

Exercice 1

- La proposition est fautive puisque si on prend les nombres complexes $z = 1$ et $z' = i$, on a bien $z^2 + z'^2 = 0$ alors que l'on n'a pas $z = 0$.
- Soient $p, p + 1, \dots, p + n - 1$ n entiers consécutifs.
Leur somme vaut $S = \frac{n(p + p + n - 1)}{2} = n \times \frac{2p + n - 1}{2} = n \times \left(p + \frac{n - 1}{2} \right)$.
Pour que cette somme soit un multiple entier de n , il faut et il suffit que $p + \frac{n - 1}{2}$ soit un entier, c'est-à-dire que $\frac{n - 1}{2}$ soit un entier. Puisque $\frac{n - 1}{2} = k$ équivaut à $n = 2k + 1$, alors la somme de n entiers consécutifs est un multiple de n si, et seulement si, n est un entier impair.
- Posons $P(n)$ la propriété: " $u_n = 2^n - 1$ ". Vérifions que la propriété P est vraie pour tout entier naturel par une récurrence double:

- aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, on a bien $u_0 = 2^0 - 1$ et $u_1 = 2^1 - 1$. Ainsi, la propriété P est vraie aux rangs 0 et 1.
- Si on suppose que la propriété P est vraie aux rangs n et $n + 1$, où n est un entier naturel fixé, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3 \times (2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 3 - 2^{n+1} + 2 \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

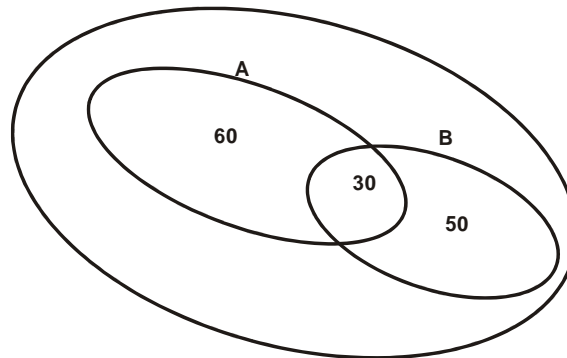
Ainsi, si la propriété P est vraie à deux rangs consécutifs, alors elle est vraie au rang suivant.

Grâce aux deux constats précédents, on sait que la propriété P est vraie pour tout entier naturel n .

Remarque: on accepte également le raisonnement consistant à vérifier par une récurrence simple (ie à un prédécesseur) la propriété $P(n)$ suivante : " $u_n = 2^n - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ ".

4.

(a)



Puisque chaque pièce a la même probabilité d'être prélevée, on sait que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{90}{10\ 000} = 0.009, \\ P(B) &= \frac{80}{10\ 000} = 0.008, \\ P(A \cap B) &= \frac{30}{10\ 000} = 0.003. \end{aligned}$$

La probabilité que la pièce prélevée présente un défaut est donc

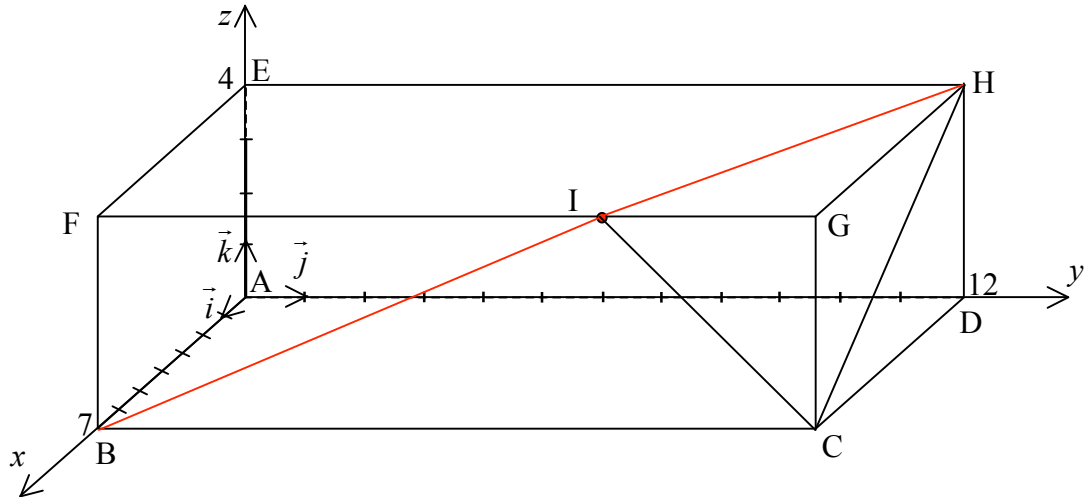
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.014.$$

