abondent et ce type de mesure connaît un intérêt théorique important ces derniers temps : la mesure de l'intelligence d'un académicien, le point de rupture de la coque d'un pétrolier, le taux de pollution de la place Stanislas à Nancy, l'évaluation des capacités d'un élève ou d'un administrateur d'établissement scolaire. Dans toutes ces situations, on est amené à mesurer une ou plusieurs grandeurs interdépendantes ou non sur un objet d'investigation et d'en déduire une qualité globale sous forme d'un indice. Généralement ces indices sont cités sans aucun complément sur les conditions de validité ou de mesure.

6. Conclusion

Contrairement à ce qui semblerait au premier abord une évidence, tout n'est pas mesurable : soit parce que la grandeur est fondamentalement inaccessible (il faut bien que la descendance ait des choses à découvrir), soit parce que l'instrument nécessaire n'existe pas (précision limitée matériellement, limites fondamentales comme le principe d'incertitude d'Heisenberg). Historiquement, les définitions précédentes ont été établies expérimentalement et antérieurement aux aspects mathématiques évoqués ci-dessus. On notera pour ce qui concerne les indicateurs, que les chercheurs en sciences économiques et humaines sont précurseurs sur le sujet. L'évolution des législations dans le domaine de l'environnement a amené cependant de plus en plus de scientifiques à s'intéresser à ce type de grandeurs par le biais notamment de la notion de mesures conjointes. On retrouve ceci dans le domaine du traitement des mesures pour la fusion de données ou les réseaux neuronaux.

Les mathématiques ont traité la mesure de manière rigoureuse. Les théories de la mesure font partie des fondements de l'analyse. La mesure couvre tous les champs des connaissances. Paradoxalement, il reste à construire pour cette cheville du progrès, un corps de savoir propre cohérent pour une mise en œuvre mieux maîtrisée au même titre qu'il en est pour la physique ou d'autres sciences expérimentales. C'est là encore un objet de travail conséquent auquel se sont attelés certains courageux.

7. Quelques Références bibliographiques

- BOISSEAU J.F., 1989. " *Méthodologie de la mesure* " ; Techniques de l'Ingénieur- Mesures et contrôle ; R140- p. 120
- CAMPBELL N.R. " *An account of the principles of measurement and calculation. London* " ; Longmans, Green, 1928 (cité dans LUCE)
- COMMOT D., 1992. " *Les miracles de la mesure* " ; Usine nouvelle ; Juil. 1992, 2373, p.10-14
- DEAN ; " *Measurement, quality and trade* ", Meas Sci Technol. 2 (1991) 403-404
- DRAHEIM H., 1983. " *Measurement as Science and Technology* " ; Measurement Apr.-Jun.1983,V.1, p. 68-74
- DUPRAT H. " *Les sciences économiques* " chap 10 in "La mesure et l'Instrumentation, état de l'art et perspectives", PRIEUR G. et NADI M. (coordinateurs) ; Préface de Georges CHARPAK ; collection Mesures Physiques - Masson Paris, 726 pages. Novembre 1995
- FERLET R. " *L'instrumentation en astrophysique* " chap 9 in "La mesure et l'Instrumentation, état de l'art et perspectives", PRIEUR G. et NADI M. (coordinateurs) ; Préface de Georges CHARPAK ; collection Mesures Physiques - Masson Paris, 726 pages. Novembre 1995
- FINKELSTEIN L., 1975. " *Representation by symbol systems as an extension of the concept of measurement* " ; kybernetes ; vol. 4, pp. 215-223 ; Gordon and Breach Sciences publishers Ltd.
- GRANOVSKII V. A., 1990. " *General Aspects of metrological support to data acquisition systems and process control* " ; Measurement Techniques ; Nov. 1990, Vol. 33, N°11, p. 17-19
- KREE P. " *Intégration et théorie de la mesure* " 1997, Ellipses Editeur, Paris
- HELLWIG H., 1990. " *The Importance of Measurement in Technology-Based Competition* " ; IEEE Trans. on Instr. and Meas ; Oct. 1990, Vol. 39, N°5, p. 685-688
- HIMBERT M : " *La métrologie : un langage universel pour la science et la technologie* ", in Récents progrès en Génie des procédés, vol 12-1998, Lavoisier Tech & Doc, Paris, 1998
- HOFMANN D., 1983. " *Modelling of errors in measurement* " ; Measurement; Sep. 1983, Vol. 1, N°3, p 125-128
- JAFFARD P., 1976. " *Initiation aux méthodes de la statistique et du calcul des probabilités* " ; Masson 1976
- LAFAYE P. " *Unités de mesure* " ; Techniques de l'Ingénieur- Mesures et contrôle ; R23 - p 1-13
- LUCE Duncan and TUKEY John, " *Simultaneous conjoint measurement : a new type of fundamental measurement* ". Journal of mathematical psychology : 1, 1-27 , 1964
- MASI C.G., 1990. " *So...You Want to Measure Submicron Dimensions* " ; Test & Meas. World ; Mar. 1990, p. 59-68
- NADI Mustapha " *La mesure et l'instrumentation dans la recherche scientifique et dans l'industrie : aspects fondamentaux et interactions avec l'instrumentation et la métrologie* " Revue de l'électricité et de l'électronique - n°3 - pages 38-42 ; mars 1999.
- NADI M, PRIEUR G., D. KOURTICHE ; Chapitre 26: " *L'enseignement de la mesure* " in "La mesure et l'Instrumentation, état de l'art et perspectives", PRIEUR G. et NADI M. (coordinateurs) ; Préface de Georges CHARPAK ; collection Mesures Physiques - Masson Paris, 726 pages. Novembre 1995
- NEUILLY M. " *Incertitudes de mesure et tolérances* " ; Techniques de l'Ingénieur- Mesures et contrôle; R280- p 1-21
- ROMANI Lucien. " *Structure des grandeurs physiques* ", Blanchard Ed., Paris 1989
- SCHAEFFER M et BLONDÉ J.P. " *L'instrumentation de la microphysique* " ; chap. 3 in "La mesure et l'Instrumentation, état de l'art et perspectives", PRIEUR G. et NADI M. (coordinateurs) ; Préface de Georges CHARPAK ; collection Mesures Physiques - Masson Paris, 726 pages. Novembre 1995
- WHITE R. M., 1993. " *Competitive measures* " ; IEEE Spectrum ; April 1993, Vol. 30, N°4, p. 29-33
- GIACOMO P. " *Etalons métrologiques fondamentaux* " ; Techniques de l'Ingénieur- Mesures et contrôle; R50- p 1-16