Introduction à l'étude des nombres complexes

La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine de l'imaginaire.
Jacques Hadamard, *Essai sur la psychologie dans le domaine de l'invention mathématique*.1959

I Des formules pour résoudre algébriquement les équations de degré trois :

Vous connaissez des formules pour résoudre des équations du second degré, si bien que vous savez toujours trouver leurs solutions, si elles existent, de façon exacte ; vous avez aussi des critères pour connaître le nombre de leurs solutions.
Le cas des équations de degré trois est différent. Si une racine particulière est connue, la factorisation est possible et l'on retrouve le second degré ; sinon, il faut chercher d'autres moyens de factoriser, ce qui n'est pas toujours possible.

a) Une équation dont une solution particulière est connue :

Pour chacune des deux équations (E1) et (E2) recherchez parmi les nombres – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2, une solution. Puis résolvez les :
(E1) : $x^3 + 2x + 3 = 0$
(E2) : $x^3 - 5x - 2 = 0$
(On se rappellera que lorsque a est racine d'une équation polynomiale, on peut en général mettre en facteur (x – a) dans le polynôme dont on recherche les racines.)

b) Il n'y a pas de solution particulière connue :

Soit (E3) l'équation : $x^3 - 15x - 4 = 0$.
Vérifiez que les nombres – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2, ne sont pas solution de (E3).
Soit *f* la fonction définie sur R par *f*(*x*) = $x^3 - 15x - 4$.
Etudiez la fonction *f* et déterminer le nombre de solutions de l'équation (E3).

c) Recherche de formules :

Les « formules » pour résoudre les équations du second degré sont connues depuis très longtemps, si on accepte de considérer comme « formule » des moyens géométriques, ou algorithmiques, qui ont peu de rapport bien sûr avec notre écriture algébrique actuelle.
Les mathématiciens arabes des XI° et XII° siècle ont essayé de résoudre « par la géométrie »[1] des équations du troisième degré. Ils ont buté sur la résolution algébrique.
En occident, jusqu'au XVI° siècle, les efforts de résolution n'aboutiront pas vraiment. Cependant, les mathématiciens italiens de la Renaissance vont se risquer à « percer le mystère et les secrets du troisième degré ». Une longue histoire va commencer, avec des mathématiciens comme Nicolo Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), et Rafaele Bombelli (1526-1573).

1° Forme générale pour la résolution d'une équation de degré 3 :

La mode était à l'époque aux défis et tournois mathématiques. Cela permettait d'arrondir ses fins de mois et d'acquérir la célébrité.
Répondant à l'un de ces défis, en 1535, Tartaglia réussit à résoudre quelques équations de degré 3. Dans des circonstances un peu scabreuses[2], Cardan[3] réussit à soutirer sa découverte à Tartaglia, lui

[1] Ils faisaient apparaître les solutions de ces équations en étudiant l'intersection de courbes appelées coniques, dont vous connaissez les parabole et les hyperboles.

promettant de la garder secrète. En fait, Cardan ne tardera pas à publier cette résolution, après toutefois l'avoir largement enrichie, en donnant une étude complète des équations de degré 3, dans Ars Magna, en 1545.

Il propose de classer les équations de degré 3 en trois catégories que nous donnons dans l'écriture algébrique contemporaine :

d) : $x^3 + cx = d$

e) : $x^3 + d = cx$

f) : $x^3 = cx + d$

Question : pourquoi les équations à l'époque de Cardan ne pouvaient être ainsi écrites ? Depuis quand date l'écriture algébrique des équations ?

En fait, ceci peut paraître étrange. De la même façon que, pour nous, une équation générale du second degré s'écrit : $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels quelconques, a non nul, une équation générale du troisième degré s'écrit :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ où *a, b, c* et *d* sont des réels quelconques, *a* étant non nul.

Rappelons que non seulement l'écriture algébrique d'une équation n'était pas connue, mais aussi que les nombres négatifs n'étaient pas de « vrais nombres » ; par ailleurs « = 0 » n'avait pas de sens.

De plus, dans les équations de Cardan il n'apparaît pas de terme en x^2. Il serait un peu long de démontrer pourquoi effectivement tout polynôme du troisième degré peut se ramener, par un changement de variable à un polynôme sans terme de degré 2. Ceux et celles qui le souhaitent pourront essayer de s'atteler à cette démonstration. Cardan l'a démontré.

Tout ceci considéré, on obtient bien les 3 cas proposés.

2° Résolution d'équation et formules de Tartaglia-Cardan :

Dans le cas général, il est possible d'établir qu'une équation (E) du type : $x^3 + px + q = 0$ (E) admet une solution de la forme :

$$X = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}}$$

Si, bien sûr, le nombre $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} \geq 0$.

Cette formule est appelée formule de Tartaglia-Cardan. En effet ce sont leurs efforts conjoints qui, finalement, ont permis de l'établir, du moins dans une forme adaptée à chacun des trois cas évoqués ci-dessus.