La probabilité que la pièce prélevée ne présente pas de défaut est alors $1 - P(A \cup B) = 0,986$.

- (b) On a $P(A) \times P(B) = 0,000072 \neq 0,003 = P(A \cap B)$ ce qui signifie que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 2

1. $\vec{IC}(0, 3, -4)$; $\vec{IH}(-7, 3, 0)$; $\vec{CH}(-7, 0, 4)$
 $IC = \sqrt{9+16} = 5$; $IH = \sqrt{49+9} = 7,615... \approx 7,62$; $CH = \sqrt{49+16} = 8,062... \approx 8,06$



2. a Les trois points B, I, H ne sont pas alignés. Si on projette ces trois points dans le plan (xAy) parallèlement à (Az) , on obtient les points B, I', D avec I' projection de I. Si B, I, H étaient alignés, I' serait sur $[BD]$, or I' est sur $[BC]$ et $I' \neq B$; les trois points B, I, H ne sont donc pas alignés.
 On peut visualiser la situation en construisant la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

On peut aussi calculer la valeur de l'angle \widehat{BIH} pour montrer que les trois points ne sont pas alignés (ce calcul permet de répondre aux remarques des deux élèves).

$$\vec{IB} \cdot \vec{IH} = \|\vec{IB}\| \cdot \|\vec{IH}\| \cos(\vec{IB}, \vec{IH}) \quad \vec{IB}(0, -9, -4) \quad \text{et} \quad \vec{IB} \cdot \vec{IH} = 0 + (-9) \times 3 + 0 = -27$$

$$\cos(\vec{IB}, \vec{IH}) = \frac{\vec{IB} \cdot \vec{IH}}{\|\vec{IB}\| \cdot \|\vec{IH}\|} = \frac{-27}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{58}} = -0,3599... \text{ ce qui donne } \widehat{BIH} \approx 111^\circ.$$

2. b L'angle \widehat{BIH} n'est pas droit. On peut soit calculer sa valeur, soit plus simplement vérifier que $\vec{IB} \cdot \vec{IH} \neq 0$.

On peut également calculer BI et BH et vérifier que $BH^2 \neq BI^2 + IH^2$.

3. Plusieurs rédactions sont évidemment possibles.
1. Soit J le point de coordonnées $(7, y, 4)$ avec $0 \leq y \leq 12$. Où se trouve le point J ?
 2. Calculer le produit scalaire $\vec{JB} \cdot \vec{JH}$. En déduire une condition pour que l'angle \widehat{BJH} soit droit.
 3. Calculer le produit scalaire $\vec{JB} \cdot \vec{JC}$. En déduire une condition pour que l'angle \widehat{BJC} soit droit.
 4. En déduire s'il existe un point J du segment $[FG]$ tel que la droite (BJ) soit perpendiculaire au plan CJH .

Corrigé :

1. I est sur le segment [FG]. $\overrightarrow{JB} (0, -y, -4)$ $\overrightarrow{JH} (-7, 12 - y, 0)$ $\overrightarrow{JC} (0, 12 - y, -4)$.

2. $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JH} = 0 + y^2 - 12y + 0$. Une condition pour que l'angle \widehat{BJH} soit droit est donc $y^2 - 12y = 0$.

