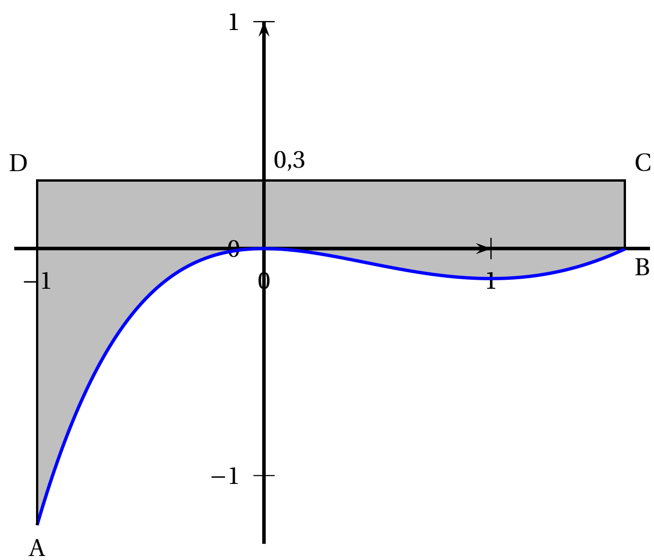
☙ CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGÉNIEURS ❧
DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME
ANNÉE 2012

Durée : 2 heures

Le candidat traitera 3 questions au choix parmi les 4 proposées, chaque question représentant le même nombre de points.
L'usage d'un formulaire est interdit; l'usage d'une calculatrice électronique à fonctionnement autonome, non programmable, non programmée, non imprimante, avec entrée unique par clavier est seul autorisé.

1re question (valeur = 5)

Une chaîne de parfumerie projette de commander à une entreprise de menuiserie, un certain nombre de consoles de présentation de produits de beauté. Le graphique ci-dessous représente la face latérale de la console dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique égale à 2 cm.



1. On fait l'hypothèse que la courbe qui joint le point A au point B est la courbe représentative d'une fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1,59]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + dx\mathrm{e}^{-x}$$

a, b, c, d désignant quatre constantes réelles.

a. Exprimer pour tout réel $x \in [-1\ ;\ 1,59]$, $f'(x)$ en fonction de x.

b. Sachant que la courbe représentative de f passe par les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{2}\right)$ et qu'elle admet en ces points une tangente horizontale, déterminer les valeurs des réels a, b, c, d.

2. On admet désormais que la courbe qui joint le point A au point B est la courbe représentative de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1,59]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x}$$

a. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1,59} x\text{e}^{-x}\,\text{d}x$.

b. On note $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la face latérale ABCD de la console : déterminer l'approximation à l'unité près la plus proche de la valeur de $\mathscr{A}$.

2$^{\text{e}}$ **QUESTION (valeur = 7)**

Le système de refroidissement par eau d'une machine est constitué d'un circuit de contenance 20 litres. Dès que l'eau contenue dans ce circuit atteint la température de 80 °C, il est rafraîchi en de multiples points par un courant d'eau froide à 16 °C. Il rentre très rapidement dans le circuit autant d'eau qu'il n'en sort, à raison de 2 litres par seconde, et le grand nombre de points de rafraîchissement permet de considérer qu'à chaque seconde, 18 litres d'eau contenus dans le circuit sont mélangés de façon homogène à 2 litres d'eau froide. (La température est donc la même en tout point du circuit). On considère comme négligeable l'apport de chaleur dans le circuit dû au fonctionnement de la machine pendant le rafraîchissement.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le temps nécessaire (en seconde) pour que la température de l'eau contenue dans le circuit retombe à 40 °C. Les calculs seront basés sur un résultat barycentrique intuitif selon lequel x litres d'eau a u degrés mélangés à y litres d'eau à v degrés donnent $x+y$ litres d'eau à $\dfrac{xu+yv}{x+y}$ degrés.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A (un modèle discret)

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température (en °C) de l'eau contenue dans le circuit au bout de n secondes de rafraîchissement.