Discussion :

Cardan a remarqué que pour ses cas (I) et (II), il peut y avoir 0 ou 1 solution, et sa « formule » permet alors de la trouver.

Dans le cas (III), il peut y avoir 3 solutions, or, juste dans ce cas, sa formule ne peut s'appliquer, car $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} < 0$.

Exemples :

a) Soit (E4) $x^3 + 6x = 20$.

(E4) $\Leftrightarrow x^3 + 6x - 20 = 0$ [$p = 6$; $q = -20$]

---

[2] Lire l'extrait de « La folie de Jérôme Cardan »

[3] En France, Girolamo Cardano est connu sous le nom de Jérôme Cardan.

A l'aide de la formule de Cardan déterminer une solution. Cette solution vous semblera très compliquée. Vous pourrez l'écrire plus simplement en vous aidant du développement de $\left(1+\sqrt{3}\right)^3$ et $\left(1-\sqrt{3}\right)^3$.

Nous avons ainsi une solution. Achever alors la résolution.

b) Soit (E5) : $x^3 = 32x + 24$.

(E5) $\Leftrightarrow x^3 - 32x - 24 = 0$. [$p = -32$; $q = -24$]

Vérifier que : $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

La formule de Tartaglia-Cardan ne peut s'appliquer. Vérifier cependant que 6 est racine et achever la résolution.

II Où l'on ose l'impensable :

Ce cas où les formules de Tartaglia Cardan ne peuvent s'appliquer, alors qu'il existe des solutions, va s'appeler rapidement le cas irréductible.

Cependant Cardan, puis surtout Bombelli vont essayer de forcer le destin. Et si l'on décidait d'écrire qu'un nombre négatif, dans certaines circonstances particulières, pouvait être considéré comme le carré de quelque chose ?

Après beaucoup de tâtonnements, considérés par Cardan comme des "tortures mentales", Bombelli va décider d'appliquer les formules à la résolution de l'équation : $x^3 = 15x + 4$.

On pourra vérifier que la solution donnée par les formules de Tartaglia Cardan devrait s'écrire :

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ ou encore $x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$

Bombelli calcule alors $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$ en remplaçant a par 2 et b par $\sqrt{-1}$, où $\sqrt{-1}$ désigne quelque chose dont le carré est -1.

Quelle est la solution trouvée par Bombelli ?

Il a ainsi imaginé une chose qui n'est ni un nombre positif, ni un nombre négatif, mais dont le carré vaut -1, et qui est très utile pour trouver les solutions réelles d'une équation. Il nomme cette chose "plus de moins". Nous la noterons provisoirement $\sqrt{-1}$. Ainsi :

$$\boxed{(\sqrt{-1})^2 = -1.}$$

Peu à peu, ces nouvelles choses vont être utilisées dans les calculs algébriques, et pas seulement pour résoudre les équations de degré 3. On leur trouve une foule d'utilité. Descartes les nommera, dans sa Géométrie, en 1637, "quantités imaginaires". D'autres continueront longtemps de les nommer "quantités impossibles". (Les nombres négatifs étaient aussi des quantités impossibles).

Une nouvelle notation :

Dans un texte de 1774 Euler écrit :

"Maintenant comme $-a$ signifie autant $+a$ multiplié par -1, et que la racine quarrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1, ou $\sqrt{-a}$ est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$. *Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$.*
(...)
De plus comme $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$*, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multiplié par $\sqrt{-3}$."*

Anne Boyé, Régionale APMEP de Nantes, IREM des Pays de la Loire

Appliquons les règles énoncées par Euler :
$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} =$
et $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$
Est-ce compatible ?
Euler prendra conscience de cette difficulté. Aussi décidera-t-il de représenter la quantité $\sqrt{-1}$ dont le carré vaut – 1 par le symbole **i** (début de imaginaire ou d'impossible).
Donc :

$$\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$$

Cette notation sera reprise par Gauss en 1831 mais aura du mal à s'imposer. Cependant à partir de Gauss, et pour vous en particulier, le symbole $\sqrt{\ }$ devra être réservé aux nombres réels positifs et aura comme seule définition : si a est un réel positif, on note $\sqrt{a}$ le réel positif qui, élevé au carré, donne a.

Application : en utilisant le symbole i, écrire les nombres dont le carré est – 25 ; puis dont le carré est – 2 ; puis dont le carré est $-\sqrt{3}$.

Les nombres complexes :
En 1831, Gauss donnera le nom de « nombres complexes » à ces quantités considérées jusqu'ici comme imaginaires.
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'addition et la multiplication doivent prolonger les opérations de R et avoir les mêmes propriétés : commutativité, associativité, distributivité. Il y a seulement la propriété supplémentaire de l'existence de **i** dont le carré vaut – 1.