3. $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JC} = 0 + y^2 - 12y + 16$. Une condition pour que l'angle \widehat{BJC} soit droit est donc $y^2 - 12y + 16 = 0$

4. Un point J du segment [FG] qui répond à la question est tel que la droite (BJ) soit perpendiculaire à la droite (JH) et à la droite (JC).

Un tel point vérifierait donc $y^2 - 12y = y^2 - 12y + 16$. Cette équation n'ayant pas de solution, il n'y a donc pas de point J du segment [FG] tel que la droite (BJ) soit perpendiculaire au plan CJH.

Exercice 3

Partie A

1. On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times dx = \frac{\pi}{2} ; \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2. On a, pour tout x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x)$ et donc $0 \leq \sin^n(x)$.

On en déduit donc que $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$ soit $0 \leq I_n$.

On a, pour tout x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et donc, en multipliant par $\sin^n(x)$ positif, on a $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$. On en déduit donc que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$ soit $I_{n+1} \leq I_n$.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin^{n-1}(x) dx$$

Si on pose $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = \sin^{n-1}(x)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on a $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)$. On a donc, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

On a donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. En multipliant l'égalité précédente par I_{n-1} , on obtient que $nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-1} I_{n-2}$, ce qui signifie bien que la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante. La valeur de cette constante est, par exemple, la valeur du premier terme de cette suite, soit $1 \times I_1 \times I_0$ soit $\frac{\pi}{2}$.

5. On sait d'après la question précédente que $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$. On en déduit donc que I_n n'est jamais nul. On a aussi vu que $I_n \geq 0$. On a donc désormais $I_n > 0$.

On a enfin vu que la suite I est décroissante et donc on a $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. En divisant par $I_{n-1} > 0$, on a donc $\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$. Or, on sait d'après la question 3 que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1} \text{ soit } \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1}. \text{ On a donc bien au final } \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

6. Puisque $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, on sait, par théorème d'encadrement et grâce à la question qui précède que

$\frac{I_n}{I_{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ soit que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n-1}$. Sachant de plus que $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, on a $nI_n I_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(I_n)^2$ et donc $n(I_n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ d'où $(I_n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ d'où $\sqrt{(I_n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Or, $\sqrt{(I_n)^2} = |I_n| = I_n$ car $I_n \geq 0$.

On a donc bien $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

7. Posons $P(n)$ la propriété suivante " $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ " et procédons par récurrence :

- au rang $n = 0$, on sait que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et on a bien $\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi la propriété P est vraie au rang 0.

- Supposons que l'on ait, à un rang $n \geq 0$, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et prouvons qu'alors $I_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$.

On sait, grâce à la question 3 que $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}$ et donc

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2(n+1)} \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

La propriété P étant vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang, elle est alors vraie à tout rang n entier naturel.

Partie B

1. L'intervalle $] -1; 1[$ est centré en 0 et on a :

$$\Leftrightarrow \text{pour } x \neq 0, f(-x) = -\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = -\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = f(x),$$

$$\Leftrightarrow \text{pour } x = 0, f(-0) = f(0).$$

Ainsi, la fonction f est paire.

2. On sait que $\ln(v) \underset{v \rightarrow 1}{\sim} v - 1$ et puisque $\frac{1+x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$, on a donc

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1+x}{1-x} - 1 = \frac{2x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{1}.$$

Ainsi, on a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x} \times 2x = 1$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ et comme $f(0) = 1$, f est donc continue en 0.

3. Posons $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x - \frac{2x^3}{3}$.

g est clairement de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ et on a, pour $x \in] -1; 1[$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} - 2 - 2x^2 = \frac{2}{1-x^2} - 2(1+x^2) = \frac{2}{1-x^2} (1 - (1+x^2)(1-x^2)) = \frac{2x^4}{1-x^2} \geq 0$$

La fonction g est donc croissante sur $] -1; 1[$ et comme $g(0) = 0$, on a donc $g(x) \geq 0$ pour x dans $]0; 1[$.