1. Montrer que la suite (T_n) est définie par :

$$T_0 = 80 \quad \text{et} \quad 10T_{n+1} = 9T_n + 16 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. pour tout entier naturel n, on pose $U_n = T_n - 16$.

a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique ; préciser le premier terme et la raison

b. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de U_n en fonction de n puis l'expression de T_n en fonction de n.

3. Démontrer que la suite (T_n) converge vers une valeur ; préciser cette valeur

4. Trouver le plus petit entier naturel n pour lequel $T_n \leqslant 40$.

Partie B (un modèle continu)

Pour tout réel t positif (exprimé en seconde), on note $T(t)$ la température (en °C) de l'eau contenue dans le circuit à l'instant t.

1. Soit Δt un petit laps de temps (exprimé en seconde).

a. Montrer que la température (en °C) de l'eau contenue dans le circuit à l'instant $t+\Delta t$ est : $T(t+\Delta t) = \dfrac{(20-2\Delta t)T(t) + 2\Delta t \times 16}{20}$.

b. En déduire que : pour tout entier n : $\dfrac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = -0,1T + 1,6$.

c. Montrer alors que T est solution sur $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : \quad T' = -0,1T + 1,6.$$

2. **a.** Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution de (E) qui satisfait la condition initiale $T(0) = 80$.

c. Résoudre l'équation $T(t) = 40$. Conclure.

3e QUESTION (valeur = 8)

Cet exercice est constitué de 6 questions indépendantes. Vous en traiterez 4, au choix, sur les 6. Si vous en traitez plus, seules les 4 premières seront prises en compte.

Chaque question vous propose une affirmation. Vous indiquerez, **en le justifiant**, si elle est vraie ou fausse. Une réponse injustifiée ne rapportera aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$z_{\text{A}} = \text{i}$ et $z_{\text{B}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

C est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$, D est l'image du point C par la symétrie orthogonale d'axe $\left(\text{O},\,\vec{u}\right)$, E est l'image du point D par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

Vrai ou Faux?

Une mesure (en rad) de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{CD}}\,;\,\overrightarrow{\text{CE}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{3}$.

2. Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, A désigne le point d'affixe 2. Pour tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z telle que $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

Vrai ou Faux?

Si M appartient à la médiatrice du segment [OA], alors M' appartient à un cercle de centre A.

3. ABC est un triangle tel que $\widehat{\text{ABC}} = 30°$, H_{A} est le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle, H en est l'orthocentre.

Vrai ou Faux?

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AH}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AH}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}_{\text{A}}}$ et $\text{AH} = 2\dfrac{\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}}{\text{AB}}$.

4. A et B désignant deux points du plan, on note I le barycentre du système $\{(\text{A}, 1)\,;\,(\text{B}, 2)\}$ et J le barycentre du système $\{(\text{A}, 1)\,;\,(\text{B}, -2)\}$.

Soit E l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{M\text{A}}{M\text{B}} = 2$.

Vrai ou Faux?

E est l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}}\right) = 0$ et c'est une droite.

5. L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

S désigne la sphère d'équation : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 12$.

P le plan d'équation : $x - y + z = 11$.

Vrai ou Faux?

S est tangente à P et le point de tangence a pour coordonnées $(3\,;\,-3\,;\,5)$.

6. Une entreprise possédant 10 autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs tels que chute de pierres, présence d'un troupeau sur la voie, ... Les distances (en km) parcourues sans incident par chacun de ces autocars, depuis l'entrepôt, sont des variables aléatoires, deux à deux indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre : $\lambda = \dfrac{1}{82}$.

   Vrai ou Faux ?

   La probabilité qu'au moins huit autocars n'aient subi aucun incident pendant les 100 premiers kilomètres n'excède pas $0,002$.

Nota :

1. *Aucun document n'est autorisé.*
2. *Délits de fraude : « Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude sera immédiatement exclu de la salle d'examen sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».*