Partie C

1. On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) &= \ln\left(\frac{n! e^n n^{-(n+\frac{1}{2})}}{(n+1)! e^{n+1} (n+1)^{-(n+\frac{3}{2})}}\right) = \ln\left(\frac{n^{-(n+\frac{1}{2})}}{(n+1) e^1 (n+1)^{-(n+\frac{3}{2})}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^{-(n+\frac{1}{2})}}{e \times (n+1)^{-(n+\frac{1}{2})}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}\right) \\ &= -\ln(e) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or, avec $p = \frac{1}{2n+1}$, on a

$$f(p) = \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{2n}{2n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{2n+2}{2n}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

On a donc bien $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = f(p) - 1$ avec $p = \frac{1}{2n+1}$.

2. Il est clair que $p = \frac{1}{2n+1} \in]0; 1[$ et donc d'après le résultat mentionné dans la question 3 de la partie B, on sait que $1 + \frac{p^2}{3} \leq f(p) \leq 1 + \frac{p^2}{3(1-p^2)}$ et donc on a $\frac{p^2}{3} \leq \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{p^2}{3(1-p^2)}$. Or,

$$\frac{p^2}{3(1-p^2)} = \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{12n(n+1)}$$

On a donc obtenu que

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} \leq \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

Pour aboutir au deuxième résultat souhaité, il suffit donc que $\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(n+1)(n+2)} &\leq \frac{1}{3(2n+1)^2} \iff (2n+1)^2 \leq 4(n+1)(n+2) \\ &\iff 4n^2 + 4n + 1 \leq 4n^2 + 12n + 8 \iff 8n + 7 \geq 0 \text{ ce qui est vrai puisque } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Au final, on a donc bien

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

3. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{12(n+1)} - \ln(u_n) + \frac{1}{12n} = \frac{1}{12n(n+1)} - \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \geq 0 \\ w_{n+1} - w_n &= \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{12(n+2)} - \ln(u_n) + \frac{1}{12(n+1)} = \frac{1}{12(n+1)(n+2)} - \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq 0 \\ w_n - v_n &= \frac{1}{12n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite v est croissante, la suite w est décroissante et leur différence tend vers 0. Les suites v et w sont donc adjacentes et convergent donc vers une même limite ℓ .

4. On a

$$\begin{aligned} n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell e^{-n} n^{(n+\frac{1}{2})} &\iff n! e^{-n} n^{-(n+\frac{1}{2})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell \iff \frac{u_n}{e^\ell} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ &\iff \ln\left(\frac{u_n}{e^\ell}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \ln(u_n) - \ell \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Or, on sait que

$$v_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \text{ donc } \ln(u_n) - \ell = \left(\ln(u_n) - \frac{1}{12n}\right) + \left(\frac{1}{12n} - \ell\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell + 0 - \ell = 0.$$

Ainsi, on a bien $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell e^{-n} n^{(n+\frac{1}{2})}$.

5. Sachant que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell e^{-n} n^{(n+\frac{1}{2})}$, on a donc

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell e^{-2n} (2n)^{(2n+\frac{1}{2})}}{4^n \left(e^\ell e^{-n} n^{(n+\frac{1}{2})}\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2)^{(2n+\frac{1}{2})} (n)^{(2n+\frac{1}{2})}}{4^n e^\ell n^{2(n+\frac{1}{2})}} \frac{\pi}{2} = \frac{(2)^{2n} \sqrt{2} (n)^{(2n+\frac{1}{2})}}{4^n e^\ell n^{2n+1}} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{e^\ell \sqrt{n}} \frac{\pi}{2}$$

mais comme $I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2n}}$ on en déduit que $\sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{e^\ell \sqrt{n}} \frac{\pi}{2}$ soit que $e^\ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$. Comme il s'agit de constantes dont le quotient est censé tendre vers 1, c'est donc que $e^\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 4

I. Quelques généralités.

1. On a

$$OM' = |z'| = \left| \frac{k}{\bar{z}} \right| = \frac{|k|}{|\bar{z}|} = \frac{|k|}{|z|} = \frac{|k|}{OM}$$

2. Puisque z et z' ne sont jamais nuls, on peut écrire que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}} \right) = \arg \left(\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O} \right) = \arg \left(\frac{k}{z\bar{z}} \right) [2\pi]$$

Or, $\frac{k}{z\bar{z}} = \frac{k}{|z|^2}$ est un réel et donc $\arg \left(\frac{k}{z\bar{z}} \right) = 0 [\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}} \right) = 0 [\pi]$, ce qui assure que les points O, M et M' sont alignés.

Remarque: on peut aussi obtenir ce résultat en posant $z = \rho e^{i\theta}$ et en constatant qu'alors $z' = \frac{k}{\rho} e^{i\theta}$.

Si on considère que $M(x, y)$ et $M'(x', y')$, alors on a :

$$x' + iy' = z' = \frac{k}{\bar{z}} = \frac{kz}{z\bar{z}} = \frac{k(x + iy)}{x^2 + y^2}$$

d'où, puisque k est un réel :

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = xx' + yy' = \frac{kx^2}{x^2 + y^2} + \frac{ky^2}{x^2 + y^2} = k$$

3. On a

$$M \text{ est invariant par } I \iff I(M) = M \iff z' = z \iff z\bar{z} = k \iff |z|^2 = k \iff OM^2 = k$$

On distingue donc deux cas :

- Si $k < 0$, alors l'ensemble des points invariants par l'inversion I est vide.
- Si $k > 0$, alors l'ensemble des points invariants par l'inversion I est le cercle de centre O et de rayon \sqrt{k} .

4. Pour z différent de 0, on a

$$f(f(z)) = \frac{k}{\left(\frac{k}{\bar{z}}\right)} = \frac{k}{\frac{k}{z}} = \frac{kz}{k} = z$$

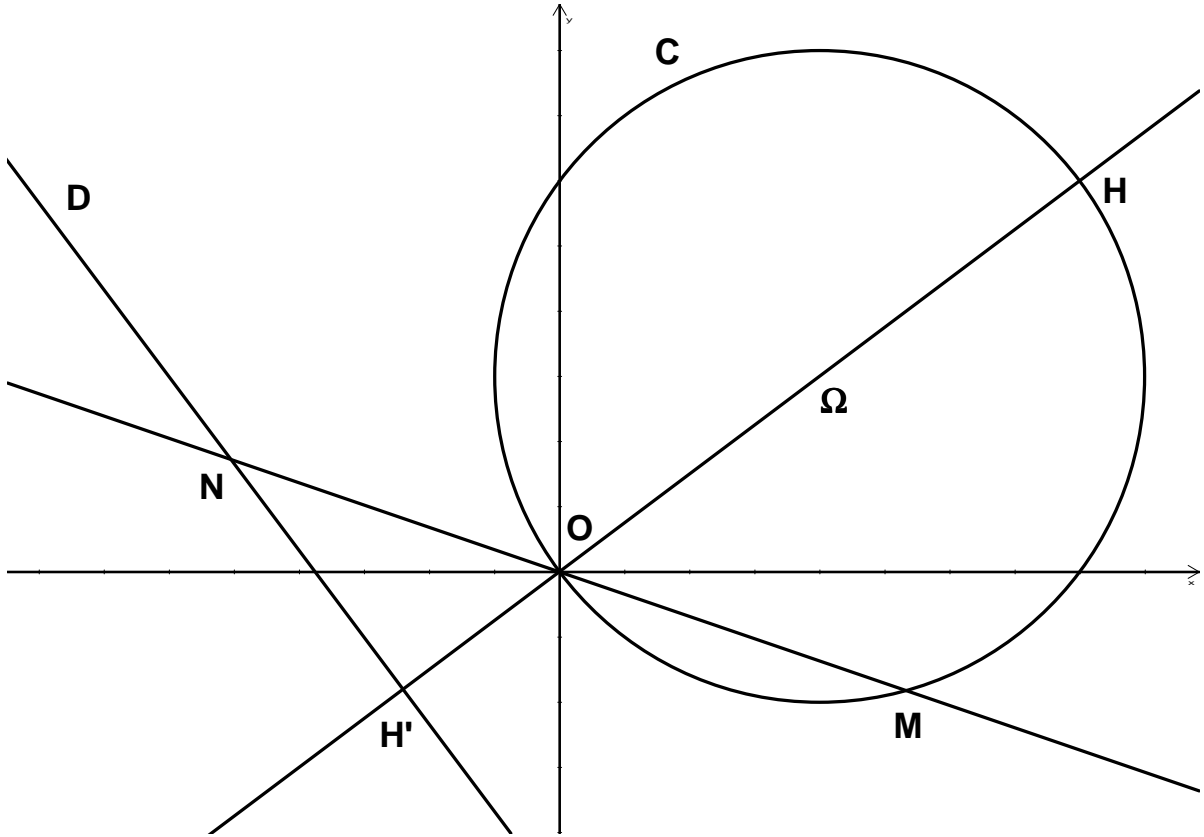
ce qui assure que pour tout point M différent de l'origine, on a $I(I(M)) = M$ et donc on a bien $I \circ I = Id$.

5. Un point M du cercle de centre O et de rayon $r > 0$ a pour affixe complexe $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$. Son image par l'inversion I a donc pour affixe complexe $z' = \frac{k}{\bar{z}} = \frac{k}{r} e^{i\theta}$. Le lieu de ces points lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$ est le cercle de centre O et de rayon $\frac{|k|}{r}$. Ainsi, l'image par l'application I du cercle de centre O et de rayon $r > 0$ est le cercle de centre O et de rayon $\frac{|k|}{r}$.

II. Image par l'inversion I d'un cercle passant par le point O .

1.

(a)



(b)

1. Il suffit de constater que les angles \widehat{OMH} et $\widehat{NH'O}$ sont tous deux égaux ainsi que les angles \widehat{MOH} et $\widehat{NOH'}$ pour pouvoir conclure que les triangles OMH et ONH' sont semblables.
2. Puisque les deux triangles précédents sont rectangles et semblables, on a

$$\cos(\widehat{MOH}) = \cos(\widehat{NOH'}) \text{ soit } \frac{OM}{OH} = \frac{OH'}{ON}.$$

On en déduit donc que $OM \times ON = OH \times OH'$. Or, puisque H' est l'image de H par l'inversion I , on a $OH \times OH' = |k|$ et donc $OM \times ON = |k|$. De plus, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OH'} = k < 0$ donc H' est à l'extérieur du cercle C et de ce fait la droite D également. Comme, par construction, N est sur la droite D , N et M sont de part et d'autre de O . Si on note $z = re^{i\theta}$ l'affixe de M , on a donc N d'affixe $\frac{|k|}{r}e^{i(\theta+\pi)}$, ie $\frac{k}{r}e^{i\theta}$ ce qui correspond à $f(z)$. Donc N est bien l'image du point M par l'inversion I .

3. On vient d'obtenir que l'image d'un point quelconque du cercle C est un point de la droite D . Donc l'image du cercle C par l'inversion I est incluse dans la droite D , ie $I(C) \subset D$. De plus, si N est un point de la droite D , puisque O n'appartient pas à cette droite, la droite (OM) coupe le cercle C en un second point que l'on appelle P . En utilisant la question précédente, on sait donc que l'image de P par l'inversion I est le point d'intersection de la droite (OP) avec la droite D , c'est-à-dire le point N . On a donc $I(P) = N$. Ainsi, tout point N de la droite D est l'image par l'inversion I d'un point (ici P) du cercle C , ce qui assure que $D \subset I(C)$. Au final, l'image du cercle C par l'inversion I est la droite D .

2. Si $k > 0$, puisque $\frac{k}{z} = -\frac{-k}{z}$, on peut voir l'inversion de centre O et de puissance k comme la composée de l'inversion de centre O et de puissance $-k$ (avec $-k < 0$) avec la symétrie centrale par rapport à O . Ainsi, l'image du cercle C par l'inversion I est l'image d'une droite par une symétrie centrale; il s'agit donc d'une droite.

III. Image par l'inversion I d'un cercle ne passant pas par le point O .

1. On a

$$\begin{aligned} M \in C &\iff \Omega M = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \text{ car } |z - \omega| \text{ et } r \text{ sont positifs} \\ &\iff (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = r^2 \iff (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = r^2 \iff z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \omega\bar{\omega} = r^2 \end{aligned}$$

2. Puisque $z' = \frac{k}{z}$ équivaut à $z = \frac{k}{z'}$, on a

$$\begin{aligned} M \in C &\iff z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \omega\bar{\omega} = r^2 \iff \frac{k}{z'}\frac{k}{\bar{z}'} - \omega\frac{k}{z'} - \bar{\omega}\frac{k}{\bar{z}'} + \omega\bar{\omega} = r^2 \\ &\iff k^2 - \omega k \bar{z}' - \bar{\omega} k z' + \omega\bar{\omega} z' \bar{z}' = r^2 z' \bar{z}' \\ &\iff k^2 - \omega k \bar{z}' - \bar{\omega} k z' + z' \bar{z}' (|\omega|^2 - r^2) = 0 \end{aligned}$$

Puisque le cercle C ne passe pas par O , on a $r \neq \Omega O$ soit $|\omega|^2 - r^2 \neq 0$ et donc

$$M \in C \iff z' \bar{z}' - \frac{\omega k}{|\omega|^2 - r^2} \bar{z}' - \frac{\bar{\omega} k}{|\omega|^2 - r^2} z' = \frac{k^2}{r^2 - |\omega|^2}$$

Posons $\omega' = \omega \frac{k}{|\omega|^2 - r^2}$ et R le réel positif tel que $R^2 - |\omega'|^2 = \frac{k^2}{r^2 - |\omega|^2}$, c'est-à-dire

$$R^2 = \frac{k^2}{r^2 - |\omega|^2} + |\omega|^2 \frac{k^2}{(|\omega|^2 - r^2)^2} \text{ soit encore } R^2 = \frac{k^2 r^2}{(|\omega|^2 - r^2)^2} \text{ soit } R = \frac{|k| r}{|\omega|^2 - r^2}. \text{ On a donc}$$

$$M \in C \iff z' \bar{z}' - \omega' \bar{z}' - \bar{\omega}' z' + \omega' \bar{\omega}' = R^2 \iff M' \text{ appartient au cercle de centre } \Omega' (\omega') \text{ de rayon } R$$

Donc l'image du cercle C par l'inversion I est bien un cercle; notons le C' . On a

$$\begin{aligned} O \in C' &\iff \Omega' O = R \iff |\omega'|^2 = R^2 \iff \left| \frac{\omega k}{|\omega|^2 - r^2} \right|^2 = \frac{k^2 r^2}{(|\omega|^2 - r^2)^2} \\ &\iff \frac{|\omega|^2 k^2}{(|\omega|^2 - r^2)^2} = \frac{k^2 r^2}{(|\omega|^2 - r^2)^2} \iff r^2 = |\omega|^2 \end{aligned}$$

ce qui n'est pas le cas puisque le cercle C ne passe pas par O . Ainsi, l'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O .

3. Si on pose $K = \frac{k}{|\omega|^2 - r^2}$ et qu'on note h l'homothétie de centre O et de rapport K , on constate que $\omega' = K\omega$ ce qui signifie que $\Omega' = h(\Omega)$. Comme de plus, on a $R = |K| r$, le cercle de centre Ω' et de rayon R est l'image du cercle C par h .